E. ROUCHE Y

CH. DE COMBEROUSSE

TRATADO DE GEOMETRIA ELEMENTAL.

1888
ROU
Tra

FA-602

1888 ROU Tra

R.602

07404

TRATADO

DE

GEOMETRÍA ELEMENTAL

POR

E. ROUCHÉ Y CH. DE COMBEROUSSE

TRADUCIDO

POR

[illegible]RTUONDO

INGENIERO DE CAMINOS

Y

J. PORTUONDO

TERCERA EDICIÓN

MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE FORTANET

IMPRESOR DE LA REAL ACADEMIA DE LA HISTORIA

Calle de la libertad, núm. 29.

1888

BIBLIOTECA DEL C.O.A.M.

ÍNDICE.

Págs.

PREFACIO..... XXI
INTRODUCCION..... 1

GEOMETRÍA PLANA.

LIBRO PRIMERO.

LA LÍNEA RECTA.

§ I.—De los ángulos.

Igualdad y suma de los ángulos..... 6
Igualdad de los ángulos rectos..... 7
Suma de los ángulos adyacentes cuyos lados exteriores están en línea recta..... 8
Igualdad de los ángulos opuestos por el vértice..... 10

§ II.—Triángulos.

Primeras propiedades..... 12
Casos de igualdad de triángulos cualesquiera..... 15
Propiedades del triángulo isósceles..... 17

§ III.—Perpendiculares y oblicuas.

Relacion entre la longitud de una oblicua y la distancia de su pié al de la perpendicular..... 20
Lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos dados..... 22
Casos de igualdad de triángulos rectángulos..... 23

Págs.

Lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados de un ángulo 24

§ IV.—Paralelas.

Primeras propiedades 26
Relaciones entre los ángulos alternos, correspondientes, etc.... 28
Igualdad de las paralelas comprendidas entre paralelas..... 29
Relaciones entre los ángulos que tienen sus lados paralelos ó perpendiculares..... 30

§ V.—Suma de los ángulos de un polígono.

Líneas poligonales convexas..... 32
Suma de los ángulos de un triángulo..... 33
Igualdad de los ángulos de dos triángulos cuyos lados son paralelos ó perpendiculares 34
Suma de los ángulos de un polígono..... 35

§ VI.—Dél paralelógramo.

Propiedades del paralelógramo..... 37
Caractéres por los cuales se reconoce que un cuadrilátero es paralelógramo..... 38
Propiedades del rectángulo rombo y cuadrado..... 40

LIBRO II.

LA CIRCUNFERENCIA DE CÍRCULO.

§ I.—Arcos y cuerdas.

Propiedades de los diámetros..... 43
Relacion entre las longitudes de los arcos y de las cuerdas..... 44
Propiedades del diámetro perpendicular á una cuerda..... 45
Relacion entre la longitud de una cuerda y su distancia al centro. 46

§ II.—Tangente al círculo.—Posiciones mutuas de dos circunferencias.

Propiedades de la tangente al círculo..... 47
Normal y oblícuas..... 49
Igualdad de los arcos interceptados por dos paralelas..... 50

Págs.

Tres puntos que no están en línea recta determinan una circunferencia; punto de concurso de las tres perpendiculares levantadas á los lados de un triángulo en sus puntos medios..... 51
Interseccion, contacto y ángulo de dos circunferencias..... 52
Posiciones relativas de dos circunferencias; relaciones correspondientes entre la distancia de centros y los radios..... 53

§ III.—Medida de ángulos.

Nociones sobre la medida de magnitudes..... 55
Condiciones de proporcionalidad de dos magnitudes..... 58
Medida de los ángulos en el centro..... 64
Medida de los ángulos inscritos; segmento capaz..... 65
Medida de los ángulos cuyo vértice es interior ó exterior al círculo, y lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve una recta bajo un ángulo dado..... 67
Propiedad de los ángulos opuestos en un cuadrilátero inscrito convexo..... 68

§ IV.—Construccion de ángulos y triángulos.

Uso de la regla y el compás..... 69
Comun medida de dos rectas..... 70
La diagonal y el lado de un cuadrado son dos líneas inconmensurables entre sí..... 72
Construccion de ángulos; su evaluacion en grados; uso del transportador..... 73
Construccion de triángulos; discusion del caso dudoso..... 76

§ V.—Trazado de paralelas y perpendiculares.

Construccion de paralelas; uso de la escuadra..... 78
Division de una recta, de un arco, ó de un ángulo en dos partes iguales..... 80
Circunferencia que pasa por tres puntos dados..... 82
Construccion de perpendiculares..... 83

§ VI.—Problemas sobre las tangentes.

Construccion de tangentes á una circunferencia..... 84
Círculos inscrito y ex-inscritos á un triángulo; puntos de concurso de las bisectrices de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo; distancias de un vértice á los diversos puntos de contacto sobre un mismo lado..... 85
Segmento capaz de un ángulo dado, y tangentes comunes á dos circunferencias..... 87

Págs.

§ VII.—Apéndice.

Consideraciones sobre la resolucion de problemas; análisis y síntesis.. 89
Método de las sustituciones sucesivas 90
Método por duplicacion ó simetría 91
Método por reduccion al absurdo; propiedad del cuadrilátero circunscrito 92
Método por interseccion de lugares geométricos 93
Construcciones auxiliares 94

LIBRO III.

FIGURAS SEMEJANTES.

§ I.—Líneas proporcionales.

Posiciones relativas de los dos puntos que dividen una recta en una relacion dada; division armónica 98
Proporcionalidad de los segmentos interceptados sobre dos rectas cualesquiera por una serie de paralelas 100
Relacion de los segmentos determinados sobre un lado de un triángulo por la bisectriz interior ó exterior del ángulo opuesto. 103
Lugar geométrico de los puntos cuyas distancias á dos fijos están en una relacion dada 106

§ II.—Líneas proporcionales en el círculo.

Propiedades de las rectas anti-paralelas con relacion á un ángulo. 107
Constancia del producto de los segmentos interceptados por una circunferencia sobre las transversales que parten de un punto fijo; tangente media proporcional entre la secante entera que parte del mismo punto y su segmento externo 109

§ III.—Semejanza de polígonos.

Casos de semejanza de triángulos 112
Punto de concurso de las medianas de un triángulo 116
Descomposicion de los polígonos semejantes en triángulos semejantes 117
Relacion de las rectas homólogas en dos polígonos semejantes, relacion de sus perímetros 119

Págs.

Proporcionalidad de los segmentos interceptados sobre dos paralelas por rectas concurrentes..... 121

§ IV.—Relaciones métricas entre las diferentes partes de un triángulo.

Relaciones entre los catetos de un triángulo rectángulo, la altura bajada del vértice del ángulo recto, y los segmentos de la hipotenusa..... 123

Cuadrado del lado opuesto á un ángulo agudo ú obtuso en un triángulo cualquiera.—Alturas en funcion de los lados..... 125

Suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo.—Suma de los cuadrados de los lados de un cuadrilátero.—Medianas de un triángulo en funcion de los lados.—Lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus distancias á dos fijos es constante..... 129

Diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo.—Lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á dos fijos es constante..... 131

Producto de dos lados de un triángulo en funcion de la bisectriz de su ángulo ó de la altura correspondiente al tercer lado.—Bisectrices y radio del círculo circunscrito en funcion de los lados..... 132

Propiedades del cuadrilátero inscriptible.—Diagonales en funcion de los lados..... 134

§ V.—Problemas relativos á líneas proporcionales.

Division de una recta en partes cuyas relaciones son dadas.... 135

Cuarta proporcional á tres rectas dadas..... 137

Media proporcional entre dos rectas dadas; límite superior de la diferencia entre la media aritmética y la media geométrica de dos longitudes..... 138

Tangentes comunes á dos circunferencias..... 139

Construccion de un polígono semejante á otro dado..... 141

Construir dos rectas cuyo producto y la suma ó diferencia son conocidos; construccion de las raíces de la ecuacion de 2.º grado..... 142

Division de una recta en media y extrema razon..... 145

Circunferencia que pasa por dos puntos y tangente á una recta ó á una circunferencia dada..... 148

§ VI.—Polígonos regulares.

Todo polígono regular es inscriptible y circunscriptible..... 150

Págs.

Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes, y su relacion de semejanza es igual á la relacion de sus radios ó apotemas. 152
Polígonos estrellados..... 153

§ VII.—Problemas sobre los polígonos regulares.

Inscripcion del cuadrado..... 154
Inscripcion del exágono regular y del triángulo equilátero..... 155
Inscripcion de los dos decágonos regulares y de los dos pentágonos..... 156
Inscripcion de los cuatro pentedecágonos regulares..... 158
Diversos problemas sobre polígonos regulares..... 160

§ VIII.—Medida de la circunferencia.

Definicion de la longitud de una línea curva; la relacion de la cuerda al arco tiene por límite la unidad..... 166
La relacion π de la circunferencia al diámetro es constante; cálculo de la longitud de un arco de círculo..... 170
Unidades empleadas en la medida de los ángulos..... 172
Cálculo de π; métodos de los perímetros é isoperímetros; identidad de los cálculos á que conducen..... 173

§ IX.—Apéndice.

Principio de los signos..... 181
Transversales.—Relacion entre los segmentos determinados por una transversal sobre los lados de un triángulo.—Relacion entre los segmentos determinados sobre los lados de un triángulo por las rectas de union de sus vértices con un punto cualquiera de su plano.—Aplicaciones..... 183
Propiedades del cuadrilátero completo..... 187
Relacion anarmónica de cuatro puntos en línea recta; que es proyectiva.—Relacion anarmónica de un haz de rectas, de cuatro puntos en una circunferencia ó de cuatro tangentes á ella. Propiedades fundamentales sobre dos haces que tienen un radio comun, y una relacion anarmónica igual, ó sobre dos series de cuatro puntos que tienen un punto homólogo comun y una relacion anarmónica igual 188
Triángulos homológicos..... 193
Exágonos de Pascal y de Brianchon..... 194
Proporcion armónica; circunferencias ortogonales..... 195
Haces armónicos; polar con relacion á un ángulo..... 198
Polo y polar en el círculo; triángulo autopolar..... 200

Págs.

Método de las polares recíprocas; transformacion de las propiedades descriptivas y de las métricas; aplicaciones á los polígonos inscritos y circunscritos 202
Figuras homotéticas.—Centros y ejes de homotecia de tres figuras homotéticas dos á dos, y en particular de tres círculos.... 208
Definicion general de la semejanza 213
Método de las figuras semejantes 214
Método por inversion 215
Eje radical de dos círculos; centro radical de tres círculos; puntos anti-homólogos del sistema de dos círculos 216
Círculo tangente á tres círculos dados 221
Casos particulares del problema precedente.—Lo que son los polos, polares, ejes radicales, centros de semejanza en los casos límites 222
Figuras inversas; conservacion de los ángulos 225
Figura inversa de una recta ó de un círculo 227
La relacion de la tangente comun al producto de los radios es la misma para el sistema de dos círculos y para la figura inversa. 229
Método de transformacion por radios vectores recíprocos 231
Círculo de los nueve puntos.—Su contacto con los círculos inscrito y ex-inscritos 233
Condicion para que cuatro círculos sean tangentes á un quinto círculo.—Aplicacion al círculo tangente á tres dados, y al círculo de los nueve puntos 235

LIBRO IV.

ÁREAS.

§ I.—Medidas de las áreas de los polígonos.

Proporcionalidad entre el área del rectángulo y cada una de sus dimensiones 239
Área del rectángulo 241
Áreas del paralelógramo 242
Áreas del triángulo.—Cálculo del área y de los radios de los círculos inscrito y ex-incritos en funcion de los lados del triángulo. 243
Área del trapecio.—Medida del área de un polígono cualquiera. 248

Págs.

§ II.—Comparacion de áreas.

Relacion de las áreas de dos polígonos semejantes..... 249
Relacion de las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo igual ó suplementario..... 251
Propiedades de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo..... 252

§ III.—Áreas del poligono regular y del círculo.

Área de un polígono regular.—Relacion de las áreas de dos polígonos regulares de un mismo número de lados.—Área de un sector poligonal regular..... 255
Área del círculo.—Relacion de las áreas de dos círculos..... 257
Área del sector circular.—Relacion de las áreas de dos sectores semejantes..... 259
Área del segmento circular.—Relacion de las áreas de dos segmentos semejantes..... 261

§ IV.—Problemas sobre áreas.

Construir un triángulo equivalente á un polígono dado..... 263
Construir un cuadrado equivalente á un polígono dado..... 264
Construir el polígono equivalente á uno y semejante á otro dado. 265
Dadas dos figuras semejantes construir una tercera semejante á ellas y equivalente á su suma ó diferencia..... 266
Construir un polígono semejante á otro dado y cuya área esté con la de éste en la relacion de dos rectas dadas..... 267

§ V.—Apéndice.

Área aproximada de una figura plana limitada por una curva cualquiera.—Fórmula de Simpson.—Fórmula de Poncelet.... 269
Límite superior de la diferencia entre la longitud de un arco de círculo y su cuerda..... 273
Sobre los máximos y mínimos de figuras planas.—Máximo del área de un triángulo en el cual son conocidos la base y el perímetro, ó las longitudes de dos lados, ó la suma de dos lados.. 275
Entre todas las figuras planas, isoperímetras, el círculo es la de área máxima.—Máximo de una figura cerrada por una recta y una línea de forma arbitraria.—Máximo de un polígono cuyos lados son dados, ó de un polígono del cual son dados el perímetro y el número de lados.—Aplicacion á los polígonos regulares..... 277

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.

LIBRO V.

DEL PLANO.

Págs.

§ I.—Primeras nociones sobre el plano.

Posiciones relativas de una recta y un plano..... 281
Interseccion y posiciones relativas de dos planos..... 282
Condiciones necesarias y suficientes para determinar un plano. 283
Posiciones relativas de dos rectas en el espacio.—Condiciones de paralelismo de dos rectas en el espacio.—Consecuencias.. 284

§ II.—Rectas y planos paralelos.

Posiciones relativas de dos rectas paralelas y de un plano..... 285
Posiciones relativas del sistema de dos planos paralelos y de una recta ó un plano..... 286
Igualdad de los ángulos cuyos lados son paralelos y en el mismo sentido.—Definicion del ángulo de dos rectas; rectas perpendiculares..... 287
Igualdad de las paralelas comprendidas entre recta y plano paralelos ó entre planos paralelos.—Sistema de dos rectas cortadas por tres planos paralelos..... 289

§ III.—Rectas y planos perpendiculares.

Consecuencias inmediatas de la definicion adoptada..... 290
Condiciones para que una recta sea perpendicular á un plano.. 291
Existencia de la perpendicular al plano: consecuencias..... 292
Propiedades de la perpendicular y las oblicuas.—Distancia de un punto á un plano; de una recta y un plano paralelos; de dos planos paralelos..... 295

§ IV.—Proyeccion de una recta sobre un plano.—Ángulo de una recta y un plano.—Mínima distancia entre dos rectas.

Proyeccion de una recta sobre un plano.—Proyeccion de dos rectas paralelas..... 296

Págs.

Proyecciones de dos rectas perpendiculares entre sí sobre un plano paralelo á una de ellas..... 297
Perpendicularidad de la traza de un plano y la proyeccion de una perpendicular á él.—Ángulo de una recta y un plano.... 298
Perpendicular comun á dos rectas no situadas en un mismo plano; distancia de estas dos rectas..... 299

§ V.—Ángulos diedros.

Ángulo plano correspondiente á un ángulo diedro..... 301
Medida de un ángulo diedro; ángulo diedro recto..... 303
Línea de máxima pendiente de un plano..... 304

§ VI.—Planos perpendiculares.

Propiedades relativas á un diedro recto y á la perpendicular á una de sus caras..... 305
Plano trazado por una recta dada perpendicularmente á un plano dado..... 306
Interseccion de dos planos perpendiculares á un tercero..... 307

§ VII.—Ángulos poliedros.

Convexidad de un ángulo poliedro..... 308
Ángulos poliedros simétricos..... 309
Propiedades generales de los ángulos poliedros convexos..... 311
Condiciones para que se pueda formar un triedro con tres caras dadas..... 313
Triedros suplementarios; orígen del principio de dualidad..... 314
Condiciones para que se pueda formar un triedro con tres diedros dados..... 317
Casos de igualdad de los triedros..... 318

§ VIII.—Apéndice.

Cuadrilátero alabeado cortado por un plano cualquiera y en particular por un plano paralelo á dos lados opuestos..... 320
Relacion anarmónica de cuatro planos..... 322
Proyeccion central ó perspectiva.—Punto de fuga de una recta.—Línea de fuga de un plano; concepto de la *recta en el infinito*..... 323

Pags.

LIBRO VI.

POLIEDROS.

§ I.—Propiedades generales y área lateral del prisma.

Propiedades relativas á las caras opuestas y á las diagonales del paralelepípedo..... 328
Secciones del prisma por planos paralelos.—Seccion recta..... 330
Área lateral del prisma..... 331

§ II.—Volúmen del prisma.

Teoremas preliminares relativos á la transformacion del prisma oblicuo en recto, y á la descomposicion del paralelepípedo por un plano diagonal..... 333
Volumen del paralelepípedo rectángulo..... 335
Volúmen del paralelepípedo recto y de uno cualquiera..... 337
Volúmen del prisma cualquiera.—Consecuencias..... 338

§ III.—Propiedades generales y área lateral de la pirámide.

Seccion de una pirámide por un plano paralelo á su base.—Consecuencias..... 341
Área lateral de una pirámide regular y de un tronco de pirámide regular..... 343

§ IV.—Volúmen de la pirámide.

Equivalencia de dos pirámides triangulares de bases equivalentes y de la misma altura..... 344
Volúmen de la pirámide.—Consecuencias.—Caso del tetraedro regular.—Método para valuar el volúmen de un poliedro cualquiera..... 346
Volúmen del tronco de pirámide de bases paralelas.—Fórmulas relativas al tronco de primera ó de segunda especie..... 349
Volúmen del tronco de prisma triangular.—Aplicacion al tronco de paralelepípedo..... 354
Volúmen del poliedro que tiene por bases dos polígonos cualesquiera situados en planos paralelos y limitado lateralmente por triángulos ó trapecios.—Aplicacion á los montones de piedra, volquetes, etc..... 357

Pags.

§ V.—Figuras simétricas.

Simetría con respecto á un centro, á un eje ó á un plano..... 359
Influencia de la posicion del centro ó del plano de simetría.—Manera de reducir una á otra la simetría con respecto á un centro y la simetría con respecto á un plano..... 360
Propiedades relativas á dos rectas simétricas ó á dos planos simétricos..... 362
Propiedades de los poliedros simétricos..... 363
Equivalencia de dos poliedros simétricos..... 364

§ VI.—Poliedros semejantes.

Casos de semejanza de dos pirámides triángulares..... 365
Descomposicion de dos poliedros semejantes en tetraedros semejantes..... 366
Relacion de las áreas y volúmenes de dos poliedros semejantes.. 369

§ VII.—Apéndice.

Propiedades generales de los poliedros convexos.—Teorema de Euler ($S + F = A + 2$) y sus consecuencias..... 371
Condiciones de igualdad y semejanza de dos poliedros convexos. 375
Proyeccion de una área plana..... 379
Centro de distancias proporcionales..... 381
Centro de gravedad..... 384
Área lateral y volúmen de un tronco de prisma cualquiera..... 389
Propiedades proyectivas de las figuras..... 390
Figuras homológicas.—Relaciones entre la homología y la perspectiva..... 393

LIBRO VII.

CUERPOS REDONDOS.

§ I.—Cilindro de revolucion.

Nociones preliminares.—Plano tangente.—Prisma inscrito ó circunscrito.—Cilindros semejantes..... 400
Área lateral del cilindro de revolucion.—Desarrollo..... 402
Volúmen del cilindro de revolucion..... 404

Págs.

§ II.—Cono de revolucion.

Nociones preliminares.—Plano tangente.—Pirámide inscrita ó circunscrita.—Conos semejantes..... 406
Área lateral del cono de revolucion.—Desarrollo..... 408
Área lateral del tronco de cono de bases paralelas..... 410
Volúmen del cono de revolucion..... 411
Volúmen del tronco de cono de bases paralelas.—Fórmulas para el tronco de primera especie y de segunda especie..... 412
Aplicaciones á la cubicacion de los troncos rollizos de árboles y de los toneles..... 413

§ III.—Primeras nociones sobre la esfera.

Secciones planas de la esfera.—Círculos máximos; círculos menores..... 417
Propiedades de los polos de un círculo de la esfera..... 418
Determinacion del radio de una esfera sólida..... 420
Plano tangente á la esfera.—Cono ó cilindro circunscrito..... 421
Interseccion de dos esferas..... 423
Cuatro puntos determinan una esfera..... 424

§ IV.—Propiedades de los triángulos esféricos.

Ángulo de dos arcos de círculo máximo..... 425
Primeras propiedades de los polígonos esféricos.—Polígonos esféricos simétricos..... 426
Triángulos esféricos polares ó suplementarios.—Figuras esféricas polares; dualidad..... 430
Casos de igualdad de los triángulos esféricos..... 433
Definicion de la longitud de un arco de curva alabeada.—Camino más corto entre dos puntos sobre la superficie esférica.... 435
Arcos de círculo máximo perpendiculares y oblicuos: consecuencias..... 436
Posiciones relativas de dos círculos de una misma esfera..... 438
Trazados sobre la esfera.—Construccion de los triángulos esféricos.—Círculo máximo tangente á uno menor dado, etc..... 440

§ V.—Áreas en la superficie esférica.

Área engendrada por la rotacion de una recta alrededor de un eje situado en un mismo plano con ella..... 447
Área de la zona; área de la superficie esférica..... 449

PREFACIO.

.....«Nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la Géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle.»

PASCAL.

Las ideas de extension, posicion y forma son naturales al hombre. Se atribuye á los egipcios y caldeos el primer ensayo para precisar y coordinar esas ideas.

La Geometría apareció entre los griegos, importada de Egipto por el fenicio Thales (637-548 a. a. de Jesucristo), fundador en Mileto de la escuela jónica; á él se atribuye la teoría de los triángulos semejantes. Pitágoras, de Sámos, su discípulo (580 a. a. de J. C.), fundó en Italia la célebre escuela que lleva en la historia su nombre. Se le atribuye el descubrimiento de que la diagonal y el lado del cuadrado son inconmensurables; del teorema del cuadrado de la hipotenusa; de la propiedad del círculo y la esfera de ser máximos entre las áreas de igual perímetro y los volúmenes de igual área; y finalmente, la primera teoría de los cuerpos regulares que tan importante papel desempeñaron en los delirios cosmogónicos de la anti-

güedad y de la Edad Media. Pero el grande impulso que la Geometría tomó en Grecia data, sobre todo, de la época de Platon (430-347 a. a. de J. C.). Introducir en la ciencia el método analítico, las secciones cónicas y la teoría fecundísima de los lugares geométricos, era crear una Geometría nueva; y tal fué la obra magnífica del gran filósofo que escribió á la puerta del Liceo: «Nadie entre que no sepa la Geometría.»

Reuniendo los descubrimientos de sus antecesores y los suyos propios, Euclides (285 a. a. de J. C.) preparó los de sus sucesores. Este geómetra, que estableció el lazo de union entre la escuela platónica y la escuela de Alejandría, es conocido sobre todo por sus *Elementos*, en los cuales se encuentra por primera vez el método de reduccion al absurdo. Escribió además otras obras que no han llegado hasta nosotros, y de las cuales, la más importante era sin duda el famoso *Tratado de los Porismos*, cuya adivinacion, despues de haber ejercitado en vano la sagacidad de las más ilustres inteligencias de los últimos siglos, acaba de ser tan felizmente conseguida por M. Chasles, guiado por un pasaje oscuro y algunos lemas de Pappus.

Inmediatamente despues de Euclides, Arquímedes y Apolonio llevaron al apogeo la Geometría entre los antiguos. Todas las ramas de las Matemáticas conservan trazas indelebles de sus sublimes descubrimientos.

Los trabajos de Arquímedes (287-212 a. a. de J. C.) se refieren especialmente á la Geometría de la medida. La relacion de la circunferencia al diámetro y la cuadratura de la parábola, son los primeros ejemplos de un problema resuelto por aproximacion, y de la

evaluacion exacta de un área de contorno curvilíneo. Las propiedades de las espirales; la proporcion de la esfera y el cilindro; la cubicacion de los esferoides y de los conoides, son otras tantas invenciones capitales de ese genio creador al cual la Estática debe tanto como la Geometría.

Los trabajos de Apolonio (247 a. a. de J. C.) se refieren á la Geometría de la forma. Su obra principal parece ser el gran *Tratado de las Cónicas,* que valió á su autor el título de *Geómetra por excelencia,* y en el cual se encuentran las propiedades de las asíntotas, de los focos, de los diámetros conjugados, de los normales, un teorema sobre la polar, la primera nocion de las evolutas y algunas elegantes cuestiones de máximos y mínimos. Se atribuye tambien á Apolonio la célebre teoría de los epiciclos, que servía para explicar los movimientos aparentes de los planetas.

Los sucesores de Arquímedes y Apolonio dirigieron sus estudios hácia la Astronomía y aquellas partes de la Geometría que se refieren á esta ciencia. Así, á Hiparco (150 a. a. de J. C.), el más grande astrónomo de la antigüedad, debe hacerse remontar el descubrimiento de la proyeccion estereográfica, y el de las propiedades de las transversales en los triángulos rectilíneos y esféricos, atribuido á veces á Ptolomeo (125 a. despues de J. C.), aunque se encuentran ya en las *Esféricas* de Menelao (80 a. despues de J. C.). Ptolomeo nos ha dejado en su *Almagesto,* el único tratado de Trigonometría rectilínea y esférica que conocemos de los griegos, habiéndose perdido los escritos de Hiparco sobre esta materia; el Almagesto contiene entre otros la propiedad del cuadrilátero inscrito en el círculo. Por último, entre los comentadores de las

obras de la escuela de Alejandría se encuentra un talento original y profundo, de quien Descartes era gran admirador: queremos hablar de Pappus, cuyas preciosas *Colecciones* representan con bastante exactitud el estado de las Matemáticas antiguas. Se halla en el libro de Pappus la famosa regla conocida bajo el nombre de *teorema de Guldin*, la propiedad fundamental de la relacion anarmónica, así como el gérmen de la teoría de la involucion y de la propiedad del exágono inscrito en una cónica.

La escuela de Alejandría habia perdido ya todo su esplendor cuando la conquista árabe (638 de nuestra era). En el siglo VIII, y más aún en el IX, la escuela de Bagdad vió aparecer algunos comentadores hábiles de las obras griegas escapadas á los desastres sucesivos de la biblioteca de Alejandría; pero mil años pasaron para la Europa en un estancamiento profundo, y solo á mediados del siglo XVI recibió algun impulso la Geometría, siguiendo el movimiento general de las letras, las ciencias y las artes.

Viète (1540-1603), el verdadero fundador del Álgebra, aplicó esta ciencia á algunas cuestiones de Geometría. Construyó gráficamente las ecuaciones de segundo y de tercer grado, y resolvió por primera vez el problema del círculo tangente á tres círculos dados, problema del cual los métodos modernos han dado soluciones más fáciles y elegantes. Se debe á Viète una idea nueva y fecunda sobre la transformacion del triángulo esférico; este triángulo recíproco de Viète condujo, sin duda alguna, á Snellius (1627) al descubrimiento del triángulo suplementario.

En las obras de Kepler (1571-1613) y de Fermat (1570-1633) aparecen las ideas fundamentales del mé-

todo infinitesimal. Además, al fundador de la Astronomía moderna se debe el descubrimiento de los polígonos estrellados, encontrado de nuevo en nuestros dias por Poinsot; y al célebre aritmólogo la restitucion de los *lugares planos* de Apolonio y la primera solucion completa de los problemas relativos al contacto de esferas.

Pascal (1623-1662), tan conocido por sus trabajos sobre la cicloide, sobre los indivisibles y sobre el cálculo de probabilidades, descubrió, á los diez y seis años, la propiedad del exágono místico que le sirvió de base para un Tratado completo de las cónicas. Esta obra no ha llegado hasta nosotros, y sólo tenemos una especie de programa de ella en el *Ensayo sobre las cónicas* que Pascal publicó en 1640. En las obras de Pascal se descubre la influencia de su contemporáneo el lionés Desargues (1593-1663), á quien un sabio geómetra de nuestros dias, Poncelet, ha llamado el *Monge de su siglo*. Los antiguos, que estudiaban las secciones cónicas en el cono mismo, empleaban con frecuencia demostraciones difíciles, y sobre todo diferentes para las tres curvas.

Desargues, tratando de aplicar directamente á las cónicas las propiedades del círculo base del cono, llegó á demostraciones aplicables á la vez á las tres especies de cónicas, no obstante la diferencia de forma de esas líneas. Descubrió la propiedad involutiva del cuadrilátero inscrito en una cónica, la propiedad fundamental de los triángulos homológicos; y, por último, escribió con igual talento y con el mismo espíritu de generalizacion sobre el corte de piedras, la gnomónica y la perspectiva.

Siendo nuestro objeto ocuparnos de los progresos

de la Geometría pura, aquí solamente debemos mencionar la creacion de la Geometría analítica por Descartes (1586-1650). Esta invencion felicísima, de la cual ningun gérmen aparece en los escritos de sus predecesores, causó una verdadera revolucion en la ciencia, y fué un golpe funesto para la Geometría pura. Sin embargo, algunos hombres ilustres se opusieron á esta decadencia y sostuvieron dignamente el esplendor de los antiguos métodos. Citaremos en particular á Huygens (1629-1695) y de la Hire (1640-1718). Huygens, á quien Newton proclamaba como *el más excelente imitador de los antiguos*, y á quien Leibnitz colocaba en primera línea entre los hombres ilustres de su siglo, creó la teoría de las evolutas y descubrió las leyes de la fuerza centrífuga. Á de la Hire se debe la teoría del polo y la polar, de la cual Apolonio habia conocido un solo teorema; y la transformacion homológica, que empleada despues por Newton, ha sido descubierta por otro camino en nuestros dias, y desarrollada con gran inteligencia por Poncelet en su magnífico *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras* (*), en donde se encuentran las más interesantes y variadas aplicaciones de esa teoría.

A la sazon se ofrecia, pues, la Geometría bajo tres formas á las meditaciones de los sabios: la Geometría de los antiguos, la Geometría analítica de Descartes, y la que pudiéramos llamar de Desargues y de Pascal, que habia de adquirir tan gran desarrollo en el siglo XIX, y de la cual se encuentran ya algunos principios en los *Porismos* de Euclides y las *Colecciones*

(*) Segunda edicion, 1865; 2 vol. en 4.° con láminas.—Gauthier Villars.

de Pappus. «Esta tercera rama de la Geometría, que »constituye hoy lo que llamamos *Geometría reciente*, »está exenta de cálculos algebráicos, aunque hace tan »feliz empleo de las relaciones métricas de las figuras, »como de sus relaciones de posicion, puesto que no »considera sino relaciones de distancias rectilíneas »tales, que no exigen ni los símbolos ni las operacio- »nes del Álgebra. Esta Geometría es la continuacion »del *Análisis geométrico* de los antiguos, sobre el cual »ofrece inmensas ventajas por la generalidad, la uni- »formidad y la abstraccion de sus métodos, así como »por el empleo tan útil que hace de las figuras de »tres dimensiones en simples cuestiones de Geometría »plana (*).»

El descubrimiento del cálculo infinitesimal detuvo tambien los progresos de la Geometría. Esta sublime invencion, que bastaria ella sola para inmortalizar los nombres de Newton y Leibnitz, se aplicó con tanta facilidad á la geometría de las medidas y al estudio de los fenómenos naturales, que llegó á ser casi el objeto exclusivo de los trabajos de los más ilustres geómetras. Sin embargo, la cadena no quedó enteramente rota. El mismo Newton, dando el ejemplo, hizo ver, en sus admirables *Principios de la Filosofía natural*, que la Geometría pura se presta á las investigaciones más elevadas. Cotes (1682-1746) y Maclaurin (1698-1746) estudiaron las propiedades generales de las curvas. El astrónomo Halley (1656-1742), por sus bellas traducciones de Apolonio y Menelao; Simson (1687-1768) por sus escritos sobre las cónicas, su descubrimiento de la *seccion determinada* de Apolonio y

(*) Chasles, *Ojeada histórica*, Bruselas, 1837.

su notable tentativa de adivinacion de los Porismos; Stewart (1717-1785), por sus *Teoremas generales*, trataron de reanimar el gusto de los antiguos métodos. Pero á despecho de estos loables esfuerzos, y á pesar de algunas cuestiones tratadas por Euler (1707-1783). Lambert (1728-1777) y otros célebres matemáticos, ninguna nueva doctrina apareció hasta el siglo XIX, distinguiéndose este período por notables aplicaciones de la Geometría al estudio de los fenómenos naturales.

A principios del siglo XIX la invencion de la Geometría descriptiva inició una era nueva en la historia de la Geometría. Considerada bajo su aspecto puramente geométrico, aparte su utilidad práctica, la Geometría de Monge fué un auxiliar poderoso para el estudio de las propiedades de la extension. Familiarizando el espíritu con la forma de los cuerpos, desenvolvió nuestro poder de concepcion, ayudó á la Geometría analítica, cuyos resultados enseñó á interpretar con gran facilidad, y permitió razonar, en los casos más complicados, sin el auxilio de esas figuras que absorben nuestra atencion y ponen trabas al pensamiento; hizo ver la íntima alianza de las figuras planas y las figuras del espacio, y la ciencia se enriqueció desde entónces con esos métodos elegantes, tan cultivados despues, que permiten deducir de las propiedades de las figuras de tres dimensiones los teoremas de la Geometría plana.

También á Monge y á su escuela se debe la introduccion en la ciencia de un método de demostracion que, si bien carece en el fondo de ese rigor tan justamente buscado por los antiguos geómetras, ha conducido á brillantes resultados. Queremos hablar del

principio de relaciones contingentes ó de continuidad; «Ciertas partes de una figura, consideradas en un es»tado general de construccion, pueden ser indiferen»temente reales ó imaginarias; ahora bien, sucede »muchas veces que esas partes sirven útilmente á la »demostracion de un teorema en el caso de la reali»dad; pero no sirven para la demostracion si aquellas »mismas partes son imaginarias; en tal caso, se dice »que en virtud del *principio de continuidad,* el teore»ma demostrado en el primer caso es aplicable tam»bien al segundo, y se le enuncia de una manera ge»neral. A veces tambien sucede lo contrario: la demos»tracion es fácil si los elementos de una figura son »imaginarios, y entónces, en virtud del *principio de »continuidad,* se extienden las consecuencias al caso »en que siendo reales los elementos, la demostracion »no es aplicable» (*). Tal ha sido el principio de los imaginarios en Geometría; pero debemos añadir que esta introduccion tan importante no ha sido realizada de una manera irreprochable hasta un poco más tarde por M. Chasles, cuyas demostraciones se distinguen por el carácter especial de que los elementos susceptibles de llegar á ser imaginarios, no aparecen nunca explícitamente, sino que están representados por elementos reales, de igual manera que las raíces de una ecuacion no entran por sí mismas en los cálculos de la *Geometría* analítica, hallándose representadas colectivamente por los coeficientes de esa ecuacion.

A la aparicion de la Geometría de Monge, alejáronse los límites de la Geometría pura, algo abandonada

(*) Chasles, Prefacio de la *Geometría superior*, 1846.

hacía ya un siglo, y tratóse desde entónces de obtener por su medio los numerosos resultados con que el análisis de Descartes habia enriquecido la ciencia. Entre las obras emprendidas con este objeto, y que pueden considerarse como una continuacion feliz de las de Desargues y Pascal, debemos citar en primer término la *Geometría de posicion* y el *Ensayo sobre las transversales*, de Carnot; los *Desarrollos de Geometría*, de Dupin, y el gran *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras*, en el cual Poncelet, empleando hábilmente el principio de continuidad y las teorías de las polares recíprocas y de las figuras homológicas, ha demostrado todas las propiedades de las líneas y superficies de segundo orden y ha adquirido á la ciencia una multitud de propiedades nuevas. Conviene señalar, además, los grandes trabajos de Hachette, Brianchon, Gergonne, Dandelin, Quetelet; los de Steiner y Gudermann sobre la Geometría de la esfera, que habia sido ya cultivada por Lexell, Fuss y Lhuillier; la bella *Teoría de la rotacion de los cuerpos*, de Poinsot; los estudios de este geómetra, de Cauchy y de Bertrand, sobre los poliedros; y finalmente, las curiosas investigaciones de Geometría infinitesimal de M. O. Bonnet.

Los trabajos de Chasles son el último término de los continuos progresos realizados por la Geometría en nuestro siglo. Basta citar su *Ojeada histórica*, su *Geometría superior*, su *Tratado de los Porismos*, las investigaciones sobre la *Atraccion de los elipsoides*, sobre los *conos de segundo orden*, sobre las *superficies regladas*; la Memoria sobre la *dualidad* y la *homografía*, estas dos leyes tan generales de la extension figurada; el nuevo método de determinacion de las *caracterís-*

ticas de los sistemas de cónicas, y tantas otras producciones de este eminente geómetra.

La Geometría, avanza, pues, á grandes pasos por un camino fecundo. Gracias á las conquistas de este siglo ha ganado ya el terreno que el Análisis le habia hecho perder.

Tras esta rápida excursion por el dominio de la historia, diremos dos palabras acerca de este tratado.

Un libro destinado á servir de texto puede escribirse de dos maneras: ó bien ciñéndose estrictamente á los *Programas oficiales*, sin franquear sus límites, ó bien sujetándose á esos programas en lo que tienen de obligatorio, pero tratando al mismo tiempo de completarlos. Para aplicar una ciencia no basta conocer algunas de sus partes, hay que familiarizarse con todos sus métodos, hay que hacerse dueño del conjunto. Los magníficos métodos de la Geometría moderna no han penetrado todavía en la enseñanza ni ocupan en la serie de los estudios matemáticos el lugar que les es debido; apenas están citados en la Geometría analítica, apareciendo como una nueva conquista debida al admirable instrumento descubierto por Descartes. Sin censurar esta omision de los programas, tan recargados que sería inconveniente toda adicion, creemos que pueden los alumnos *aprender* las cuestiones exigidas por un programa de exámen y tratar al mismo tiempo de *comprender* todo el alcance de la ciencia que estudian, adquiriendo una idea general de sus principales métodos. Este pensamiento nos ha guiado al componer esta obra, y se manifiesta en la diferencia de caractéres empleados para su impresion.

Los apéndices están consagrados á la exposicion de los métodos modernos. El alumno estudioso puede

leerlos sin preocuparse de retener todos los detalles; así sentirá una profunda admiracion por la ciencia, cuyos límites le parecerán tan lejanos, y un gusto por las especulaciones matemáticas que dará á su inteligencia más rectitud y firmeza. Por otra parte, á medida que sus conocimientos sean más extensos, por una reaccion inevitable, las materias exigidas aparecerán á sus ojos con mayor claridad y perderán su dificultad primitiva.

TRATADO

DE

GEOMETRÍA ELEMENTAL.

INTRODUCCION.

1. Se llama *volúmen* de un cuerpo la extension del lugar que este cuerpo ocupa en el *espacio* indefinido. Ese lugar, esencialmente limitado, está separado del espacio que le rodea por la *superficie* del cuerpo.

Las diferentes caras de un cuerpo son otras tantas superficies, cuyos límites ó mutuas intersecciones se llaman *líneas*.

Se da, por último, el nombre de *puntos* á los límites ó extremidades de las líneas; en otros términos, á las intersecciones de las líneas.

Una vez adquiridas por la consideracion de los cuerpos estas ideas de *superficie*, *línea* y *punto*, pueden ser abstraidas y concebirse independientemente del cuerpo, de las superficies y de las líneas de que son límites. Así, procediendo inversamente, puede considerarse la línea como el lugar de las posiciones sucesivas de un punto; la superficie como lugar de las posiciones sucesivas de una línea, y el volúmen como lugar de las posiciones de una superficie, cuando el punto, la línea ó la superficie se mueven segun una ley determinada y continua.

2. La más sencilla de todas las líneas es la *línea recta*, cuya nocion es conocida de todos y de lo cual puede formarse imágen por un hilo extendido.

La línea recta es el camino más corto entre dos cualesquiera de sus puntos.

Dos puntos determinan una recta. En otros términos: por dos puntos puede siempre pasar una recta, y no puede pasar más que una. De aquí se sigue que *dos rectas que tienen dos puntos comunes coinciden, no solamente entre esos dos puntos, sino tambien en toda su extension*, y, por tanto, que *dos rectas diferentes no pueden tener más de un punto comun.*

Estas propiedades fundamentales de la línea recta son intuitivas, y las consideraciones con que podria intentarse justificarlas no harian más que oscurecer la claridad con que por sí mismas se presentan.

3. En Geometría se indica un punto por una letra, una recta por dos letras, que indican dos de sus puntos. Así, se dice el punto A, la recta AB *(fig. 1)*.

Dos porciones AB y CD, tomadas respectivamente sobre dos rectas *indefinidas*, tienen la misma *longitud* cuando son superponibles. Si, transportada la recta CD de manera que el punto C caiga en A, se puede conseguir, haciendo girar la recta CD alrededor del punto A, que el punto D caiga en B, se dirá, por consiguiente, que la porcion CD tiene igual longitud que la porcion AB.

Para *sumar* dos porciones de rectas, AB y CD, se lleva la porcion CD á continuacion de AB, sobre la recta indefinida de que AB forma parte; BE, siendo la nueva posicion de CD *(fig. 1)*, se dice que AE tiene una longitud igual á la suma de las longitudes de AB y CD.

Si se tuviese una tercera recta para añadirla á las dos primeras, se la llevaria á continuacion de AE, y así sucesivamente.

4. Se llama *línea quebrada (ó poligonal)* la línea que está formada por varias porciones de rectas distintas; tal es la línea ABCD *(fig. 2)*.

Se admite la denominacion comun de *líneas curvas* para todas las que no son rectas ni quebradas.

5. La más sencilla de todas las superficies es el *plano*, del cual puede formarse imágen por un cristal pulimentado. La definicion geométrica del plano consiste en que, cualquiera recta que une dos puntos de esa superficie, está toda entera contenida en ella. Por esto, para comprobar por ejemplo, que una mesa es plana, se aplica sobre ella una regla *en todos sentidos:* si la regla está bien construida y la mesa es sensiblemente plana, no debe quedar espacio vacío entre la mesa y el canto de la regla.

Una superficie formada por varias porciones de planos distintos se llama *quebrada (poliedral)*, y se da la denominacion comun de *superficies curvas* á todas las que no son planas ni quebradas.

6. Se designa bajo el nombre genérico de *figuras* á las superficies y á las líneas, ó al conjunto de varios de estos elementos.

La Geometría tiene por objeto el estudio de las propiedades de las figuras, y en particular la medida de su extension. Con su auxilio se reduce la medida de un volúmen ó una porcion de superficie á la medida directa de ciertas líneas rectas, convenientemente elegidas en cada caso.

Se divide la Geometría en dos partes: *Geometría plana*, que se refiere á las figuras situadas en un plano único, y *Geometría en el espacio*, que se refiere á las figuras cuyos elementos pueden estar situados de una manera cualquiera en el espacio.

7. Terminaremos esta Introduccion definiendo algunas palabras que son de uso frecuente en las Matemáticas.

Toda proposicion consiste en una *hipótesis* y una *consecuencia*, que se deriva de aquella, sea inmediatamente, sea por una serie de razonamientos que se llama *demostracion*.

Un *axioma* es una proposicion evidente por sí misma.

Un *teorema* es una proposicion que requiere ser demostrada.

Fig. 1.

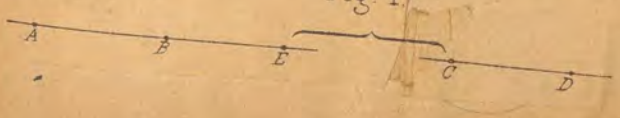


Fig. 2.

Un *lema* es una proposicion preliminar que sirve para facilitar la demostracion de un teorema.

Un *corolario* es una consecuencia de un teorema.

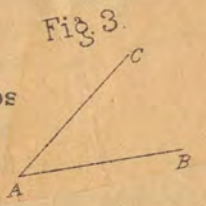
Un *escolio* es una observacion relativa á una ó varias proposiciones.

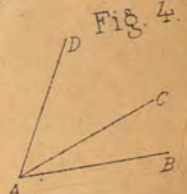
Un *problema* es una cuestion por resolver, ó una figura que construir, ó una magnitud geométrica que valuar.

GEOMETRÍA PLANA.

LIBRO PRIMERO.

LA LÍNEA RECTA.





§ I.—De los ángulos

DEFINICIONES.

8. Se expresa una idea clara para todas las inteligencias cuando se dice que dos rectas, AB y AC, que se cortan, forman un *ángulo;* esta es una nocion fundamental que, como la de línea recta, no podria ser *definida;* es decir, que no podria reducirse á otra más sencilla.

Las dos rectas AB y AC son los *lados* del ángulo, y su punto de interseccion A es su *vértice.* Un ángulo aislado se designa por la letra puesta en el vértice; pero si varios ángulos tienen el mismo vértice, se designa cada uno de ellos por medio de tres letras, á saber: dos, que se colocan respectivamente en los dos lados, y una en el vértice; esta última se pone en medio al enunciar el ángulo. En el caso de la *fig. 3,* diremos el ángulo A; en la *fig. 4,* tenemos los tres ángulos BAC, CAD, BAD.

Dos ángulos tales como BAC y CAD, que tienen el mismo vértice A, un lado comun AC, y los otros dos AB y AD situados á una y otra parte del lado comun, se llaman *adyacentes.*

9. Se dice que dos ángulos son *iguales* cuando es posible

llevar uno de ellos sobre el otro de manera que coincidan. Así, colocado el lado A′B′ *(fig. 5)* sobre AB, de manera que A′ caiga en A, y el lado A′C′ esté, como AC, por encima de AB, para que los ángulos A y A′ sean iguales, es necesario que A′C′ se confunda con AC.

Para *sumar* dos ángulos, BAC, FEG, se coloca el segundo á continuacion del primero *(fig. 6)*, de manera que queden adyacentes BAC, CAD; entonces el ángulo BAD, formado por los dos lados no comunes AB y AD, es la *suma* de los ángulos propuestos.

10. Se adquiere una idea clara del ángulo como magnitud suponiendo que uno de los dos lados AC coincide primero con el otro AB y se separa despues, girando alrededor del punto A de igual modo que una pierna de compás gira alrededor del eje. En esta rotacion, el lado móvil AC forma con el lado fijo AB un ángulo que crece de una *manera continua*. De aquí y de las definiciones del número precedente, podemos deducir que la magnitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados.

11. Se dice que una recta AO es perpendicular á otra BC *(fig. 7)* cuando los dos ángulos adyacentes AOB, AOC, que la primera forma con la segunda, son *iguales*. Si la recta AO es tal *(fig. 8)* que los ángulos adyacentes AOB, AOC son *desiguales*, se dice que la primera es *oblicua* á la segunda. El punto O es el *pié* de la perpendicular ó de la oblicua AO sobre la recta BC.

Se llama *ángulo recto* el ángulo AOB *(fig. 9)*, que tiene un lado perpendicular al otro.

12. Cuando los lados de un ángulo son las prolongaciones de los lados de otro, se dice que los ángulos son *opuestos por el vértice*. En la *fig. 10*, las dos rectas indefinidas BB′ y CC′ forman, al cortarse en A, cuatro ángulos: BAC y B′AC′ CAB′ y C′AB, que son opuestos por el vértice.

Fig. 7.

Fig. 8

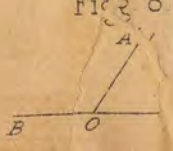
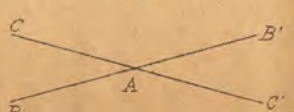


Fig. 9.

Fig. 10.



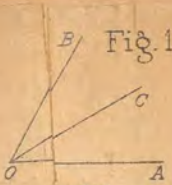


Fig. 11

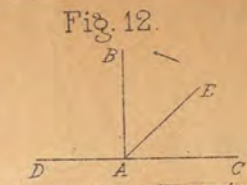


Fig. 12.

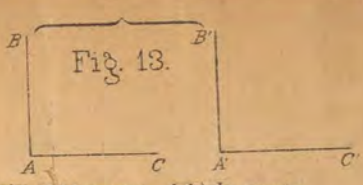


Fig. 13.

13. Se llama *bisectriz* de un ángulo AOB *(pg. 11)* la recta OC que, pasando por el vértice, divide al ángulo en otros dos AOC, COB, iguales entre sí.

TEOREMA.

14. *Por un punto* A, *tomado sobre una recta* DC, *se puede siempre levantar una perpendicular* AB *á dicha recta, y no se puede levantar más que una (fig. 12).*

En efecto, supongamos que una recta AE (que coincide primero con AC) empieza á girar alrededor del punto A, en el sentido que indica la flecha. El ángulo EAC, nulo al empezar ese movimiento, crecerá de una manera continua, miéntras que su adyacente EAD irá decreciendo sin cesar, y acabará por anularse cuando la recta AE llegue á confundirse con AD. Luego el ángulo EAC, que empieza siendo desde luego inferior al ángulo EAD, diferirá cada vez menos de él; y como el crecimiento de aquél y el decrecimiento de éste se verifican de una manera continua, llegará á serle igual y á excederle despues más y más. Se ve por este medio que entre las posiciones sucesivas de AE habrá una, y solo una AB, en que los ángulos adyacentes BAC y BAD serán iguales; es decir, en que AB será perpendicular á DC.

COROLARIO.

15. *Todos los ángulos rectos son iguales.*

Sean *(fig. 13)* los dos ángulos BAC, B'A'C', que han sido formados, el primero, levantando la perpendicular AB sobre AC; el segundo, levantando la perpendicular A'B' sobre A'C'; estos dos ángulos son rectos, y queremos demostrar que son iguales. Transportemos la segunda figura sobre la primera, de modo que el punto A' caiga en A y el lado A'C' sobre AC; el lado A'B' será entonces perpendicular sobre AC en el punto A; tendrá, por tanto, que confundirse con AB, porque no puede levantarse por el punto A más que una sola perpendicular á AC. Luego los dos ángulos BAC, B'A'C' coincidirán; es decir **(9)**, serán iguales.

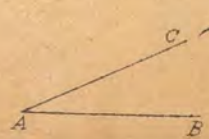


Fig. 5

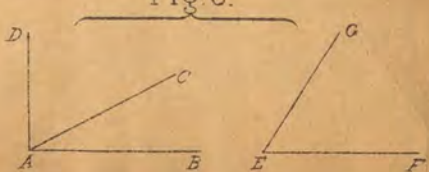


Fig. 6.

Escolio.

16. El ángulo recto es, pues, un tipo invariable al cual pueden referirse los demás ángulos.

Se dice que un ángulo es *agudo* ú *obtuso*, segun que es *menor* ó *mayor* que un ángulo recto. En la *fig. 12*, el ángulo EAC es agudo y el ángulo EAD obtuso.

Dos ángulos se llaman *complementarios* cuando su suma es igual á un ángulo recto. Así, cada uno de los ángulos BAE, EAC, de la *fig. 12*, es el *complemento* del otro. Dos ángulos que tienen complementos iguales, son iguales.

TEOREMA.

17. *Toda línea recta* CD *qué encuentra á otra* AB, *forma con esta dos ángulos adyacentes*, ACD, BCD, *cuya suma es igual á dos ángulos rectos (fig. 14).*

En efecto, si CD es perpendicular sobre AB, el teorema es evidente, puesto que los ángulos adyacentes ACD y BCD son ambos rectos.

Si CD es oblicua sobre AB, los dos ángulos ACD y BCD son desiguales; sea ACD el mayor. La perpendicular CE, levantada en el punto C á AB, caerá en el interior de ese ángulo y lo descompondrá en otros dos ACE y ECD. Se tendrá, por consiguiente:

$$ACD + BCD = ACE + ECD + BCD.$$

Ahora bien, el ángulo ACE es recto, y la suma ECD + BCD es igual al ángulo recto BCE. Luego

$$ACD + BCD = 2 \text{ ángulos rectos.}$$

18. Dos ángulos se llaman *suplementarios* cuando su suma es igual á dos ángulos rectos. En la *fig. 14*, cada uno de los ángulos adyacentes ACD, BCD es el *suplemento* del otro. Dos ángulos que tienen suplementos iguales, son iguales. Para tener el suplemento DCB de un ángulo ACD, basta prolongar uno de los lados AC más allá del vértice.

Fig. 14.

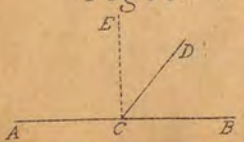
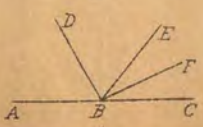


Fig. 15.



19. Llámase *recíproca* de una proposicion otra proposicion cuya hipótesis y consecuencia son la consecuencia y la hipótesis de la primera. Tomemos por ejemplo el teorema anterior.

Se le puede enunciar del modo siguiente: *Si dos ángulos adyacentes* ACD, BCD, *tienen sus lados exteriores* AC *y* BC *en línea recta, estos ángulos son suplementarios.* La recíproca será: *Si dos ángulos adyacentes,* ACD, BCD, *son suplementarios, sus lados exteriores* AC *y* BC *están en línea recta.*

Para demostrar esta proposicion basta observar que la prolongacion de AC debe formar con CD (**18**) un ángulo igual al suplemento de ACD; es decir, según la hipótesis, igual á BCD; la prolongacion de AC es, pues, la misma recta BC.

Se expresa la *proposicion contraria* de otra proposicion conocida adoptando á la vez una hipótesis y una conclusion contrarias á las de la proposicion primitiva. Tomemos aun el teorema anterior como ejemplo. Su proposicion contraria será: *Si dos ángulos adyacentes no tienen sus lados exteriores en línea recta, esos dos ángulos no son suplementarios.* En efecto, si lo fuesen, sus lados exteriores deberian estar en línea recta en virtud de la proposicion recíproca.

Se ve que si la proposicion directa y su recíproca son verdaderas, las contrarias tienen que serlo igualmente; así tambien la proposicion directa y su contraria, cuando son verdaderas, entrañan la verdad de sus recíprocas.

COROLARIO.

20. *La suma de todos los ángulos consecutivos* ABD, DBE, EBF, FBC, *que pueden formarse alrededor de un punto* B *de la recta* AC, *pero solo de un lado de esta recta, es igual á dos ángulos rectos (fig. 15);* porque esa suma es evidentemente igual á la de los dos ángulos adyacentes ABF, FBC.

21. *La suma de todos los ángulos consecutivos* AOB, BOC, COD, DOE, EOA, *que pueden formarse alrededor de un mismo punto* A, *es igual á cuatro ángulos rectos (fig. 16);* porque si prolongamos OC, por ejemplo, segun OC', se ve que

dicha suma equivale á la de los ángulos C'OA, AOB, BOC, situados de un mismo lado de CC', más la de los ángulos COD, DOE, EOC', situados del otro lado; y se acaba de demostrar que cada una de esas dos sumas parciales es igual á dos ángulos rectos.

TEOREMA.

22. *Cuando dos líneas rectas* AB, DE *se cortan, los ángulos opuestos por el vértice son iguales (fig. 17.)*

Sean los dos ángulos opuestos por el vértice AOE, DOB. El primero, AOE, tiene por suplemento el ángulo AOD, formado por el lado AO y la prolongación OD del lado OE. El segundo, BOD, tiene tambien por suplemento el ángulo AOD, que puede considerarse como formado por el lado OD y la prolongacion OA del lado BO. Los dos ángulos AOE, DOB, puesto que tienen el mismo suplemento, son iguales.

De la misma manera se demostraria la igualdad de los ángulos AOD y BOE.

COROLARIOS.

23. *Cuando uno de los cuatro ángulos formados por dos rectas indefinidas* AB *y* CD, *que se cortan, es recto, los otros tres son tambien rectos (fig. 18);* porque de ser el ángulo AOC, por ejemplo, recto, resulta que su opuesto DOB lo es tambien, y que lo son sus suplementos AOD y COB.

De aquí se deduce que:

Cuando una recta AO *es perpendicular á otra* CD, *su prolongacion* OB *es tambien perpendicular á la misma recta* CD.

Si una recta AB *es perpendicular á otra* CD, *esta última es á su vez perpendicular a aquella.*

24. *Las bisectrices* OE, OF *de dos ángulos adyacentes y suplementarios* AOC, AOD, *son perpendiculares una á otra (fig. 19).* porque la suma de los ángulos AOD, AOC, siendo

Fig. 16

Fig. 17.

Fig. -

Fig 19.

igual á dos rectos, la de sus mitades AOE, AOF, es igual á un ángulo recto (*).

Las bisectrices OF *y* OF′ *de dos ángulos opuestos por el vértice* AOD *y* BOC, *están en prolongacion una de otra*, porque cada una de ellas debe ser perpendicular en el punto O á la bisectriz OE del ángulo AOC, que es adyacente y suplementario con respecto á cada uno de los ángulos considerados AOD, BOC.

De lo dicho resulta que *las bisectrices de los cuatro ángulos formados por dos rectas que se cortan,* AB *y* CD *son dos rectas indefinidas,* EE′ *y* FF′, *que se cortan en ángulo recto y en el mismo punto que aquellas.*

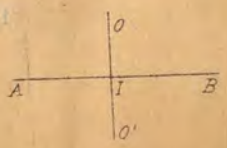
TEOREMA.

25. *Por un punto* O, *tomado fuera de una línea recta* AB, *se puede siempre bajar una perpendicular sobre esta recta, y no se puede bajar más que una (fig. 20).*

Designemos por O′ el punto en donde vendria á colocarse el punto O si dobláramos la figura por la recta AB, de manera de rebatir la parte superior sobre la inferior. Unamos con los puntos O y O′ un punto cualquiera I de la recta dada. Los ángulos adyacentes OIB, O′IB serán iguales, porque al doblar nuevamente la figura por la recta AB, O se colocaria sobre O′, é I permaneceria fijo, y el primer ángulo se superpondria exactamente sobre el segundo. Segun esto, para que la recta OI sea perpendicular á AB, es decir, para que el ángulo OIB sea recto, es necesario y basta que la suma de los dos ángulos adyacentes iguales OIB, O′IB sea igual á dos ángulos rectos, y, por consiguiente, que sus lados exteriores IO, IO′, estén en prolongacion. Luego, como entre los puntos O y O′ existe siempre una recta y una sola, se ve que desde el punto O se puede bajar siempre una perpendicular sobre AB, y no más que una.

(*) NOTA 1.ª

Fig. 20.



§ II.—Triángulos.

DEFINICIONES.

26. Se llama *triángulo* la porcion de plano comprendida entre tres rectas que se cortan dos á dos. La parte de cada recta comprendida entre los puntos en que corta á las otras dos, se llama *lado* del triángulo. Así, la figura ABC *(fig. 21)* es un triángulo, cuyos lados son AB, BC, CA. Cada uno de los ángulos formados por dos lados consecutivos, es un *ángulo* del triángulo; los vértices de estos ángulos son los *vértices* del triángulo.

Se dice que dos triángulos son iguales cuando se puede colocar uno de ellos sobre el otro de manera que coincidan.

27. Un triángulo es *isósceles* cuando tiene dos lados iguales: tal es el triángulo ABC *(fig. 22)*, en el cual AB y AC son iguales. El tercer lado BC recibe especialmente el nombre de *base* del triángulo isósceles, y el vértice A, opuesto á la base, el de *vértice* del triángulo isósceles.

Un triángulo es *equilátero* cuando sus tres lados son iguales entre sí.

Se llama, en fin, triángulo *rectángulo* al que tiene un ángulo recto. El lado BC *(fig. 23)*, opuesto al ángulo recto, recibe el nombre de *hipotenusa*, y los lados AB, y AC que forman el ángulo recto, el de *catetos*.

28. *En todo triángulo* ABC, *un lado cualquiera*, BC, *es menor que la suma de los otros dos*, AB *y* AC *(fig. 21)*.

Porque la línea recta BC, siendo el camino más corto entre los puntos B y C, es menor que la quebrada BA + AC.

29. *En todo triángulo* ABC, *un lado cualquiera* BC *es mayor que la diferencia de los otros dos* AB *y* AC. En efecto, sea AC el mayor de los dos lados AB y AC, segun el número anterior, se tendrá:

$$BC + AB > AC;$$

y restando AB de los dos miembros,

$$BC > AC - AB.$$

30. *Tres rectas de longitud arbitraria no pueden siempre formar un triángulo.* Sería necesario que cada una de ellas fuese menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia, ó más breve: que la mayor de ellas fuese menor que la suma de las otras dos. Por ejemplo: no hay triángulo cuyos lados puedan tener respectivamente 7 metros, 2 metros y 1 metro de longitud.

TEOREMA.

31. *Si dos triángulos,* OBC, ABC, *que tienen un lado común,* BC, *están de modo que el uno comprende al otro, la suma de los dos lados* OB *y* OC *del triángulo envuelto es menor que la suma de los dos lados* AB *y* AC *del triángulo envolvente (fig. 24).*

En efecto, prolonguemos BO hasta su punto D de intersección con el lado AC. Reemplazando la línea recta OC por la línea quebrada OD + DC, se cambia la suma OB + OC en otra mayor:

$$OB + OD + DC \text{ ó } BD + DC.$$

De igual manera, sustituyendo la recta BD por la quebrada AB + AD, se cambia la suma BD + DC en otra:

$$AB + AD + DC \text{ ó } AB + AC,$$

que es aún mayor. Luego

$$OB + OC < AB + AC.$$

ESCOLIO.

32. *Cuando dos triángulos,* O'BC, ABC, *que tienen un lado comun* BC, *y otro lado* O'B *del primero que corta al* AC *del*

Fig. 21.

Fig. 22.

Fig. 23.

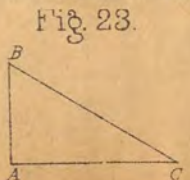
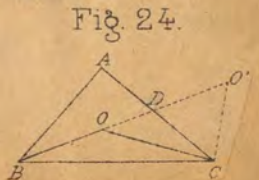


Fig. 24.



segundo, la suma de los dos lados AB *y* O'C, *que no se cortan, es menor que la suma de los dos que se cortan,* O'B *y* AC *(fig. 24).*

En efecto, en el triángulo ABD se tiene

$$AB < AD + DB,$$

y en el triángulo O'CD

$$O'C < DC + O'D.$$

Sumando estas dos desigualdades miembro á miembro, resulta

$$AB + O'C < AD + DC + O'D + DB$$

ó

$$AB + O'C < AC + O'B.$$

TEOREMA.

33. *Si dos lados de un triángulo son respectivamente iguales á dos lados de otro, y si el ángulo comprendido entre los dos primeros es mayor que el comprendido entre los del segundo triángulo, el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo (figuras 25, 26 y 27).*

Sean los dos triángulos ABC, A'B'C', en los cuales se tiene AB = A'B', AC = A'C', y el ángulo BAC mayor que el ángulo A': el lado BC digo que es mayor que el lado B'C'.

En efecto, coloquemos el triángulo A'B'C' en la posicion ABD, de manera que A'B' coincida con su igual AB, y que el lado A'C', que forma con A'B' un ángulo A' menor que BAC, caiga sobre AD en el interior del ángulo BAC. La recta BD, siendo la posicion del lado B'C' transportado, basta demostrar que BC es mayor que BD.

Pueden presentarse tres casos, segun que el punto D caiga sobre la recta BC *(fig. 25)*, en el interior del triángulo ABC *(fig. 26)* ó fuera del triángulo *(fig. 27)*.

En el primer caso *(fig. 25)*, el teorema es evidente, porque BD es una parte de BC.

Fig. 25.

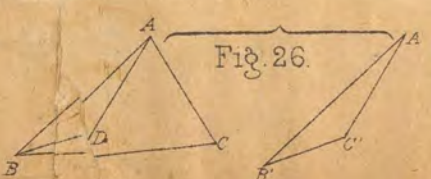


Fig. 26.

En el segundo *(fig. 26)* se tiene (**31**)

$$AC + BC > AD + BD;$$

ó quitando en el primer miembro AC y en el segundo su igual AD,

$$BC > BD.$$

En el tercer caso *(fig. 27)* se tiene (**32**)

$$AD + BC > AC + BD,$$

y suprimiendo en un miembro AD y en el otro su igual AC,

$$BC > BD.$$

TEOREMA.

34. *Dos triángulos son iguales:*

1.° *Cuando un lado y los dos ángulos adyacentes del primero son respectivamente iguales á un lado y los dos ángulos adyacentes del segundo;*

2.° *Cuando un ángulo y los dos lados que lo comprenden en uno de los triángulos son iguales á un ángulo, y los lados que lo comprenden en el otro;*

3.° *Cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.*

En efecto:

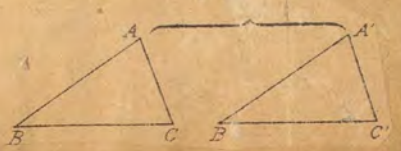
1.° Sean los dos triángulos ABC, A′ B′ C′ *(fig. 28)* tales que

$$BC = B'C',\ B = B',\ C = C'.$$

Coloquemos el triángulo A′ B′ C′ sobre el ABC, de manera que el lado B′ C′ coincida con su igual BC, B′ situándose en B y C′ en C. Puesto que el ángulo B′ es igual al ángulo B, y los dos triángulos se suponen, después de la traslacion, situados del mismo lado de BC. la recta B′ A′ tomará la direccion BA, y el punto A′ se colocará en la recta indefinida BA. De igual manera, puesto que el ángulo C′ es igual á C, el lado C′ A′ coincidirá con CA, y el punto A′ tendrá que situarse en la recta indefinida CA. Luego ese punto A′, teniendo que hallar-

Fig. 27.

Fig. 28.



se á la vez en las dos rectas BA y CA, caerá necesariamente en su punto de intersección A. Los dos triángulos habrán coincidido.

2.° Sean *(fig. 28)* los dos triángulos ABC, A′B′C′ tales que se tenga

$$A = A', A'B' = AB, AC = A'C'.$$

Coloquemos el triángulo A′B′C′ sobre el ABC de manera que el ángulo A′ coincida con su igual A, el lado A′B′ cayendo sobre AB y el lado A′C′ sobre AC. Estos lados, que tienen igual longitud, que siguen la misma direccion y que tienen un extremo comun, deben terminar en el mismo punto; es decir, que el punto B′ debe caer sobre el punto B, y el C′ sobre C. Los dos triángulos coincidirán, por consiguiente.

3.° Sean *(fig. 28)* los dos triángulos ABC, A′B′C′ tales que

$$AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'.$$

El ángulo A del primer triángulo comprendido entre los lados AB y AC, debe ser igual al ángulo A′ del segundo, comprendido entre los lados A′B′ y A′C′, respectivamente iguales á AB y AC; porque, segun el núm. **33**, si estos ángulos diñriesen, los lados BC y B′C′, que les son opuestos, serían desiguales en contra del supuesto.

Los dos triángulos propuestos deberán ser, por consiguiente, iguales, puesto que tienen un ángulo igual comprendido entre lados iguales.

Escollo.

35. Dos triángulos iguales, ABC, A′B′C′, satisfacen á seis condiciones, á saber:

$$AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'; C = C', B = B', A = A'.$$

Cada caso de igualdad contiene tres condiciones de las anteriores, pero elegidas de tal manera que, cuando están satisfechas, se verifican las seis. Cuando hayamos, pues, reconocido la igualdad de dos triángulos por hallarse comprendidos en uno de los tres casos citados, podemos legítimamente deducir

la igualdad de los tres elementos no empleados, y así tendremos nuevos datos que podrán á su vez servir de base para nuevas investigaciones. Es esencial observar que, en dos triángulos iguales, los lados iguales se oponen á ángulos iguales.

TEOREMA.

36. En todo triángulo se verifica que:

1.° *Si dos ángulos son iguales, los lados opuestos tambien lo son y el triángulo es isósceles;*

2.° *Si dos ángulos son desiguales, el lado opuesto al mayor de esos ángulos es mayor que el lado opuesto al otro ángulo.*

En efecto:

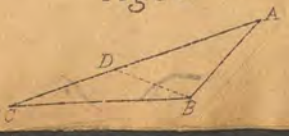
1.° Sea *(fig. 29)* ABC un triángulo cuyos ángulos B y C son iguales entre sí. Consideremos un segundo triángulo A'B'C', reproducción exacta del primero, y pongámoslo despues invertido sobre el ABC, de modo que B' caiga en C y C' en B. El lado C'B' coincidirá con su igual BC. El ángulo C', siendo igual al ángulo C, y por consiguiente al B, si se hace que los dos triángulos queden á un mismo lado de la recta BC, el lado C'A' tomará la direccion BA y el punto A' caerá sobre la recta indefinida BA. De igual modo, por ser el ángulo B' igual al B, y por consiguiente al C, el lado B'A' tomará la direccion CA y el punto A' caerá sobre la recta indefinida CA. Teniendo, pues, que hallarse á la vez en las rectas BA y CA, el punto A' caerá en su interseccion A, y los dos triángulos ABC, A'B'C' coincidirán. Puesto que el lado A'B', que es igual á AB, se superpone exactamente sobre el lado AC, podemos concluir que AB y AC son iguales.

2.° Sea *(fig. 30)* el triángulo ABC, en el cual el ángulo ABC es mayor que el ángulo C. Se podrá trazar en el interior del ángulo ABC una recta BD que forme con BC un ángulo DBC igual al ángulo C. El triángulo BDC, por tener dos ángulos, DBC y DCB iguales, será isósceles y se tendrá BD=DC. En el triángulo ABD se tiene:

$$AB < AD + BD,$$

Fig. 29.

Fig. 30.



ó bien, sustituyendo BD por su igual DC,

$$AB < AD + DC,$$

es decir:

$$AB < AC.$$

37. RECÍPROCAMENTE, *si un triángulo tiene dos lados iguales, en otros términos, si es isósceles, los ángulos opuestos á los lados iguales son iguales; y si un triángulo tiene dos lados desiguales, al mayor lado se opone mayor ángulo.*

En efecto, sean a y b dos lados de un triángulo, A y B los ángulos opuestos. El teorema precedente demuestra que á las tres hipótesis

$$A < B,\ A = B,\ A > B,$$

que son las únicas posibles, corresponden respectivamente las consecuencias necesarias

$$a < b,\ a = b,\ a > b.$$

Luego si $a = b$, A es forzosamente igual á B; porque de ser A menor ó mayor que B, resultaria del teorema directo a menor ó mayor que b; de igual manera, si a es mayor que b, A tiene que ser mayor que B; y si a es menor que b, A tiene que ser menor que B.

ESCOLIO.

38. La demostracion del núm. **36** (1.°) pone en evidencia la propiedad de que goza todo triángulo isósceles de ser superponible sobre sí mismo *por inversion*. Esta propiedad característica explica fácilmente todas las demás propiedades de que goza el triángulo isósceles.

Así *(fig. 31)*, puesto que en esta inversion del triángulo isósceles BAC, B viene á colocarse en C, y C en B, el punto medio I de BC vuelve á caer sobre sí mismo, igualmente que el vértice A. Por consecuencia, el ángulo AIC queda superpuesto sobre su adyacente y suplementario AIB, y el ángulo CAI sobre su adyacente BAI.

Fig. 31.

Luego: *En todo triángulo isósceles* BAC, *la recta que une el vértice* A *con el punto medio* I *de la base* BC *es perpendicular sobre esta base y divide al ángulo en el vértice en dos partes iguales.* De la igualdad de los triángulos ABI, ACI, que tienen sus tres lados respectivamente iguales, podrian haberse sacado las mismas consecuencias.

La recta AI satisface, pues, á las cuatro condiciones siguientes: pasa por el vértice A; por el punto medio I de la base BC; es perpendicular á esta base, y es bisectriz del ángulo en el vértice.

Ahora bien, como dos de estas cuatro condiciones bastan para determinar la recta AI, porque se sabe que por dos puntos no puede pasar más que una recta, que un ángulo no tiene más que una bisectriz y que desde un punto no puede bajarse más que una perpendicular á una recta, dedúcese que toda línea recta que satisfaga á dos de las cuatro condiciones indicadas satisface necesariamente á las otras dos.

39. *Todo triángulo que tiene sus tres ángulos iguales es equilátero, y recíprocamente, todo triángulo equilátero tiene sus tres ángulos iguales.*

40. El método de demostracion que hemos empleado en el núm. **37** es de uso muy frecuente en Geometría, y conviene desde ahora establecerlo como regla general.

Cuando en una proposicion ó en una serie de proposiciones se han hecho todas las hipótesis admisibles, y cada una de estas hipótesis ha conducido á conclusiones distintas y que mutuamente se excluyen, las recíprocas de las proposiciones establecidas son verdaderas.

Comparando los teoremas demostrados en los números **33** y **34**, y haciendo aplicacion del principio anterior, vemos que *si dos triángulos* ABC, A′B′C′ *tienen dos lados respectivamente iguales, á saber:* AB = A′B′ *y* AC = A′C′, *el tercer lado* BC *del primer triángulo es menor, igual ó mayor que el tercer lado* B C *del segundo, segun que el ángulo opuesto* A *del primer*

triángulo es menor, igual ó mayor que el ángulo opuesto A′ *del segundo triángulo.* Luego, recíprocamente: *si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, el ángulo que estos lados comprenden en el primer triángulo es menor, igual ó mayor que el ángulo comprendido entre los dos lados correspondientes del segundo triángulo, segun que el tercer lado del primer triángulo es menor, igual ó mayor que el tercer lado del segundo.*

§ III.—Perpendiculares y oblicuas.

TEOREMA.

41. *Si desde un punto* O *tomado fuera de una recta* AB *se traza la perpendicular* OI *á dicha recta, y varias oblicuas* OC, OD, OE *(fig. 32).*

1.° *Dos oblicuas* OC *y* OE, *cuyos piés* E *y* C *están igualmente distantes del pié* I *de la perpendicular, son iguales.*

2.° *La perpendicular* OI *es más corta que cualquiera de las oblicuas* OC, *y de dos oblicuas* OC *y* OE, *ó bien* OE *y* OD, *aquella cuyo pié dista más del pié de la perpendicular es la mayor.*

En efecto:

1.° Los dos triángulos OIC, OIE son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre lados respectivamente iguales á saber: el ángulo recto OIC, igual al ángulo recto OIE; el lado OI comun, y el lado IC igual á IE por hipótesis; luego

$$OC = OE.$$

2.° Prolonguemos la perpendicular OI una longitud $IO' = OI$, y tracemos las rectas O′C, O′D.

Las magnitudes OC y O′C son iguales (1.°) como oblicuas que se apartan igualmente del pié de la perpendicular CI trazada desde C sobre OO′, por la misma razón $OD = O'D$. Ahora bien, el triángulo ODO′ da (**28,31**)

$$OO' < OC + O'C < OD + O'D,$$

y tomando las mitades,

Fig. 32

$$OI < OC < OD.$$

Si las dos oblicuas OD y OE estuviesen situadas á distinto lado de la perpendicular OI, se empezaria por tomar sobre IA una longitud IC igual á IE; las oblicuas OC y OE serian entonces iguales, por apartarse igualmente del pié de la perpendicular (1.°). Además, si IE es menor que ID, IC lo será tambien; y en virtud de lo ya demostrado, la oblicua OC será menor que la oblicua OD. Se tendrá, pues,

$$OE < OD.$$

Corolarios.

42. *La perpendicular* OI, *bajada desde un punto* O, *sobre una recta* AB, *es la línea más corta que puede trazarse desde el punto á la recta;* su longitud se llama *distancia* del punto O á la recta AB.

43. La perpendicular OI, siendo más corta que toda oblicua OC, síguese del núm. **37** que el ángulo OCI es menor que el ángulo recto OIC. Luego *cuando dos rectas* AB *y* OC *se cortan, la perpendicular* OI, *bajada desde un punto de una de ellas á la otra, está situada en el interior del ángulo agudo* OCB *que forman las dos rectas.*

Se puede concluir de aquí que, en todo triángulo rectángulo, los dos ángulos que no son el ángulo recto son agudos.

Escolios.

44. La exactitud de las recíprocas de las proposiciones anteriores, resulta inmediatamente del principio general enunciado en el núm. **40.**

1.° *Si una recta es la más corta distancia de un punto á otra recta, las dos rectas consideradas son perpendiculares entre sí.*

2.° *Si dos oblicuas á una recta parten de un mismo punto y son iguales entre sí, dichas oblicuas se apartan igualmente del pié de la perpendicular bajada desde el punto á la recta.*

3.° *Si dos oblicuas á una recta parten de un mismo punto y*

son desiguales, la mayor se aleja más del pié de la perpendicular bajada desde el punto sobre la recta.

45. Desde un punto no pueden trazarse á una recta más que *dos* oblicuas iguales, y estas dos oblicuas se hallan á distinto lado de la perpendicular bajada desde el referido punto á la recta.

TEOREMA.

46. *Todo punto* M *de la perpendicular* CD *levantada á una recta* AB *por su punto medio, está igualmente distante de los dos extremos* A *y* B *de dicha recta (fig. 33).*

En efecto, por ser C el punto medio de AB, se tiene CA = CB; luego MA y MB son oblicuas que se apartan igualmente del pié de la perpendicular CD. Por consiguiente, MA = MB (**41**).

47. RECÍPROCAMENTE, *todo punto* M *que equidiste de las extremidades* A *y* B *de una recta* AB, *pertenece á la perpendicular* CD *trazada á dicha recta por su punto medio* C.

En efecto, el triángulo MAB, siendo isósceles por hipótesis, la recta MC, que une el vértice con el punto medio C de la base, es perpendicular sobre esta base (**38**).

COROLARIOS.

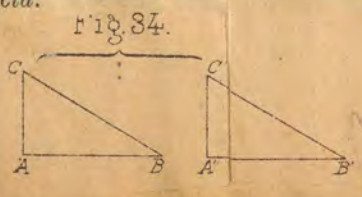
48. Resulta de lo que precede que todos los puntos de la perpendicular trazada á una recta por su punto medio son equidistantes de las extremidades de esta recta, y que los puntos de dicha perpendicular son los únicos puntos del plano que gozan de esa propiedad.

En Geometría plana se da el nombre de *lugar geométrico* á la figura formada por todos los puntos del plano que gozan de una propiedad comun. Valiéndonos de esta definicion, se puede expresar la doble proposicion anterior de esta manera:

La perpendicular levantada á una recta en su punto medio es el LUGAR GEOMÉTRICO *de los puntos equidistantes de las extremidades de dicha recta.*

Fig 33.

Fig 34.



49. Dos puntos bastan para determinar una recta. Luego una vez reconocido que una recta tiene dos de sus puntos equidistantes de las extremidades de otra recta, se puede afirmar que la primera recta es perpendicular á la segunda en su punto medio.

TEOREMA.

50. *Dos triángulos rectángulos son iguales:*

1.° *Cuando tienen la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente iguales;*

2.° *Cuando tienen la hipotenusa y un cateto respectivamente iguales.*

En efecto;

1.° Sean *(fig. 34)* los dos triángulos ABC, A′B′C′, rectángulos en A y A′, y en los cuales se verifica

$$BC = B'C' \text{ y } B = B'.$$

Coloquemos el triángulo A′B′C′ sobre el ABC, de manera que B′C′ coincida con BC, B′ situándose en B y C′ en C. Si se hace que los dos triángulos queden á un mismo lado de la recta BC, el ángulo en B′ siendo igual al ángulo en B, el lado B′A′ tomará la direccion BA; además, el lado C′A′, que es perpendicular á la recta B′A′, deberá coincidir con la direccion CA, única perpendicular posible desde el punto C sobre AB. El punto A′, teniendo á la vez que hallarse sobre la recta BA y sobre la recta CA, vendrá necesariamente á colocarse en A, y los dos triángulos coincidirán.

2.° Sean *(fig. 34)* los dos triángulos ABC, A′B′C′, rectángulos en A y en A′, y en los cuales se verifica

$$BC = B'C', \text{ y } AC = A'C'.$$

Llevemos el triángulo A′B′C′ sobre el triángulo ABC, de manera que A′C′ coincida con AC, A′ colocándose en A y C′ en C. Si se hace que los dos triángulos caigan á un mismo lado de la recta AC, el lado A′B′ tomará la direccion AB, por ser iguales los ángulos A y A′, como rectos. Además, C′B′ y

CB serán dos oblicuas iguales, que parten del mismo punto C y que están situadas á un mismo lado de la perpendicular CA. Luego CB y C′B′ deben apartarse igualmente del pié de esta perpendicular; en otros términos, el punto B′ debe caer en B, y los dos triángulos coincidirán.

TEOREMA.

51. *Todo punto* M *tomado en la bisectriz* AD *de un ángulo* BAC, *está igualmente distante de los dos lados de ese ángulo (fig. 35).*

La distancia del punto M á la recta AB, es la longitud de la perpendicular ME bajada desde M sobre AB (**42**); de igual manera la perpendicular MF, bajada desde M sobre AC, mide la distancia del punto M al lado AC. Se trata de demostrar la igualdad de ME y MF. Ahora bien, esta igualdad resulta de la igualdad de los triángulos MAE, MAF, que siendo rectángulos en E y en F, tienen la hipotenusa AM comun y un ángulo agudo igual, á saber: MAE = MAF, puesto que la recta AD es la bisectriz del ángulo BAC.

52. RECÍPROCAMENTE, *todo punto* M *tomado en el interior de un ángulo* BAC *á igual distancia* ME = MF *de los dos lados* AB *y* AC, *pertenece á la bisectriz de este ángulo (fig. 35).*

En efecto, trazando la recta MA se obtienen dos triángulos rectángulos, MAE, MAF, que son iguales por tener la hipotenusa MA comun y un cateto igual: ME = MF. Luego el ángulo MAE, opuesto al lado ME, es igual al ángulo MAF, opuesto al lado MF, y la recta AM es la bisectriz del ángulo BAC.

COROLARIO.

53. *La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos situados en el interior de ese ángulo que equidistan de sus dos lados.*

ESCOLIO.

54. Para establecer un lugar geométrico es necesario siem-

Fig. 35.

Fig. 36.

pre demostrar una doble proposicion, compuesta de una proposicion directa y su recíproca, ó bien de la misma proposicion directa y su contraria.

Así, habrá que demostrar: que todo punto de una figura goza de cierta propiedad (proposicion directa), y que todo punto que goce de esa propiedad pertenece á la figura (proposicion recíproca).

O bien: que todo punto de una figura goza de cierta propiedad (proposicion directa), y que todo punto tomado fuera de la figura no goza de esa propiedad (proposición contraria).

La equivalencia de estos dos modos de demostracion viene de que la proposicion directa, su recíproca y la contraria, están ligadas entre sí de manera que una cualquiera de las dos últimas es una consecuencia de las otras dos (*).

Ordinariamente es más fácil demostrar la directa y su recíproca, siguiendo el primer modo de demostracion; porque la proposicion contraria exige siempre una figura distinta de la que sirve para la directa, miéntras que la recíproca no requiere, en general, figura nueva.

§ IV.—Paralelas.

DEFINICIONES.

55. Cuando una secante EF encuentra á dos rectas cualesquiera, AB y CD, forma con estas dos rectas ocho ángulos, de los cuales cuatro tienen su vértice en G y los otros cuatro en H *(fig. 36)*.

Los cuatro ángulos (1, 4, 5, 8) comprendidos entre las dos rectas AB y CD, se llaman ángulos *internos*. Los otros cuatro (2, 3, 6, 7) se llaman ángulos *externos*.

Dos ángulos internos, no adyacentes y situados á distinto lado de la secante, se llaman *alternos internos:* tales son los ángulos 1 y 5, 4 y 8.

(*) NOTA 2.ª

BIBLIOTECA DEL C.O.A.M.

Dos ángulos externos, no adyacentes y situados á distinto lado de la secante, se llaman *alternos externos:* tales son los ángulos 2 y 6, 3 y 7.

Dos ángulos situados del mismo lado de la secante, uno interno y otro externo, pero no adyacentes, se llaman *correspondientes;* tales son los ángulos 1 y 7, 4 y 6, 2 y 8, 3 y 5.

En fin, los ángulos 1 y 8, 4 y 5, son *interiores de un mismo lado de la secante;* y los ángulos 2 y 7, 3 y 6, son *exteriores del mismo lado de la secante.*

56. Se dice que dos rectas son *paralelas* cuando, situadas en un mismo plano, por mucho que se las prolongue no llegan á encontrarse.

TEOREMA.

57. *Dos rectas* AC *y* BD, *perpendiculares sobre una tercera recta* EF, *son paralelas (fig. 37).*

Porque si dichas rectas se encontrasen, desde su punto de interseccion podrian bajarse dos perpendiculares sobre EF (**25**).

COROLARIO.

58. *Por un punto* A, *situado fuera de una línea recta* BC, *se puede trazar siempre una paralela á dicha recta (fig. 38).*

Bajemos desde el punto A la perpendicular AD sobre BC, y tracemos á AD la perpendicular AE.

Las dos rectas AE y BC, siendo ambas perpendiculares á la AD, son paralelas.

ESCOLIO.

59. ADMITIREMOS que, *por un punto situado fuera de una línea recta, no se puede trazar más que una paralela á dicha recta.* De aquí resultan las dos proposiciones siguientes:

60. *Si una recta* A *encuentra á otra recta* B, *encontrará tambien á toda paralela* C *á la segunda*; porque si A fuese pa-

Fig. 37.

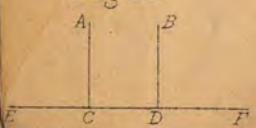
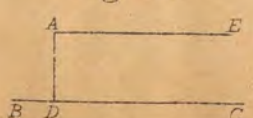


Fig. 38.



ralela á C, desde el punto de encuentro de las rectas A y B se podrian trazar dos paralelas á C.

61. *Dos rectas* A *y* B, *paralelas á una tercera* C, *son paralelas entre sí;* porque si A y B se encontrasen, desde su punto de interseccion se podrian trazar dos paralelas á C.

TEOREMA.

62. *Cuando dos rectas* AB *y* CD *son paralelas, toda recta* EF, *perpendicular á una de ellas* AB, *es tambien perpendicular á la otra* CD *(fig. 39).* (*)

Desde luego podemos afirmar que la recta EF encuentra á CD (**60**). Concibamos por su punto de interseccion F la perpendicular á EF. Esta perpendicular, debiendo ser paralela á AB (**57**), coincidirá con CD, puesto que por el punto F no puede pasar más que una paralela á AB. Luego CD es perpendicular sobre EF, y EF perpendicular sobre CD.

Se enuncia este teorema con más brevedad diciendo: *Dos paralelas tienen sus perpendiculares comunes.*

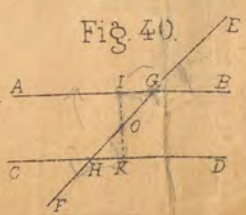
TEOREMA.

63. *Cuando dos rectas paralelas* AB, CD, *son cortadas por una secante* EF, *los cuatro ángulos agudos formados en los dos puntos de interseccion* G *y* H *son iguales entre sí, así como los cuatro ángulos obtusos formados alrededor de los mismos puntos (fig. 40).*

En efecto, por el punto O, medio de GH, tracemos la recta IK, perpendicular comun á las dos paralelas AB y CD; OI caerá en el interior del ángulo agudo OGA, y OK en el interior del ángulo agudo OHD (**43**). Además, los triángulos rectángulos OGI, OHK, tienen sus hipotenusas OG y OH iguales, puesto que el punto O es el medio de GH, y los ángulos

Fig. 39.

Fig. 40.



agudos IOG, HOK iguales, como opuestos por el vértice; luego son iguales (**50**), y de consiguiente el ángulo OGI es igual al ángulo OHK. Cada uno de estos dos ángulos, siendo igual á su opuesto por el vértice, se ve que los cuatro ángulos OGI, EGB, OHK, CHF son iguales entre si.

Los cuatro ángulos obtusos AGE, OGB, DHF, OHC son tambien iguales entre si, como suplementos de ángulos agudos iguales.

64. RECÍPROCAMENTE, *si dos rectas* AB *y* CD *son cortadas por una secante* EF, *y forman alrededor de los puntos de interseccion* G *y* H *cuatro ángulos agudos ó cuatro ángulos obtusos iguales entre sí, las dos rectas* AB *y* CD *son paralelas.* (Siempre que no estén en la posicion indicada en la *fig. 40 bis.*)

Supongamos *(fig. 41)* que el ángulo HGA sea igual al ángulo GHD, y concibamos por el punto H la paralela á AB. Esta paralela debe, en virtud de la proposicion directa, formar con GH un ángulo igual al ángulo HGA, y por tanto al ángulo GHD; luego esta paralela coincide con HD, y la recta CD es paralela á AB.

COROLARIOS.

65. *Cuando dos paralelas* AB *y* CD *(fig. 41) están cortadas por una secante* EF, resulta de lo que precede:

1.° Que *los ángulos alternos internos 1 y 5, 4 y 8, son iguales entre sí;*

2.° Que *los ángulos alternos externos 3 y 7, 2 y 6, son iguales entre sí;*

3.° Que *los ángulos correspondientes 1 y 7, 2 y 8, 3 y 5, 4 y 6, son iguales entre sí;*

4.° Que *los ángulos interiores de un mismo lado de la secante 1 y 8, 4 y 5, son suplementarios;*

5.° Que *los ángulos exteriores del mismo lado de la secante 2 y 7, 3 y 6, son suplementarios.*

Y recíprocamente, *dos rectas cortadas por una secante son paralelas:*

Fig. 44

Si los ángulos alternos internos son iguales;
Si los ángulos alternos externos son iguales;
Si los ángulos correspondientes son iguales;
Si los ángulos internos del mismo lado son suplementarios;
Si los ángulos externos del mismo lado son suplementarios.

ESCOLIO.

66. Puesto que las proposiciones directas y las proposiciones recíprocas están demostradas, las proposiciones contrarias son igualmente verdaderas (**19**). Así:

Cuando dos rectas están cortadas por una secante y los ángulos formados no satisfacen á las condiciones expresadas, las dos rectas no son paralelas. En particular:

Cuando dos rectas forman con una transversal ángulos interiores del mismo lado de la secante, cuya suma difiere de dos rectos, esas rectas se cortan del lado de la secante en que la suma es menor que dos rectos.

67. Hé aquí otras dos propiedades cuyo uso es frecuente:

1.° *Dos rectas (fig. 42)* AB *y* CD, *la primera perpendicular, y la segunda oblicua á una tercera recta* AC, *tienen que cortarse,* porque la suma de los ángulos internos BAC, DCA, es menor que dos ángulos rectos.

2.° *Dos rectas* EF, GH *(fig. 43), respectivamente perpendiculares á dos rectas* CA *y* CB, *que se cortan, tienen que cortarse tambien;* porque, trazando la recta EG, se ve que cada uno de los ángulos interiores FEG y HGE, es menor que un ángulo recto; la suma de ámbos, es por consiguiente, inferior á dos ángulos rectos.

TEOREMA.

68. *Dos paralelas* AC, BD, *comprendidas entre otras dos paralelas* AB, CD, *son iguales (fig. 44).*

En efecto, tracemos AD; los dos triángulos ABD, ACD, serán iguales por tener un lado comun AD adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, á saber: el ángulo BAD igual al

Fig. 40. (bis)

Fig. 41.

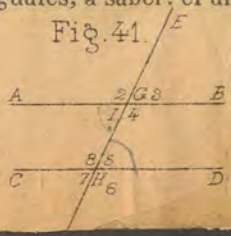


Fig. 42.

Fig. 43.

ángulo ADC como alternos internos entre las paralelas AB, CD, cortadas por la secante AD, y el ángulo ADB igual al ángulo DAC como alternos internos entre las paralelas AC, BD, cortadas por la misma secante. Luego el lado BD, opuesto al ángulo BAD, es igual al lado AC, opuesto al ángulo ADC.

COROLARIO.

69. Si dos líneas rectas AC y BD *(fig. 45)* fuesen perpendiculares sobre AB, y por consiguiente sobre CD, dichas rectas medirian las distancias de los puntos A y B á la recta CD. Estas dos distancias serian iguales, como partes de paralelas comprendidas entre paralelas; y pudiendo los puntos A y B ocupar una posicion cualquiera sobre AB, se ve que *dos paralelas equidistan en toda su extension.*

TEOREMA.

70. *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos, son iguales ó suplementarios (fig. 46):*

1.° Supongamos que los dos lados paralelos estén dos á dos dirigidos en el mismo sentido. Sean, por ejemplo, los ángulos ABE, DEF: BA y ED son dos rectas paralelas y dirigidas ámbas de abajo arriba; BC y EF son tambien paralelas y están una y otra dirigidas de izquierda á derecha; los dos ángulos considerados, digo que son iguales.

En efecto, prolonguemos el lado DE hasta el punto H, en que corta al lado BC; los ángulos ABC, DHC, son iguales como correspondientes entre las paralelas BA, HD y la secante BC; de igual manera los ángulos DEF, DHC, son iguales por correspondientes entre las paralelas EF, HC y la secante DH. Luego el ángulo ABC es igual al ángulo DEF.

2.° Supongamos que los lados estén dirigidos dos á dos en sentido contrario. Sean, por ejemplo, los ángulos ABC, GEH: BA y EH son paralelas, y dirigidas la primera de abajo arriba, la segunda de arriba abajo; BC y EG son paralelas, y están dirigidas una de izquierda á derecha, la otra de derecha á izquierda; los dos ángulos considerados son iguales.

Fig. 45.

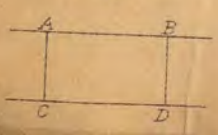
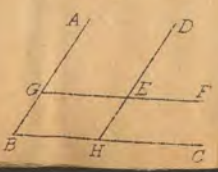


Fig. 46.



En efecto, prolongando los lados del ángulo GEH más allá del vértice E, se forma un ángulo DEF igual al ángulo GEH, que es su opuesto por el vértice, é igual tambien al ángulo ABC, por tener sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

3.° Supongamos, en fin, que dos lados sean paralelos y dirigidos en el mismo sentido, y los otros dos paralelos y de sentido contrario. Sean, por ejemplo, los ángulos ABC, DEG: BA y ED son paralelas y están ámbas dirigidas de abajo arriba; BC y EG son paralelas y están dirigidas, una de izquierda á derecha, la otra de derecha á izquierda; los dos ángulos considerados son suplementarios.

En efecto, prolongando GE más allá del vértice E, se forma un ángulo DEF, que es suplemento de DEG, y que es además igual al ABC, por tener sus lados paralelos á los de este último y dirigidos en el mismo sentido.

En resúmen: *dos ángulos que tienen sus lados paralelos son iguales si dichos lados paralelos están dos á dos dirigidos en el mismo sentido ó en sentido contrario; y son suplementarios si dos de los lados paralelos son del mismo sentido y los otros dos de sentido contrario* (*).

COROLARIO.

71. *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios (figuras 47 y 48).*

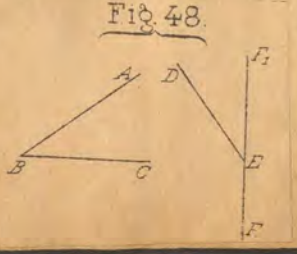
1.° Consideremos dos ángulos agudos ABC, DEF *(fig. 47)*: el lado DE suponemos que es perpendicular á BA, y el lado EF perpendicular á BC; los dos ángulos considerados son iguales.

En efecto, si considerando rígido el ángulo DEF le hacemos girar un ángulo recto alrededor de su vértice E, el nuevo ángulo D'EF', reproduccion de DEF, tendrá sus lados respectivamente paralelos á los de ABC: ED' y BA serán paralelos, porque ámbos son perpendiculares á DE; EF' y BC serán

(*) NOTA 4.ª

Fig. 47.

Fig. 48.



tambien paralelos por ser ámbos perpendiculares á EF. Desde luego los ángulos ABC, D'EF', que tienen sus lados paralelos y son agudos, no pueden ser suplementarios, luego son iguales; por consiguiente, los ángulos ABC, DEF son tambien iguales.

2.° Si los dos ángulos comparados fuesen obtusos, se demostraria del mismo modo su igualdad.

3.° Consideremos, en fin, dos ángulos de especie diferente, es decir, uno agudo y otro obtuso *(fig. 48)*. Prolongando EF más allá del vértice E, se forma un ángulo DEF_1, suplemento de DEF: este ángulo DEF_1 es, por tanto, agudo, como el ángulo ABC; además tiene sus lados respectivamente perpendiculares á los lados de ABC. Los ángulos ADC y DEF_1 son pues, iguales, y de consiguiente los ángulos propuestos ABC y DEF son suplementarios (*).

§ V.—Suma de los ángulos de un polígono.

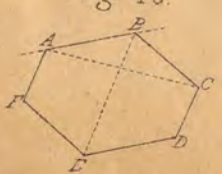
DEFINICIONES.

72. Se da el nombre de *polígono* á una porcion de plano ABCDEF limitada en todos sentidos por líneas rectas *(figura 49.)* Las porciones de rectas AB, BC, CD, DE, EF, FA son los *lados* del polígono; la suma de estos lados forma el contorno ó *perímetro* del polígono; este polígono tiene por *vértices* los puntos A, B, C, D, E, F, y por *ángulos* los ángulos ABC, BCD, CDE, DEF..., formados *interiormente* por dos lados consecutivos cualesquiera. En fin, toda recta que, como AC, BE une dos vértices no consecutivos del polígono se llama *diagonal*.

El más sencillo de todos los polígonos es el *triángulo*, que no tiene más que tres lados. Siguiendo por órden, viene despues el *cuadrilátero*, que tiene cuatro lados; el *pentágono*, que tiene cinco lados; el *exágono*, que tiene seis lados...; el *octó-*

(*) NOTA 5.ª

Fig. 49.



gono, qué tiene ocho lados; ... el *decágono,* que tiene diez; ... el *pentedecágono,* que tiene quince lados. La *fig. 49* representa un exágono.

73. Una línea quebrada ó poligonal se dice que es *convexa* cuando toda ella está situada á un solo lado de cada una de las rectas que la componen, prolongada indefinidamente. Tal es, por ejemplo, el polígono ABCDEF *(fig. 49).* El polígono ABCDE *(fig. 50),* por el contrario, diremos que no es convexo, porque el lado ED, prolongado indefinidamente, divide al polígono en dos partes: una que queda encima, y otra debajo de dicha recta ED (*).

Una recta cualquiera, trazada en el plano de una línea poligonal convexa, no puede encontrarla en más de dos puntos; porque si una recta XY *(fig. 50)* encontrase á la línea poligonal AEDC en tres puntos, Q, R, S, los puntos Q y S, hallándose á una parte y otra del lado DE, la línea AEDC no quedaria toda de un mismo lado con respecto á DE prolongada; es decir, que no sería convexa.

TEOREMA.

74. *Toda línea poligonal convexa* ABCD *es menor que toda línea poligonal* AMND, *que envuelve á la primera y que tiene las mismas extremidades (fig. 51).*

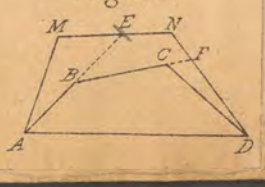
Prescindiendo de la parte común AD, hagamos ver que el contorno ABCD es menor que el contorno AMND. Prolonguemos los lados AB y BC hasta que corten en N y en F al contorno poligonal AMND. Podremos escribir las desigualdades siguientes:

$$AB + BE < AM + ME,$$
$$BC + CF < BE + EN + NF,$$
$$CD < CF + FD.$$

(*) Suele llamársele *cóncavo.*

Fig. 50.

Fig. 51.



Si sumamos estas desigualdades miembro á miembro, resulta despues de verificar las reducciones:

$$AB + BC + CD < AM + MN + ND.$$

De igual manera se demostraria que *toda línea poligonal convexa* ABCD *es menor que toda línea poligonal* EFGHIK, *que la envuelve por todos lados (fig. 52).*

TEOREMA.

75. *La suma de los ángulos de un triángulo cualquiera* ABC, *es igual á dos ángulos rectos (fig. 53).*

En efecto, prolonguemos BC y tracemos CE paralela á BA. Los ángulos BAC, ACE, son iguales por alternos internos entre las paralelas AB y CE, cortadas por la secante AC. Los ángulos ABC, ECD, son iguales tambien por correspondientes entre las paralelas BA y CE y la secante BD. Luego la suma de los tres ángulos del triángulo ABC es la misma que la de los tres ángulos BCA, ACE, ECD, formados alrededor del punto C, encima de la recta indefinida BD; dicha suma es, pues, igual á dos ángulos rectos (**20**).

ESCOLIO.

76. Por esta demostracion se ve que el ángulo ACD es la suma (**9**) de los dos ángulos B y A; así, *todo ángulo exterior de un triángulo*, es decir, todo ángulo formado por un lado del triángulo y la prolongacion de otro lado, *es igual á la suma de los ángulos interiores que no le son adyacentes.*

COROLARIOS.

77. *Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto ni más de un ángulo obtuso.*

78. *En un triángulo rectángulo, los dos ángulos agudos son complementarios.*

Fig. 52.

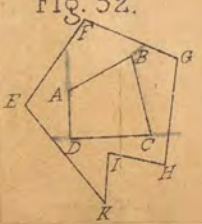


Fig. 53.

79. *Un ángulo cualquiera de un triángulo, es el suplemento de la suma de los otros dos.* De aquí se sigue que si dos triángulos, ABC, A'B'C', tienen dos ángulos respectivamente iguales, A = A' y B = B', el tercer ángulo C del primer triángulo es igual al tercer ángulo C' del segundo. Síguese tambien que dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual y dos ángulos respectivamente iguales, sean ó no estos dos ángulos adyacentes al lado igual.

80. *Dos triángulos* ABC, A'B'C', *que tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares, tienen sus ángulos respectivamente iguales.*

En efecto, dos ángulos que tienen sus lados paralelos ó perpendiculares, sabemos que son iguales ó suplementarios; por consiguiente,

$$A = A' \text{ ó } A + A' = 2 \text{ rectos.}$$
$$B = B' \text{ ó } B + B' = 2 \text{ rectos.}$$
$$C = C' \text{ ó } C + C' = 2 \text{ rectos.}$$

Estas hipótesis, combinadas de todas las maneras imaginables, dan lugar á los tres *casos* siguientes:

1.° $A + A' = 2$ rectos, $B + B' = 2$ rectos, $C + C' = 2$ rectos.
2.° $A = A'$, $B + B' = 2$ rectos, $C + C' = 2$ rectos.
3.° $A = A'$, $B = B'$, y por consecuencia (**79**), $C = C'$.

Pero en el primer caso, la suma de los ángulos de los dos triángulos valdria 6 rectos; en el segundo, esta suma excederia de 4 ángulos rectos en la cantidad angular $A + A' = 2A$. Luego sólo es admisible la tercera combinacion.

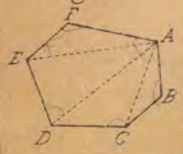
TEOREMA.

81. *La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo* ABCDEF *es igual á tantas veces dos ángulos rectos como lados tiene el polígono menos dos (fig. 54).*

Uniendo uno de los vértices, A por ejemplo, con todos los

vértices no adyacentes, se descompone el polígono en tantos triángulos como lados tiene el polígono menos dos; porque cada triángulo contiene un solo lado, excepto los dos triángulos extremos, que contienen cada uno dos lados del polígono. La suma de los ángulos del polígono es igual á la de los ángulos de todos los triángulos; vale, pues, tantas veces dos rectos como triángulos hay; en otros términos, vale tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos.

Fig. 54.



Escolio.

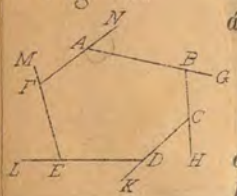
82. Si se designa por n el número de lados del polígono, la suma de sus ángulos tendrá por expresion, tomando como unidad el ángulo recto,

$$2\,(n-2) = 2n - 4.$$

Podemos decir, por tanto, que *la suma de los ángulos de un polígono se obtiene duplicando el número de sus lados y restando 4 del resultado; la unidad es siempre el ángulo recto.*

Si en la fórmula anterior se hace $n = 4$, la suma buscada es tambien igual á cuatro. *La suma de los ángulos de un cuadrilátero vale, pues, cuatro rectos;* de aquí se sigue que, *cuando un cuadrilátero tiene sus cuatro ángulos iguales, cada uno de esos ángulos es recto.*

Fig. 55.

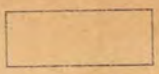


Corolario.

83. *La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es decir, de los ángulos que se forman prolongando todos los lados del polígono en un mismo sentido, es igual á cuatro ángulos rectos (fig. 55).*

En efecto, la suma de un ángulo cualquiera FAB del polígono y del ángulo exterior NAG que le es adyacente, es igual á dos ángulos rectos; luego la suma de todos los ángulos, así interiores como exteriores del polígono, vale tantas veces dos rectos como vértices ó lados hay. Esta suma excede, por consiguiente, á la de los ángulos interiores (**82**) en cuatro rectos;

Fig. 56. Fig. 57.



en otros términos, la suma de los ángulos exteriores es igual á cuatro ángulos rectos (*).

Conviene notar que, en virtud del teorema anterior, un polígono convexo no puede tener más de tres ángulos interiores agudos, porque, de lo contrario, habria más de tres ángulos exteriores obtusos, cuya suma excederia de cuatro rectos.

Fig. 58.

Fig. 59.

§ VI.—Del paralelógramo.

DEFINICIONES.

84. Entre los cuadriláteros se distinguen:

1.° El *paralelógramo (fig. 56)*, que tiene sus lados opuestos paralelos;

Fig. 60.

2.° El *rectángulo (fig. 57)*, que tiene sus cuatro ángulos iguales; por lo dicho en el núm. 82 sabemos que estos cuatro ángulos son rectos;

3.° El *rombo (fig. 58)*, que tiene todos sus lados iguales; demostraremos en breve que el rectángulo y el rombo son paralelógramos;

4.° El *cuadrado (fig. 59)*, que tiene todos sus lados iguales y sus ángulos tambien iguales; el cuadrado es á la vez rombo y rectángulo;

5.° El *trapecio (fig. 60)*, en el cual dos lados opuestos son paralelos sin que los otros dos lo sean. El trapecio se llama *rectángulo* cuando uno de sus lados no paralelos es perpendicular á los dos lados paralelos, é *isósceles* cuando sus lados no paralelos son iguales.

TEOREMA.

85. *En todo paralelógramo:*

1.° *Los lados opuestos son respectivamente iguales;*

2.° *Los ángulos opuestos son respectivamente iguales;*

3.° *Las diagonales se cortan mutuamente en dos partes iguales.*

(*) (NOTA) 6.ª

Sea el paralelógramo ABCD *(fig. 61)*.

1.° Dos lados opuestos cualesquiera, AB y CD por ejemplo, son iguales entre sí, porque son, en virtud del supuesto, partes de paralelas comprendidas entre paralelas (**68**).

2.° Dos ángulos opuestos cualesquiera, tales como DAB y BCD, son iguales, porque están formados por lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario (**70**). AB y CD son, en efecto, rectas paralelas y de sentido contrario; lo mismo sucede con AD y CB.

3.° Cada una de las diagonales AC y BD está dividida por la otra en el punto O en dos partes iguales. En efecto, los dos triángulos AOB, DOC, tienen un lado igual adyacente á dos ángulos iguales, á saber: el lado AB igual al lado CD, como lados opuestos del paralelógramo; el ángulo OAB igual al ángulo OCD, por alternos internos entre las paralelas AB y CD, cortadas por AC; y el ángulo OBA igual al ángulo ODC, por alternos internos entre las mismas paralelas y la secante BD. Los triángulos AOB, DOC, son, por tanto, iguales. De aquí se sigue que el lado OB, opuesto al ángulo OAB, es igual al lado OD, opuesto al ángulo OCD, y el lado OA, opuesto al ángulo OBA, es tambien igual al lado OC, opuesto al ángulo ODC (*).

TEOREMA.

86. *Un cuadrilátero es un paralelógramo:*

1.° *Cuando sus lados opuestos son respectivamente iguales;*

2.° *Cuando sus ángulos opuestos son respectivamente iguales;*

3.° *Cuando dos lados opuestos son á la vez iguales y paralelos;*

4.° *Cuando sus diagonales se cortan mutuamente en dos partes iguales.*

Sea el cuadrilátero ABCD *(fig. 62)*.

1.° Tracemos la diagonal AC. Los dos triángulos ABC, ADC, son iguales por tener los tres lados iguales, á saber:

(*) NOTA 7.ª

Fig. 61. Fig. 62. Fig. 63.

AC comun, AB y CD iguales entre sí por hipótesis, lo mismo que AD y BC. De consiguiente, el ángulo BAC, opuesto á BC, es igual al ángulo ACD, opuesto á AD; y como estos ángulos ocupan, con respecto á las rectas AB y CD y á la secante AC, la posicion de alternos internos, los dos lados AB y CD son paralelos (**65**). Tambien la igualdad de los ángulos BCA y CAD entraña, por la misma razon, el paralelismo de los otros dos lados AD y BC. Luego el cuadrilátero ABCD, teniendo sus lados opuestos respectivamente paralelos, es un paralelógramo.

2.° Los ángulos opuestos A y C, siendo iguales entre sí, lo mismo que los ángulos B y D *(fig. 63)*, se ve que dos ángulos consecutivos del cuadrilátero, por ejemplo B y C, tienen por suma la mitad de la suma de los cuatro ángulos del cuadrilátero; es decir, dos rectos. Estos dos ángulos B y C son, por tanto, suplementarios; y como además son internos del mismo lado de la secante con respecto á las rectas AB y CD cortadas por BC, esas dos rectas AB y CD son paralelas (**65**). Los ángulos A y B, por ser suplementarios, determinan análogamente el paralelismo de los otros dos lados AD y BC. Luego el cuadrilátero ABCD es un paralelógramo.

3.° Sean AB y CD los dos lados opuestos que se supone iguales y paralelos *(fig. 62)*. Trazando la diagonal AC, se forman dos triángulos ABC, ADC, que tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados iguales, á saber: el ángulo BAC, igual al ángulo ACD, por alternos internos entre las paralelas AB y CD cortadas por AC; el lado AB igual á CD por hipótesis, y el lado AC comun. De la igualdad de los triángulos ABC, ADC, resulta la de los ángulos ACB y CAD; y como estos ángulos son alternos internos con respecto á las dos rectas AD y BC y la secante AC, esas dos rectas son paralelas. El cuadrilátero ABCD, que tiene sus lados opuestos paralelos, es un paralelógramo.

4.° Puesto que se supone $OA = OC$ y $OB = OD$ *(fig. 61)*, y puesto que los ángulos AOB y COD son opuestos por el vértice, los dos triángulos AOB, COD, son iguales (**34**). El án-

gulo OAB es, pues, igual al ángulo OCD. Por otra parte, siendo esos ángulos alternos internos entre las rectas AB y CD, cortadas por la secante AC, los dos lados opuestos AB y CD son paralelos. De la igualdad de los triángulos AOD, DOC, se deduce análogamente la igualdad de los ángulos OAD, OCB, y por consecuencia el paralelismo de los otros dos lados opuestos AD y BC. El cuadrilátero ABCD es, pues, un paralelógramo.

TEOREMA.

87. *Todo rectángulo es un paralelógramo, cuyas diagonales son iguales (fig. 64).*

Ante todo un rectángulo es un paralelógramo, porque sus ángulos opuestos son iguales (**86**, 2.°). En segundo lugar, los triángulos DAB, CBA por ejemplo, son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre lados iguales; el ángulo recto DAB igual al ángulo recto CBA, el lado AB común, y AD igual á BC por lados opuestos de un paralelógramo. Luego las diagonales AC y BD, hipotenusas de los triángulos rectángulos iguales DAB, CBA, son iguales.

88. RECÍPROCAMENTE, *todo paralelógramo cuyas diagonales son iguales, es un rectángulo (fig. 64).* Porque los triángulos DAB, CBA, siendo iguales por tener sus tres lados iguales, los ángulos DAB y CBA son iguales; y como cada uno de estos es igual á su opuesto (**85**), se ve que el paralelógramo considerado tiene todos sus ángulos iguales, y, por consecuencia, es un rectángulo.

TEOREMA.

89. *Todo rombo es un paralelógramo, cuyas diagonales son:* 1.°, *perpendiculares entre sí;* 2.°, *bisectrices de los ángulos opuestos (fig. 65).*

En primer lugar, todo rombo es paralelógramo, porque sus lados opuestos son iguales (**86**, 1.°).

Además, siendo isósceles los triángulos ABC, y ADC por ser iguales los cuatro lados del rombo, la diagonal BD, que pasa por el punto medio O de la diagonal AC y por los vértices B y D, es á la vez perpendicular sobre AC y bisectriz de los ángulos B y D (**38**).

Por análoga razon la diagonal AC es bisectriz de los ángulos A y C.

90. RECÍPROCAMENTE, *todo paralelógramo es un rombo:* 1.°, *cuando sus diagonales son perpendiculares entre sí;* 2.°, *cuando una de ellas es bisectriz de los ángulos cuyos vértices une.*

ESCOLIO.

91. *Todo cuadrado es un paralelógramo cuyas diagonales son iguales, perpendiculares entre sí, y bisectrices de los ángulos opuestos.* RECÍPROCAMENTE, *todo paralelógramo es un cuadrado cuando sus diagonales son:* 1.°, *iguales y perpendiculares entre sí;* 2.°, *iguales, y una de ellas además es bisectriz de los ángulos cuyos vértices une.*

La demostracion de estas dos proposiciones (**90** y **91**) no ofrece dificultad.

Fig. 64.

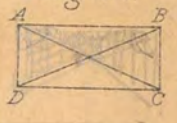
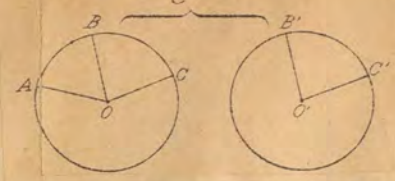


Fig. 65.

Fig. 66.



LIBRO II.

LA CIRCUNFERENCIA DE CÍRCULO.

§ I.—Arcos y cuerdas.

DEFINICIONES.

92. La *circunferencia* es una línea curva ABCD *(fig. 66)*, cuyos puntos están todos igualmente distantes de uno interior O, que se llama *centro*.

El *círculo* es el espacio limitado por la circunferencia.

Se llama *radio* toda recta trazada desde el centro á la circunferencia. *Todos los radios* OA, OB, OC, ... *de un círculo son iguales,* por la misma definicion de la circunferencia.

Dos círculos del mismo radio son iguales: porque si se traslada el segundo sobre el primero de manera que el centro O' de aquél caiga sobre el centro O de éste *(fig. 66)*, la igualdad de los radios hace que las dos circunferencias tengan que coincidir.

93. Se llama *arco* una porcion cualquiera de circunferencia.

Dos arcos del mismo radio, BC, B'C' *(fig. 66), se dice que son iguales cuando pueden superponerse uno sobre otro de manera que coincidan.*

Para sumar dos arcos del mismo radio, AB, B'C', llévese el segundo á continuacion del primero, colocándolo sobre el círculo O, á que pertenece el primer arco, en la posicion BC, de manera que los dos arcos tengan una extremidad B comun;

el arco A B C comprendido entre las extremidades A y C que no han coincidido, se llama *suma* de los arcos propuestos.

94. Un punto es *interior* ó *exterior* á una circunferencia, segun que su distancia al centro es *menor* ó *mayor* que el radio.

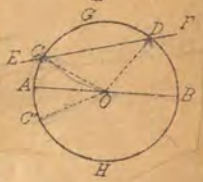
95. *Una recta cualquiera* EF, *no puede encontrar á una circunferencia* O *en más de dos puntos* C *y* D *(fig. 67).*

En efecto, desde el centro O á la recta EF, no pueden trazarse (**45**) más de dos rectas iguales al radio.

96. Se da el nombre de *secante* á toda recta EF que corta á la circunferencia en dos puntos C y D. Se llama *cuerda* la parte CD interior al círculo, y se reserva en particular el nombre de *diámetro* á las cuerdas que pasan por el centro.

Todos los diámetros de un círculo son iguales, porque un diámetro cualquiera AB es la suma de dos radios OA y OB.

Fig. 67.



97. 1.° *El diámetro es la mayor cuerda del círculo;*

2.° *Todo diámetro* AB *divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales (fig. 67).*

En efecto:

1.° Una cuerda cualquiera CD es menor que la suma OC + OD de los dos radios que terminan en sus extremidades; dicha cuerda es, por tanto, menor que un diámetro.

2.° Si se dobla la figura alrededor de un diámetro AB, un radio cualquiera OC de la parte superior tomará la direccion del OC′, que forma al otro lado de AB un ángulo C′OA igual al ángulo COA; y como todos los radios son iguales, el punto C del arco superior AGB caerá en C′ sobre el arco inferior AHB. Estos dos arcos AGB, AHB, habiendo quedado superpuestos, son iguales, y lo mismo sucede con los espacios comprendidos entre dichos arcos y el diámetro AB.

98. Una cuerda cualquiera CD, que no es diámetro, dividirá por consiguiente á la circunferencia en dos arcos *desigua-*

les: uno C G D menor que la semicircunferencia, otro C H D mayor. Se dice que la cuerda C D *subtiende* estos dos arcos. No obstante, cuando hablemos del *arco subtendido por una cuerda* C D, deberá entenderse siempre, á no ser que advirtamos lo contrario, que se trata del menor de los dos arcos correspondientes á esa cuerda.

TEOREMA.

99. *En un mismo círculo ó en círculos iguales:*

1.° *Dos arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales;*

2.° *De dos arcos desiguales el mayor es subtendido por mayor cuerda (fig. 68).*

Sean O é I dos círculos iguales:

1.° Si el arco A M B es igual al arco C N D, las cuerdas A B y C D serán iguales. En efecto, llevemos el círculo I sobre el círculo O, de manera que el radio I C coincida con su igual O A, I colocándose en O, y C en A. Las circunferencias coincidirán, el arco C N D caerá sobre su igual A M B, y el punto D se confundirá con B. La cuerda C D habrá quedado superpuesta sobre la cuerda A B, y, por consiguiente, ambas cuerdas serán iguales.

2.° Si el arco A M H es mayor que el arco C N D, la cuerda A H será mayor que la cuerda C D. En efecto, tomemos á partir del punto A, sobre el arco A M H, un arco A M B igual al arco C N D; las cuerdas A B y C D serán iguales (1.°); falta, pues, demostrar que la cuerda A B es menor que la cuerda A H. Ahora bien, el arco A M B, siendo menor que el arco A M H, el punto B caerá entre los puntos A y H, y el ángulo A O B es menor que el ángulo A O H. Los dos triángulos A O B, A O H, tienen un ángulo desigual comprendido entre lados iguales, O A comun, y O B = O H como radios del mismo círculo. Luego **(33)** el lado A B, opuesto al ángulo A O B es menor que el lado A H opuesto al ángulo A O H.

100. Del teorema que se acaba de demostrar y del principio general del núm. **40** se sigue que:

Fig. 68.

RECÍPROCAMENTE, *en un mismo círculo ó en círculos iguales á cuerdas iguales corresponden arcos iguales, y á mayor cuerda corresponde mayor arco.*

ESCOLIO.

101. En lo que precede no hemos considerado sino arcos menores que la semicircunferencia **(98)**. Si se considerasen arcos mayores que la semicircunferencia, las conclusiones serían inversas en la segunda parte del teorema: á mayor arco la cuerda sería menor.

TEOREMA.

102. *El diámetro* AB, *perpendicular á una cuerda* CD, *divide esta cuerda y los dos arcos* CBD, CAD, *subtendidos por ella, en dos partes iguales (fig. 69).*

En efecto, sean O el centro de la circunferencia é I el punto de encuentro del diámetro AB y de la cuerda CD. Los radios OC, OD, siendo, con respecto á la perpendicular OI, dos oblicuas iguales, deben separarse igualmente del pié de esta perpendicular. Luego CI = ID; en otros términos, la cuerda CD queda dividida por el punto I en dos partes iguales. Por otra parte, siendo AB perpendicular á CD en su punto medio, todos sus puntos, y en particular el punto B, equidistan de los puntos C y D. Las cuerdas BC y BD son, pues, iguales, y los arcos BC y BD correspondientes tambien lo serán. El arco CBD queda dividido por el punto B en dos partes iguales. De igual manera demostraríamos que el arco CAD está dividido tambien por el punto A en dos partes iguales.

COROLARIOS.

103. La recta AB satisface á las cinco condiciones siguientes: pasa por el centro O, por el medio I de la cuerda CD, y por los puntos medios A y B de los dos arcos subtendidos por esta cuerda; en fin, es perpendicular á dicha cuerda CD. Pero de estas cinco condiciones bastan dos para determinar la recta AB, porque se sabe que por dos puntos no pasa más que

una recta, y que desde un punto no se puede bajar más que una perpendicular sobre una recta; luego toda recta que satisfaga á dos de las cinco condiciones enunciadas, satisface necesariamente á las otras tres. De aquí una serie de proposiciones fáciles de enunciar, de las cuales sólo citaremos las siguientes:

La perpendicular levantada á una cuerda por su punto medio, pasa por el centro de la circunferencia y por los puntos medios de los arcos que la cuerda subtiende.

El lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas es el diámetro perpendicular á la direccion comun de dichas cuerdas.

Fig. 70.

TEOREMA.

104. *En un mismo círculo ó en círculos iguales:*

1.° *Dos cuerdas iguales distan igualmente del centro;*

2.° *De dos cuerdas desiguales, la menor dista más del centro que la mayor (fig. 70).*

1.° Sean las dos cuerdas iguales AB, CD, y sean OE, OF, las perpendiculares trazadas desde el centro O á cada una de ellas. Las longitudes de estas perpendiculares miden (**42**) las distancias desde el centro á las dos cuerdas, y se quiere demostrar que esas distancias son iguales. Ahora bien, los triángulos rectángulos EOB, COF, son iguales por tener la hipotenusa y un cateto iguales: OB = OC por radios del mismo círculo, y EB = CF por ser mitades de cuerdas iguales, puesto que los piés E y F de las perpendiculares OE y OF son (**102**) los puntos medios de las cuerdas AB y CD. Luego OE, tercer lado del primer triángulo, es igual á OF, tercer lado del segundo.

2.° Sean ahora las dos cuerdas desiguales AG y CD.

Suponemos AG menor que CD, y queremos demostrar que la perpendicular OH, trazada desde el centro á la primera cuerda, es mayor que la perpendicular OF á la segunda. Para conseguirlo trácese desde el punto A una cuerda AB igual á CD. La distancia OE del centro á esta cuerda será igual á OF, y resta hacer ver que OE es menor que OH. Puesto que la

cuerda AG es menor que AB, el arco AG es tambien menor que el arco AB, y, por consiguiente, el centro O del círculo y el punto H, medio de la cuerda AG, están á distinto lado con relacion á la recta AB. Luego AB encuentra á OH en un cierto punto I, situado entre O y H, y se tiene OI < OH.

Pero entre OE perpendicular á AB y OI oblicua, existe la relacion

$$OE < OI;$$

luego, *à fortiori*,

$$OE < OH.$$

105. Del teorema que se acaba de demostrar y del principio general del núm. **40**, resulta que:

RECIPROCAMENTE, *en un mismo círculo ó en círculos iguales, dos cuerdas equidistantes del centro son iguales; y de dos cuerdas desigualmente distantes del centro, la que dista más es menor.*

§ II. — Tangente al círculo. — Posiciones mutuas de dos circunferencias.

DEFINICION.

106. Se llama *tangente* al círculo toda recta CD que no tiene más que un punto comun con la circunferencia. Este punto comun A, se llama *punto de contacto.*

TEOREMA.

107. *Toda perpendicular* CD, *trazada por la extremidad* A *de un radio* OA, *es tangente á la circunferencia (fig. 71).*

Fig. 71.

En efecto, uniendo el centro O con un punto cualquiera B de CD, distinto del punto A, se obtiene una recta OB oblicua sobre CD, puesto que OA es la perpendicular á CD trazada desde el punto O. Esta recta OB es, por tanto, mayor que el radio OA (**41**), y el punto B es exterior al círculo

(**94**). La recta CD, teniendo todos sus puntos exteriores al círculo, menos el A que es comun á las dos líneas, es por definicion una tangente á la circunferencia.

108. RECÍPROCAMENTE, *toda tangente* CD *á la circunferencia es perpendicular á la extremidad del radio* OA, *que termina en el punto de contacto* A *(fig. 71).*

En efecto, todo punto B de la tangente CD, exceptuando sólo el punto A, es exterior al círculo, y su distancia al centro es, por consiguiente, mayor que el radio (**94**). Luego el radio OA es la menor de todas las rectas que pueden trazarse desde el centro á la tangente CD. En otros términos, OA es la perpendicular bajada desde el centro O sobre la tangente CD (**44**), y CD, por el contrario, es perpendicular al radio OA en su punto extremo A.

COROLARIOS.

109. *Por un punto* A *de una circunferencia* O, *se puede trazar siempre una tangente á dicha curva y no se puede trazar más que una.*

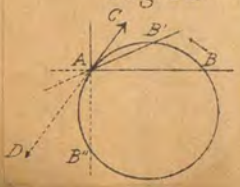
110. *Toda tangente es paralela á las cuerdas que el diámetro trazado por el punto de contacto divide en dos partes iguales* (**103**).

ESCOLIOS.

111. Se puede considerar la tangente AC en un punto A de una circunferencia *(fig. 72) como la posicion límite de una secante* AB, *que pasa por el punto* A *cuando esa secante gira alrededor de* A, *hasta que el segundo punto de interseccion* B *venga á confundirse con el primero.* Porque una vez que los dos puntos de interseccion han venido á confundirse en uno solo, la recta AC no tiene más que un punto comun con la circunferencia.

Esta nueva definicion de la tangente es aplicable á todas las curvas. Más adelante veremos que, aparte su generalidad, esta definicion tiene, sobre la que dimos en el núm. **106**, la

Fig. 72.



ventaja de presentar con claridad la íntima relacion que existe entre ciertos teoremas, que de otra manera parecerian totalmente distintos.

Se dice que una curva ó un arco de curva es *convexo* cuando esa curva ó arco de curva queda toda de un mismo lado con respecto á cada una de sus tangentes (**73**). Resulta del número **107** que la circunferencia de círculo es una curva convexa.

Hemos visto en el núm. **95** que una recta cualquiera no puede encontrar á una circunferencia en más de dos puntos. Todo arco de curva convexa goza de la misma propiedad; porque si una recta cortara á ese arco en tres puntos, el primero y el tercero de estos puntos estarian á distinto lado de la tangente en el punto intermedio.

112. Se llama *normal* en un punto de una curva la perpendicular levantada por ese punto á la tangente correspondiente.

La normal en un punto de una circunferencia es, por consiguiente, el radio que pasa por el punto de contacto; es decir, que todas las normales á una circunferencia pasan por el centro.

Resulta de lo dicho que, *por un punto tomado sobre la circunferencia, se puede siempre trazar una normal á esta curva, y no más de una, mientras que por un punto* O *exterior ó interior á la curva (fig. 73) se pueden trazar dos:* la normal OA y la normal OB, que coinciden en direccion.

Toda recta que no es normal á la circunferencia, diremos que le es *oblicua.*

TEOREMA.

113. *Toda oblicua* OE *que parte de un punto* O *no situado en la circunferencia* C, *tiene su longitud comprendida entre las de las dos normales* OA *y* OB, *que parten de aquel mismo punto (fig. 73).*

Sea el punto O interior ó exterior, OA es igual á la diferencia de los lados OC y CE del triángulo OCE; luego la nor-

Fig. 73.

mal OA es menor que la oblicua OE, tercer lado del triángulo OCE (**29**).

De igual manera OB es igual á la suma de los lados OC y CE del mismo triángulo; luego la normal OB es mayor que la oblicua OE, tercer lado del triángulo (**28**).

Escolio.

114. Las dos normales OA y OB representan la menor y la mayor distancia desde el punto O á un punto de la circunferencia dada. La *distancia* desde el punto O á la circunferencia, diremos que es la magnitud OA.

Fig. 74.

TEOREMA.

115. *Dos paralelas interceptan sobre la circunferencia arcos iguales.*

Hay que distinguir tres casos:

1.° Supongamos *(fig. 74)* que las paralelas AB, CD sean secantes, y bajemos desde el centro O á dichas rectas la perpendicular comun OM, cuyo punto de interseccion con la circunferencia está en M. El punto M es (**102**) á un mismo tiempo medio del arco EMF que subtiende la cuerda EF, y medio del arco GMH, que subtiende la cuerda GH; se tiene por consiguiente:

$$\text{arco EM} = \text{arco MF}, \quad \text{arco GM} = \text{arco MH},$$

y restando miembro á miembro,

$$\text{arco EM} - \text{arco GM} = \text{arco FM} - \text{arco HM},$$

es decir,

$$\text{arco EG} = \text{arco FH}.$$

2.° Supongamos *(fig. 75)* que las paralelas AB y CD sean, la primera secante, la segunda tangente. Entonces el radio OK, que termina en el punto de contacto, es (**107**, **110**) perpendicular comun á la tangente CD y á la cuerda EF, que le

es paralela; luego divide al arco EKF, subtendido por esta cuerda, en dos partes iguales y se tiene

$$\text{arco EK} = \text{arco FK}.$$

3.° Supongamos, en fin *(fig. 76)*, que las dos paralelas AB y CD sean tangentes, una en I, la otra en K. Los dos radios OI y OK, perpendiculares á AB y á CD, estarán en prolongacion uno de otro, puesto que las rectas paralelas tienen sus perpendiculares comunes. Los dos arcos KPI, KQI son, por tanto, iguales entre sí é iguales á media circunferencia (*).

TEOREMA.

116. *Por tres puntos* A, B, C, *no situados en línea recta, se puede hacer pasar siempre una circunferencia y no puede hacerse pasar más que una (fig. 77).*

Se quiere demostrar que existe siempre un punto, y solo uno, situado á igual distancia de los tres puntos dados A, B, C.

Para conseguirlo, observaremos que todo punto equidistante de A, B, C debe hallarse en la perpendicular DE, levantada en el punto medio de AB, porque dicha perpendicular es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de A y de B; tambien debe hallarse en la perpendicular FG levantada en el medio de BC, porque esta segunda perpendicular es el lugar de los puntos equidistantes de B y de C. Como dos rectas DE, FG, no pueden tener más que un punto comun, se ve desde luego que no podría existir nunca más que un solo punto equidistante de A, B, C. Digo además que ese punto único existe siempre si, como hemos supuesto, los tres puntos A, B, C no están en línea recta; porque las dos rectas AB y BC deben cortarse, y las DE y FG, que les son respectivamente perpendiculares, deberán tambien encontrarse en un cierto punto O (67, 2.°).

Fig. 75

Fig. 76

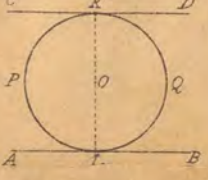


Fig. 77.

(*) NOTA 8.ª

El círculo descrito desde O como centro, con una de las tres rectas iguales OA, OB, OC por radio, pasa por los tres puntos A, B, C, y es el único que puede pasar.

Se enuncia con más brevedad este teorema diciendo: *Tres puntos no situados en línea recta, determinan una circunferencia.*

COROLARIO.

117. La demostracion precedente hace ver que *las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados de un triángulo* ABC *pasan por un mismo punto.* Tambien puede verse con facilidad que *las tres alturas de un triángulo* ABC *(fig. 78),* ó lo que es igual, las perpendiculares AD, BE, CF, bajadas desde los vértices sobre los lados opuestos, *pasan por un mismo punto.* Basta para esto demostrar que las tres alturas son perpendiculares en los puntos medios de los lados del triángulo A′B′C′ formado, trazando por los vértices del triángulo primitivo ABC rectas paralelas á los lados opuestos. Y en efecto, AD, perpendicular á BC, lo es tambien á su paralela B′C′, y las longitudes AB′ y AC′ son iguales entre sí, por ser iguales á BC como partes de paralelas comprendidas entre paralelas.

118. Dos circunferencias no pueden tener tres puntos comunes sin coincidir; de donde se deduce que *dos circunferencias distintas no pueden tener más de dos puntos comunes.*

Cuando dos circunferencias tienen dos puntos comunes, se dice que son *secantes.*

Cuando dos circunferencias no tienen más que un punto comun, se dice que son *tangentes;* el punto comun se llama *punto de contacto.*

TEOREMA.

119. *Cuando dos circunferencias se cortan, la recta* OO′ *que une sus centros es perpendicular á la cuerda comun* AB *y la divide en dos partes iguales (fig. 79).*

Fig. 78.

En efecto, la perpendicular levantada sobre la cuerda comun AB en su punto medio I, debe pasar por el centro de cada una de las dos circunferencias O y O' (**103**).

COROLARIO.

120. Supongamos que la circunferencia O permanece fija, y que la circunferencia O' gira alrededor del punto A, de manera que el segundo punto de interseccion B se aproxime más y más al primero hasta llegar en el límite á confundirse con él, como en la *fig. 80*. Las dos circunferencias, no teniendo ya más que un punto comun, serán tangentes en ese punto. Por otra parte, la recta O O' pasa siempre por entre los puntos A y B, y al llegar estos á confundirse tienen que hallarse en aquella recta. Por último, en virtud del movimiento indicado (**111**) la cuerda comun en el límite se convierte en tangente á cada una de las dos circunferencias en el punto A. Luego:

Cuando dos circunferencias O *y* O' *son tangentes, su punto de contacto* A *está situado en la recta que une los centros, y la perpendicular* CD, *levantada por este punto á dicha recta, es tangente á las dos circunferencias.*

Se llama *ángulo de dos curvas* que tienen un punto comun el ángulo formado por las tangentes á dichas curvas en ese punto. Si el ángulo no es nulo, se dice que las dos curvas se cortan. Si es nulo, es decir, si las dos tangentes se confunden en una sola recta, se dice que las curvas son tangentes. Se llaman *ortogonales* dos curvas que se cortan en ángulo recto.

ESCOLIO.

121. Dos circunferencias distintas pueden tener dos puntos comunes, es decir, cortarse *(fig. 83)* ó tener un solo punto comun, es decir, ser tangentes, ya exteriormente *(fig. 82)*, ya interiormente *(fig. 84)*, ó, en fin, pueden no tener punto alguno comun, siendo exteriores *(fig. 81)* ó interior la una á la otra *(fig. 85)*. Sus posiciones relativas son, pues, en número de cinco.

Fig. 79.

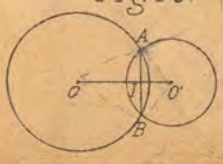


Fig. 80.

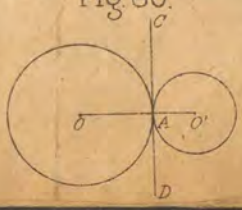
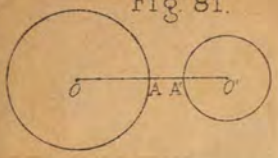


Fig. 81.



TEOREMA.

122. 1.° *Si dos circunferencias* O *y* O′ *son exteriores, la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios.*

2.° *Si son tangentes exteriormente, la distancia de los centros es igual á la suma de los radios;*

3.° *Si se cortan, la distancia de los centros es menor que la suma y mayor que la diferencia de los radios;*

4.° *Si son tangentes interiormente, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios;*

5.° *Si una es interior á otra, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.*

En efecto:

1.° Siendo A y A′ *(fig. 81)* los puntos en que la recta que une los centros corta á las dos circunferencias, se tiene

$$OO' = OA + AA' + O'A', \text{ ó bien } OO' > OA + O'A'.$$

2.° El punto de contacto A *(fig. 82)* está situado entre los dos centros y sobre la recta OO′ que los une. Se tiene, por consiguiente,

$$OO' = OA + O'A.$$

3.° Los dos puntos comunes *(fig. 83)*, hallándose situados fuera de la recta que une los centros (**119**), si unimos uno cualquiera de ellos, B por ejemplo, á los dos centros, se forma un triángulo, en el cual (**28, 29**)

$$OO' < OB + O'B \text{ y } OO' > OB - O'B.$$

4.° El punto de contacto A *(fig. 84)* está situado más allá de los dos centros, en la recta que los une. Luego

$$OA = OO' + O'A, \text{ de donde } OO' = OA - O'A.$$

5.° Si A y A′ *(fig. 85)* son ahora los puntos en que la recta que une los centros corta á las dos circunferencias, tenemos

$$OA = OO' + O'A' + A'A, \text{ de donde } OA > OO' + O'A';$$

Fig. 82.

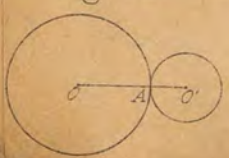


Fig. 83.

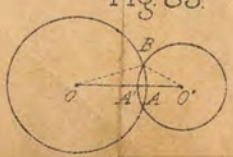


Fig. 84.

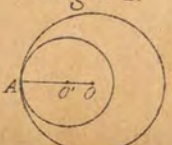
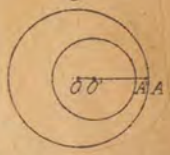


Fig. 85



es decir,

$$OO' < OA - O'A'.$$

COROLARIO.

123. A cada una de las cinco hipótesis hechas corresponde una consecuencia necesaria y que excluye á las demás. Luégo, en virtud del principio general del núm. **40**, las recíprocas de las proposiciones anteriores son todas verdaderas. Hé aquí sus enunciados:

1.° *Si la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios, las dos circunferencias dadas son exteriores la una á la otra.*

2.° *Si la distancia de los centros es igual á la suma de los radios, las dos circunferencias son tangentes exteriormente.*

3.° *Si la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia, las dos circunferencias se cortan.*

4.° *Si la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios, las dos circunferencias son tangentes interiormente.*

5.° *Si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios, una de las dos circunferencias es interior á la otra.*

Así, conociendo los tres números D, R, r, que miden respectivamente la distancia de los centros y los radios de dos circunferencias, se puede sin trazar las circunferencias, y por una simple operacion numérica, conocer su posicion relativa. Por ejemplo, si se tiene $D = 15^{ms}$, $R = 21^{ms}$, $r = 6^{ms}$, podemos afirmar que las dos circunferencias son tangentes interiormente; porque $15 = 21 - 6$, ó lo que es igual, $D = R - r$.

§ III.—Medida de ángulos.

NOCIONES PRELIMINARES (1).

124. Se adquiere la nocion del número entero consideran-

(1) Siendo la medida de la extension uno de los principales objetos de la Geometría, nos ha parecido indispensable tratar aquí, aunque de una manera sucinta, la cuestion general de la medida de las magnitudes.

do objetos distintos é iguales. Vamos á explicar cómo el problema de la medida de las magnitudes conduce á dar más extension á esta primera idea.

En Matemáticas no se consideran más que las magnitudes, cuya igualdad y adicion se puede definir de una manera precisa; tales son, por ejemplo, los ángulos; hemos dicho, en efecto, en el núm. **9**, lo que se entiende por ángulos iguales y por suma de dos ángulos. Una magnitud se dice que es mayor que otra cuando es la suma de esta otra y de una tercera de la misma naturaleza.

Cuando una magnitud es la suma de 2, 3, 4,..., partes, iguales á otra magnitud de la misma especie, se dice que la primera es un *múltiplo* de la segunda y que esta es una *parte alícuota* de la primera.

Dos magnitudes se llaman *conmensurables* entre sí cuando son múltiplos de una misma magnitud de su especie, y esta se dice entónces que es la *comun medida* de aquellas; en el caso contrario, las magnitudes son *inconmensurables* entre sí.

Para medir una magnitud se busca una comun medida á la magnitud propuesta y á otra de su especie, arbitraria pero conocida, que recibe el nombre de *unidad*.

Si esa medida comun es la unidad misma y la magnitud propuesta la contiene, por ejemplo, tres veces, sin dejar resto alguno, se dice que la magnitud está representada por el *número entero* 3.

Si la comun medida es una parte alícuota de la unidad, por ejemplo, si supuesta la unidad dividida en cinco partes iguales, la magnitud propuesta es la suma de tres de estas partes, se dice que la magnitud es los *tres quintos* de la unidad y se expresa por el *número* $\frac{3}{5}$. A este número se le llama *fraccionario*, á fin de distinguirlo de los que hemos considerado antes.

En resúmen, *medir una magnitud conmensurable con la unidad es buscar cuántas veces contiene esa magnitud á la unidad, ó cuántas partes alícuotas de la unidad contiene.* Segun

(1) Chercher ces premières notions dans la Geometrie d'Ortega (page 55 à 62)

que la magnitud es un múltiplo de la unidad, ó un múltiplo de una parte alícuota de la unidad, *el número que expresa su medida es un número entero ó fraccionario.* Recíprocamente, toda magnitud expresada por un número entero ó fraccionario es conmensurable con la unidad, porque es un múltiplo de la unidad ó de una parte alícuota de la unidad. (1)

125. Consideremos ahora una magnitud inconmensurable con la unidad elegida.

Divídase esta unidad en un número cualquiera n de partes iguales entre sí, y menores que la magnitud G que quiere medirse. Tomando 1, 2, 3, 4... de estas partes, se tendrá una serie de magnitudes

$$(1) \qquad A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ \ldots,\ Ak,\ Ak+1,\ldots$$

que pueden llegar á ser mayores que todo límite asignado, y cuyas medidas respectivas son los números

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \frac{4}{n},\ldots,\ \frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n},\ldots$$

Prolongando bastante la serie (1), es claro que encontraremos siempre dos magnitudes consecutivas Ak, y $Ak+1$, entre las cuales estará comprendida la magnitud propuesta G. Si sustituimos G por Ak, ó por $Ak+1$, se cometerá un error menor que la diferencia $Ak+1 - Ak$; es decir, tan pequeño como se quiera, puesto que esa diferencia, *n ésima* parte de la unidad, puede disminuirse indefinidamente tomando n bastante grande.

Siendo G la magnitud límite comun de las magnitudes Ak, $Ak+1$, el número que exprese su medida debe ser, y es *por definicion*, el límite comun de los números $\frac{k}{n}$ y $\frac{k+1}{n}$, que miden respectivamente á Ak y $A\,k+1$ (*); y si tomamos, sea $\frac{k}{n}$, sea $\frac{k+1}{n}$, como número que expresa la medida de G, tendremos un valor que se aproxima al verdadero, por defecto ó por exceso, en menos de $\frac{1}{n}$; es decir, un valor numérico que, haciendo crecer á n, podrá llegar á ser tan próximo como queramos del verdadero.

(*) NOTA 9.ª

126. Un número se llama *conmensurable* ó *inconmensurable*, segun que la magnitud cuya medida expresa es conmensurable ó inconmensurable con la unidad adoptada. Los números conmensurables son los enteros y los fraccionarios.

El resultado de operaciones indicadas con números inconmensurables puede obtenerse con la aproximacion que se quiera, sustituyendo aquellos números por otros conmensurables que se les aproximen tanto como fuere necesario; en otros términos: *el resultado de operaciones indicadas con números inconmensurables es el límite de los resultados que se obtendrian sustituyendo á los números propuestos otros conmensurables que indefinidamente se les aproximen.*

127. Se llama *relacion* de una magnitud A á otra magnitud B de la misma especie el número por el cual es necesario multiplicar la segunda para obtener la primera. Se designa esta relacion por $\frac{A}{B}$.

128. *La relacion de dos magnitudes* A *y* B *de la misma especie, es igual al número que mide la primera cuando se toma la segunda por unidad.*

En efecto, si la relacion dada es, por ejemplo $\frac{3}{5}$, la primera magnitud es el producto de la segunda por $\frac{3}{5}$ (**127**); pero multiplicar una magnitud por $\frac{3}{5}$ es tomar sus $\frac{3}{5}$ partes; luego la primera magnitud es los $\frac{3}{5}$ de la segunda, y, por consecuencia (**124**), $\frac{3}{5}$ es el número que expresa la primera magnitud cuando se toma la segunda por unidad.

129. Si la relacion de A á B, es decir **(127)**, si el número por el cual debe multiplicarse B para obtener A es inconmensurable, designémosle por r, y llamemos m el número que mide A, tomando B por unidad. Sean además $\frac{k}{n}$ y $\frac{k+1}{n}$ dos valores aproximados en menos de $\frac{1}{n}$, uno por defecto, otro por exceso de la relacion r. Se tendrá **(127)**

$$B\frac{k}{n} < A < B\frac{k+1}{n}.$$

El número m, medida de A, está, pues, comprendido (**125**) entre los números $\frac{k}{n}$ y $\frac{k+1}{n}$, que miden las dos magnitudes $B\frac{k}{n}$, $B\frac{k+1}{n}$, B siendo la unidad. Luégo los números m y r, hallándose ambos comprendidos entre dos números $\frac{k}{n}$ y $\frac{k}{n}+\frac{1}{n}$, cuya diferencia puede llegar á ser tan pequeña como se quiera, siendo n bastante grande, no podrian tener diferencia asignable.

130. Resulta de esto que, *cuando dos magnitudes* A *y* B *han sido medidas con una misma unidad* C, *se obtiene su relacion dividiendo el número* α, *que mide la primera, por el número* ε, *que mide la segunda.*

En efecto, se tienen, en virtud del teorema anterior, las dos relaciones

$$A = C.\,\alpha,\ B = C.\,\varepsilon,\ \text{y de aquí } A = B\frac{\alpha}{\varepsilon}.$$

El cociente $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ expresa, por tanto (**127**), la relacion entre A y B.

De esta manera nos vemos conducidos á llamar *relacion de dos números* el cociente de su division, y se demuestra en Aritmética que las reglas del cálculo de las fracciones que tienen sus términos enteros son igualmente aplicables á estas relaciones ó fracciones $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, en que α y ε son números cualesquiera. Por ejemplo, no se alteran estas relaciones multiplicando los dos términos por un mismo número; para multiplicarlas hay que multiplicar sus términos, etc.

131. Cuando entre dos magnitudes de distinta naturaleza hay una dependencia tal que la relacion de dos valores cualesquiera de la primera sea igual á la relacion de los dos valores correspondientes de la segunda, se dice que aquellas magnitudes son *proporcionales.*

Fig. 86.

132. Se llama *ángulo en el centro* el que tiene su vértice en el centro de un círculo, y *ángulo inscrito* el ángulo formado por dos cuerdas que se cortan sobre la circunferencia.

TEOREMA.

133. *En el mismo círculo ó en círculos iguales:*

1.° *Dos ángulos en el centro iguales, interceptan arcos iguales;*

2.° *Si un ángulo en el centro es la suma de otros dos ángulos en el centro, el arco interceptado por aquel es la suma de los arcos interceptados por éstos (fig. 86).*

1.° Sean AOB, A'O'B', dos ángulos en el centro iguales; digo que los arcos correspondientes AB y A'B' serán iguales. En efecto, trazando las cuerdas AB, A'B', se forman dos triángulos AOB, A'O'B', que son iguales, por tener un ángulo igual comprendido entre lados iguales, á saber: el ángulo AOB igual al A'O'B' por hipótesis, y los lados $OA = O'A'$, $OB = O'B'$, por radios de círculos iguales. Luego la cuerda AB es igual á la cuerda A'B', y de consiguiente (**100**), los arcos AB y A'B', subtendidos por esas cuerdas, son iguales entre sí.

2.° Sean A'O'B' y BOC dos ángulos en el centro: traspongamos el primero y coloquémosle en AOB á continuacion del segundo, de manera de formar (**9**) un ángulo AOC que sea la suma de los dos ángulos propuestos. El arco ABC será evidentemente la suma de los dos arcos AB y BC; y como los arcos AB y A'B' son iguales, puesto que corresponden á ángulos en el centro iguales, el arco ABC será la suma de los arcos A'B' y BC.

TEOREMA.

134. *Los ángulos en el centro de un círculo son proporcionales á los arcos correspondientes;* en otros términos, *en el mismo círculo, ó en círculos iguales, la relacion* $\frac{a}{a'}$ *de dos án-*

gulos en el centro es igual á la relacion $\frac{b}{b'}$ *de los arcos que esos ángulos interceptan.*

En efecto, supongamos que la relacion $\frac{a}{a'}$ de los dos ángulos sea $\frac{3}{5}$; es decir, que el ángulo a sea los $\frac{3}{5}$ del ángulo a'. Designando por α la quinta parte del ángulo a', se tendrá

$$a = 3\alpha \text{ y } a' = 5\alpha.$$

Si ahora llamo ε al arco interceptado por el ángulo α, es claro que á los ángulos en el centro

$$\alpha + \alpha = 2\alpha,\ 2\alpha + \alpha = 3\alpha,\ 3\alpha + \alpha = 4\alpha,\ 4\alpha + \alpha = 5\alpha,$$

corresponden respectivamente (**133, 2.°**) los arcos

$$\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,\ 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,\ 3\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon,\ 4\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon.$$

Mas, por hipótesis, los arcos que corresponden á los ángulos en el centro 3α ó a y 5α ó a' son b y b'; luego

$$b = 3\varepsilon \text{ y } b' = 5\varepsilon,$$

de donde (**130**)

$$\frac{b}{b'} = \frac{3}{5} = \frac{a}{a'}.$$

Escolio.

135. El razonamiento que precede no se aplica tan sólo á los ángulos en el centro y á los arcos que interceptan; de igual manera se demostraria en general el teorema siguiente:

Dos magnitudes son proporcionales una á otra cuando á dos valores cualesquiera iguales de la primera corresponden dos valores iguales de la segunda, y cuando á la suma de dos valores

cualesquiera de la primera corresponde un valor que sea la suma de los valores correspondientes de la segunda.

En efecto, sean a y a' dos valores cualesquiera de la primera magnitud, y b y b' los dos valores correspondientes de la segunda. Supongamos que la relacion $\frac{a}{a'}$ sea, por ejemplo, $\frac{3}{5}$; es decir, que a sea los $\frac{3}{5}$ de a'. Designando por α la quinta parte de a', se tendrá

$$a = 3\alpha \text{ y } a' = 5\alpha.$$

Si ahora llamamos ε el valor de la segunda magnitud correspondiente al valor α de la primera, es claro que á los valores

$$\alpha + \alpha = 2\alpha,\ 2\alpha + \alpha = 3\alpha,\ 3\alpha + \alpha = 4\alpha,\ 4\alpha + \alpha = 5\alpha$$

de la primera magnitud corresponden respectivamente, en virtud de la ley admitida, los valores

$$\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,\ 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,\ 3\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon,\ 4\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon$$

de la segunda magnitud. Mas, por hipótesis, los valores de la segunda magnitud, que corresponden á los valores 3α ó a y 5α, ó a' de la primera, son b y b'; luego

$$b = 3\varepsilon,\ b' = 5\varepsilon,$$

de donde

$$\frac{b}{b'} = \frac{3}{5} = \frac{a}{a'}.$$

Si la relacion $\frac{a}{a'}$ es inconmensurable, sean $\frac{k}{n}$ y $\frac{k+1}{n}$ dos valores aproximados de esa relacion en menos de $\frac{1}{n}$, el primero por defecto, el segundo por exceso. Se tendrá

$$\frac{k}{n}a' < a < \frac{k+1}{n}a',$$

de donde, designando por α la *nésima* parte de a',

$$k\alpha < a < (k+1)\,\alpha \text{ y } a' = n\alpha.$$

Pero si β es el valor de B, que corresponde al valor α de A, á los valores $k\alpha$, $(k+1)\,\alpha$, $n\alpha$, de A corresponderán respectivamente los valores $k\beta$, $(k+1)\,\beta$, $n\beta$, de B. Y puesto que, segun el enunciado, á mayor valor de A corresponde necesariamente mayor valor de B,

$$k\beta < b < (k+1)\,\beta \text{ y } b' = n\beta,$$

es decir,

$$\frac{k}{n}b' < b < \frac{k+1}{n}b' \text{ ó } \frac{k}{n} < \frac{b}{b'} < \frac{k+1}{n}.$$

Por consiguiente, las dos relaciones $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, hallándose comprendidas entre dos números $\frac{k}{n}$ y $\frac{k}{n}+\frac{1}{n}$, que difieren entre sí (para valores bastante grandes de n) tan poco como se quiera, no pueden tener ellas mismas diferencia asignable.

RECÍPROCAMENTE, *si dos magnitudes son proporcionales*: 1.°, la relacion

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

nos enseña que para $a = a'$ se tiene $b = b'$; ó de otra manera: *que á valores iguales de la primera magnitud corresponden valores iguales de la segunda;* 2.°, la misma relacion nos da

$$\frac{a+a'}{a'} = \frac{b+b'}{b'},$$

es decir, *que á la suma de dos valores cualesquiera de la primera magnitud corresponde la suma de los dos valores correspondientes de la segunda.*

Así, *correspondencia en la igualdad y correspondencia en la suma*, tales son las dos condiciones necesarias y suficientes de la proporcionalidad de dos magnitudes. Si una sola de esas dos condiciones está satisfecha, *no hay proporcionalidad;* como

sucede, por ejemplo, para el arco y su cuerda: á arcos iguales en el mismo círculo, corresponden cuerdas iguales (**99**); pero la cuerda BC de la suma de dos arcos *(fig. 87)* es menor (**28**) que la suma AB + AC de las cuerdas de estos arcos.

TEOREMA.

136. *Todo ángulo tiene la misma medida que el arco interceptado por sus lados en una circunferencia de radio cualquiera descrita desde su vértice como centro, con tal que se tome para unidad de ángulos el ángulo en el centro que intercepta sobre esa circunferencia el arco elegido para unidad de arcos.*

En efecto, sean *(fig. 87)* AOB el ángulo que se quiere medir, y AB el arco interceptado por él en la circunferencia de radio arbitrario OA; si AC es la unidad de arcos, el ángulo correspondiente AOC será, por hipótesis, la unidad de ángulos. Se tiene (**134**)

$$\frac{\text{AOB}}{\text{AOC}} = \frac{\text{arco AB}}{\text{arco AC}}.$$

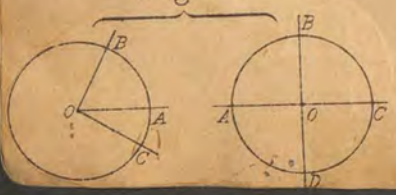
Ahora bien, la primera relacion es igual al número que sirve de medida al ángulo AOB (**128**), y la segunda es igual al número que mide el arco AB. Luego en el sistema de unidades adoptado, el número que mide el ángulo AOB es el mismo que mide el arco AB.

Como este teorema es de uso frecuente, suele enunciarse de una manera más breve pero incorrecta. Se sobreentiende la condicion relativa á que las unidades se correspondan, y además se dice que el *ángulo tiene por medida*, en lugar de decir *tiene la misma medida que;* así llegamos á este enunciado usual: *todo ángulo en el centro, tiene por medida el arco comprendido entre sus lados.*

Escolio.

137. Cuando se toma el ángulo recto por unidad, la unidad de arco es el cuarto de la circunferencia ó *cuadrante;* porque

Fig. 87.



si el ángulo en el centro AOB es recto *(fig. 87)*, los cuatro ángulos AOB, BOC, COD, DOA, formados por los dos diámetros BOD, AOC, son rectos y por tanto iguales; los cuatro arcos AB, BC, CD, DA son tambien iguales entre sí, y cada uno de ellos vale la cuarta parte de la circunferencia.

TEOREMA.

138. *Todo ángulo inscrito en un círculo, tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

Sea BAC un ángulo inscrito en un círculo O. Para demostrar que este ángulo tiene por medida la mitad del arco BC comprendido entre sus lados, conviene distinguir tres casos:

1.° El centro O está sobre uno de los lados AC del ángulo propuesto *(fig. 88)*. Tracemos el radio BO; el triángulo BOA, por ser isósceles, tiene los ángulos B y A iguales; y como su suma es igual al ángulo externo BOC, el ángulo A es mitad del BOC; pero este último tiene por medida el arco BC, puesto que es un ángulo en el centro; luego el ángulo propuesto BAC tiene por medida la mitad del arco BC.

2.° El centro O se halla en el interior del ángulo BAC *(fig. 89)*. Tracemos el diámetro AOD; el ángulo BAC es la suma de los ángulos BAD, DAC, que, en virtud del primer caso, tienen respectivamente por medida $\frac{1}{2}$ DB y $\frac{1}{2}$ DC; la suma de estos dos arcos, es decir, la mitad del arco BOC, es, por tanto, la medida del ángulo BAC.

3.° El centro O queda fuera del ángulo BAC *(fig. 90)*. Tracemos el diámetro AOD; el ángulo BAC es la diferencia de los ángulos BAD, CAD, que en virtud del primer caso tienen respectivamente por medida $\frac{1}{2}$ BD y $\frac{1}{2}$ CD; la diferencia de estos dos arcos, es decir, la mitad del arco BC, es, por tanto, la medida del ángulo propuesto BAC.

COROLARIOS.

139. Supongamos *(fig. 90)* que, permaneciendo fijo el lado AC, la cuerda AB gire alrededor del vértice A hasta con-

Fig. 88.

Fig. 89

Fig. 90

vertirse en la tangente AT; en todas las posiciones de la cuerda AB, el ángulo inscrito BAC tendrá por medida la mitad del arco correspondiente BC; luego en el límite, *el ángulo* TAC, *formado por una tangente* AT *y una cuerda* AC, *que parte del punto de contacto, tiene por medida la mitad del arco* AC *comprendido entre sus lados.*

Puede tambien demostrarse este teorema sin acudir á la consideración de límites. Basta, por ejemplo, observar que el ángulo TAC es el exceso del ángulo recto TAD sobre el ángulo inscrito CAD; su medida, es, pues, el exceso de la mitad de la semicircunferencia ABD sobre la mitad del arco CD, ó en resúmen, la mitad del arco AC.

140. Se llama *segmento* la porcion de círculo comprendida entre un arco y su cuerda. A cada cuerda AB corresponden dos segmentos ACB, AMB *(fig. 91).*

Fig. 91

Se dice que un ángulo *está inscrito en un segmento* cuando su vértice está situado en el arco del segmento y sus lados pasan por las extremidades de la cuerda. Los ángulos ACB, AEB, están inscritos en el segmento ACB, y el ángulo AMB está inscrito en el segmento AMB.

Todos los ángulos inscritos en el mismo segmento son iguales, puesto que tienen la misma medida; así, los ángulos AEB, ACB, son iguales por tener ámbos por medida la mitad del arco AMB.

Todo ángulo inscrito en uno de los dos segmentos determinados por una cuerda, es suplemento de cualquier ángulo inscrito en el otro segmento. Por ejemplo, los ángulos ACB, AMB, son suplementarios, porque sus medidas $\frac{1}{2}$ AMB y $\frac{1}{2}$ ACB, sumadas, forman la mitad de la circunferencia.

Todo ángulo inscrito en un segmento es agudo, recto ú obtuso, segun que el segmento es mayor, igual ó menor que el semicírculo, puesto que en tales casos el arco comprendido entre los lados del ángulo es respectivamente menor, igual ó mayor que la semicircunferencia.

Se dice que *un segmento de círculo es capaz de un ángulo dado* cuando los ángulos inscritos en el segmento son igua-

les al ángulo considerado; así, *el segundo capaz de un ángulo recto es un semicírculo.*

TEOREMA.

141. *Todo ángulo* BAC, *formado por dos secantes que se cortan en el interior del círculo, tiene por medida la semisuma de los arcos* BC *y* DE, *comprendidos entre los lados del ángulo y las prolongaciones de esos lados (fig. 92).*

Fig. 92

En efecto, trazando DC se ve que el ángulo BAC, exterior al triángulo ACD, es igual (**76**) á la suma de los ángulos inscritos ADC, ACD, que tienen respectivamente por medida $\frac{1}{2}$ BC y $\frac{1}{2}$ DE.

TEOREMA.

142. *Todo ángulo* BAC, *formado por dos secantes que se cortan fuera del círculo, tiene por medida la semidiferencia del arco cóncavo* BC *y del arco convexo* DE *comprendidos entre sus lados (fig. 93).*

En efecto, trazando DC se ve que el ángulo BDC, exterior al triángulo DAC, es la suma de los ángulos A y C; por tanto, el ángulo A es el exceso del ángulo BDC sobre el ángulo C; su medida es, pues, el exceso de $\frac{1}{2}$ BC sobre $\frac{1}{2}$ DE, es decir, $\frac{1}{2}$ (BC — DE).

Fig. 93

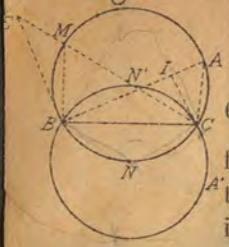
Haciendo girar uno de los lados, ó los dos, alrededor del vértice A hasta que lleguen á convertirse en tangentes á la circunferencia, se ve que el teorema subsiste para el ángulo formado por una tangente y una secante que se cortan fuera del círculo, y para el ángulo de dos tangentes.

Escolio.

143. *En la porcion de plano situada por encima de la recta* BC, *el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve esta recta bajo un ángulo dado, es un arco de círculo que pasa por las extremidades* B *y* C *de la recta (fig. 94).*

En efecto, sean A un punto del lugar y BMACN la circun-

Fig. 94.



ferencia determinada por los tres puntos A, B y C. 1.° desde todo punto M del arco BMAC se ve la recta BC bajo un ángulo igual á BAC (**140**); 2.°, desde todo punto I tomado en el interior del segmento BMAC se ve la recta BC bajo un ángulo BIC mayor que BAC, puesto que (**141**) su medida excede á la mitad del arco BNC; 3.°, desde todo punto E exterior al segmento BMAC, y situado por encima de la recta BC, se ve esta recta bajo un ángulo BEC menor que BAC, porque su medida es menor que la mitad del arco BNC (**142**). El arco BMAC es, pues, el lugar buscado.

Resulta de aquí que el arco BA'C, sobre el cual se aplica el arco BMAC, cuando se dobla la figura por BC, es, debajo de esta recta, el lugar de los puntos desde los cuales se ve la recta BC bajo el ángulo dado.

Luego *el lugar de los puntos desde los cuales se ve una recta* BC *bajo un ángulo dado se compone de dos arcos de círculo iguales entre sí, y que pasan por las extremidades* B *y* C *de dicha recta.*

Notemos además que los dos arcos BNC, BN'C, reunidos, constituyen el lugar de los puntos desde los cuales se ve la misma recta BC bajo un ángulo suplementario del ángulo considerado (**140**).

Si el ángulo considerado es recto, los dos arcos BAC, BA'C son las semicircunferencias descritas sobre BC como diámetro. Luego *el lugar de los puntos desde los cuales se ve una recta bajo ángulo recto es la circunferencia descrita sobre la recta como diámetro.*

TEOREMA.

144. *En todo cuadrilátero convexo inscrito en un círculo, los ángulos opuestos son suplementarios.*

En efecto, consideremos, por ejemplo, los ángulos opuestos B y D *(fig. 95)*. La cuerda AC determina dos segmentos ADC, ABC, y hemos visto (**140**) que un ángulo D inscrito en el segmento superior es el suplemento del ángulo B inscrito en el inferior.

Fig. 95.

Fig. 96.

RECÍPROCAMENTE, *si en un cuadrilátero convexo* ABCD *(figura 95) dos ángulos opuestos* B *y* D *son suplementarios, el cuadrilátero es inscriptible;* en otros términos, la circunferencia determinada por los tres puntos A, B, C, pasa por el cuarto vértice D.

En efecto, el vértice D es un punto situado encima de AC, y desde él se ve la cuerda AC bajo un ángulo suplementario del ángulo B; además sabemos que el arco AMC es el lugar de los puntos del plano que gozan de esa propiedad (**143**).

§ IV.—Construccion de ángulos y de triángulos.

145. Los dos instrumentos principales entre los usados para la construccion gráfica de las figuras, son la *regla* y el *compás*. Su empleo es bien conocido, y no necesitamos detenernos en explicarlo.

Antes de usar una regla conviene verificarla. Para esto se traza una línea ACB *(fig. 96)* desde un extremo al otro de una regla, haciendo resbalar el lápiz á lo largo de uno de sus bordes. Despues se invierte la regla, colocándola en la nueva posicion indicada por la figura, y se hace resbalar nuevamente el lápiz á lo largo del mismo borde, marcando así la línea AC'B. Segun que las dos líneas ACB, AC'B, coincidan exactamente ó se separen, el borde usado de la regla es rectilíneo ó curvilíneo; en otros términos, la regla está ó no bien construida. El espesor de la regla no debe exceder de tres milímetros.

Un buen compás debe tener sus puntas finas é iguales; debe abrirse y cerrarse suavemente, pero sin excesiva facilidad. Para evitar que las puntas del compás formen agujeros demasiado grandes, conviene fijar el papel sobre un tablero, pegando los cuatro ángulos.

Se hace primero el dibujo de lápiz; despues se *pasa de tinta* por medio de un *tiralíneas*, cuyas puntas deben ser iguales,

y que debe tenerse perpendicularmente al plano del papel. Los *datos* y los *resultados* se representan por un trazado *lleno* ó continuo; las *líneas de construccion*, es decir, aquellas que sirven para deducir de los datos los resultados, se representan por líneas discontinuas, que se forman de pequeños trazos y puntos colocados alternadamente.

Por último, el papel debe ser de bastante espesor, de grano fino y fabricado expresamente.

146. En la práctica, cuando se determina una recta por dos puntos, conviene que estos dos puntos no estén muy próximos uno de otro; sin ese cuidado, el error más pequeño en la posicion de uno de los puntos produciria un error sensible en la direccion de la recta.

De igual manera, cuando un punto está determinado por la interseccion de dos rectas, debe evitarse que estas rectas se corten bajo ángulo muy pequeño; de otra manera, el espesor inevitable de las líneas dejaria alguna incertidumbre sobre la verdadera posicion del punto de encuentro.

TEOREMA.

147. *Encontrar la mayor medida comun á dos líneas rectas.*

Sean A y B dos rectas *conmensurables entre sí* (**124**), y B la menor de ellas. La determinacion de su máxima comun medida se funda en los dos principios siguientes:

1.° *Si* B *es parte alícuota de* A, B *es evidentemente la mayor medida comun de* A *y* B.

2.° *Si* A *contiene* m *veces á* B, *más un resto* R *menor que* B, *la mayor medida común de* A *y de* B *es la misma que la de* B *y* R. Tenemos, en efecto,

$$A = mB + R;$$

ahora bien, toda medida comun de A y B, siendo parte alícuota de B, lo es tambien de mB, y, por consiguiente, de $A - mB$ ó de R. Inversamente, toda medida comun de B y

R, por ser parte alícuota de B, lo es de mB, y por tanto, de mB + R, ó lo que es igual, de A. Luego todas las medidas comunes á A y B son las mismas que las de B y R, y en particular la máxima comun medida de aquellas dos debe serlo tambien de estas.

Se llevará, pues, B sobre A tantas veces como sea posible; si no queda resto, B será la máxima comun medida que se busca; si queda un resto R, el problema se halla reducido á encontrar la mayor medida comun de B y de R. Se llevará R sobre B tantas veces como sea posible; si no queda resto, R será la mayor medida comun que se busca; si hay resto R', buscaremos la máxima comun medida de R y R'.

Es fácil probar que, siguiendo de esta manera, se llegará á un resto que tiene que ser parte alícuota del precedente. En efecto, en toda division el dividendo es á lo menos igual al divisor mas el resto; el resto es, por otra parte, siempre menor que el divisor; luego el resto es menor que la mitad del dividendo. De aquí se deduce que en la determinacion de la máxima comun medida de A y B, el primer resto es menor que $\frac{A}{2}$; el tercer resto, menor que la mitad del primero; es decir, menor que $\frac{A}{4}$; el quinto, menor que la mitad del tercero, ó menor que $\frac{A}{8}$, y así sucesivamente. La operacion no podrá, pues, prolongarse indefinidamente, porque llegariamos á un resto menor que la máxima comun medida supuesta; y esto es absurdo, puesto que, en virtud de las consideraciones anteriores, la máxima comun medida debe dividir exactamente á los restos sucesivos.

Llegaremos, pues, á un resto que será parte alícuota del precedente, y este resto será la mayor medida comun que buscábamos.

148. Recíprocamente, si aplicando el procedimiento que acabamos de indicar á dos rectas dadas se llega á un resto que

esté contenido un número exacto de veces en el que le precede, las dos rectas consideradas serán conmensurables entre sí, y este resto será entonces su máxima comun medida.

Así, supongamos que se haya encontrado sucesivamente

$$A = B + R,\ B = 5R + R',\ R = 2R' + R'',\ R' = 3R'',$$

tendremos

$$R = 7R'',\ B = 38R'',\ A = 45R'',$$

y la relacion de las dos rectas A y B estará representada por el número fraccionario $\frac{45}{38}$. Por otra parte, siendo R'' la mayor medida comun de R' y R'', será tambien, en virtud de lo que precede, la mayor medida comun de A y B.

Escolio.

149. De todo lo dicho resulta que el procedimiento anterior, aplicado á dos rectas inconmensurables entre sí, conducirá á una serie interminable de operaciones.

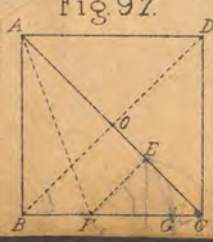
Esta consecuencia, *absolutamente rigurosa en teoría,* no se verifica en la práctica, porque las rectas llegan á ser inapreciables con el compás. Pero si bien es imposible comprobar de esta manera, ó mas en general, por un procedimiento mecánico cualquiera que dos rectas son inconmensurables, se puede á veces, cuando las rectas resultan de una construccion bien definida, demostrar geométricamente su inconmensurabilidad, apoyándose en la teoría anterior y buscando la ley de los restos sucesivos.

Vamos, por ejemplo, á demostrar que *la diagonal* AC *y el lado* AB *de un cuadrado* ABCD *son dos líneas inconmensurables entre sí.*

Puesto que el lado AB *(fig. 97)* es menor que la diagonal AC y mayor que su mitad AD, se ve desde luego que si llevamos sobre AC la longitud AE igual á AB, el resto EC será menor que AB.

Comparemos ahora este resto EC con el lado AB ó su igual BC. Si se traza EF paralela á BD, el triángulo FEC, rectángulo en E, será isósceles, puesto que el ángulo EFC es igual á su correspondiente DBC, y por tanto á ECF. Luego si en este triángulo, como en su análogo ABC, tomamos FG igual á EC, el resto GC será menor que EC. Además, los triángulos rectángulos ABF, AEF, que tienen la hipotenusa comun y un lado igual, son iguales, y de consiguiente BF es igual á FE, ó á EC, ó á FG. Luego, en resumen, *el lado* BC *contiene dos veces á* EC, *mas un resto* CG *menor que* EC.

Fig. 97.



Este último resultado, enunciado de un modo general, prueba que en todo triángulo rectángulo isósceles el cateto contiene dos veces la diferencia entre la hipotenusa y el cateto, mas un resto menor que esa diferencia. Luego á su vez *el lado* EC *contendrá dos veces* GC, *mas un nuevo resto menor que* GC, y así podríamos continuar indefinidamente.

Si, pues, aplicamos á las rectas AC y AB la regla dada en el número **147**, cada resto contendrá dos veces al siguiente, mas un nuevo resto menor que él; de suerte que la operacion no tendrá término. Las dos rectas consideradas serán, por tanto, inconmensurables entre sí.

PROBLEMA.

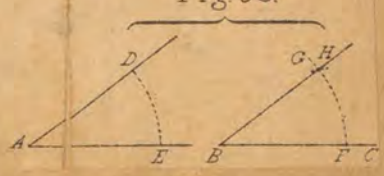
150. *Por un punto* B *de una recta* BC, *trazar una segunda recta que forme con la primera un ángulo igual á un ángulo dado (fig. 98).*

Desde el punto A como centro, con una abertura de compás arbitraria, pero bastante grande, describase un arco de círculo que corte en D y E á los lados del ángulo dado; con la misma abertura, y desde el mismo punto B como centro, describase un segundo arco de círculo GF que corte en F á la recta BC. Tómese con el compás la longitud de la cuerda DE (es inútil para el objeto trazar esta cuerda), y desde el punto F como centro, con esa abertura, describase un arco de círculo que corte en H al arco GF; la recta BH será la recta pedida.

En efecto, los arcos HF y DE, por tener radios iguales y cuerdas iguales, son iguales (**100**); por consiguiente, los ángulos en el centro HBF, DAE, que corresponden á esos arcos, son tambien iguales (**136**).

151. La circunferencia suele considerarse dividida en 360 partes iguales que se llaman *grados*, el grado en 60 partes iguales que se llaman *minutos*, el minuto en otras 60 partes iguales que se llaman *segundos*. De esta manera la circunferencia contiene $360.60 = 21600$ minutos, ó $21600.60 = 1296000$ segundos; la semicircunferencia contiene 180 grados, ó 10800 minutos, ó 648000 segundos; por último, el cuadrante contiene 90 grados, ó 5400 minutos, ó 324000 segundos.

Fig. 98.



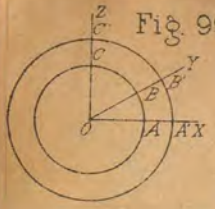


Fig. 99.

Un arco cualquiera puede evaluarse en grados, minutos y segundos de la circunferencia. Así se dice: un arco de 36 grados, 15 minutos, 21 segundos, y se escribe: arco de 36°, 15′, 21″.

Dos arcos AB y A′B′ *(fig. 99)*, descritos entre los lados del mismo ángulo XOY, desde su vértice como centro, contienen el mismo número de grados, minutos y segundos. En efecto, la relacion del arco AB al cuadrante AC es la misma que la relacion del arco A′B′ al cuadrante A′C′, puesto que cada una de esas relaciones es igual á la que existe entre el ángulo XOY y el ángulo recto XOZ (**136**). Ahora bien, como el cuadrante AC vale 90 grados de la circunferencia OA, y el cuadrante A′C′ vale 90 grados de la circunferencia OA′, los arcos AB y A′B′ valdrán el mismo número de grados, minutos y segundos de sus circunferencias respectivas.

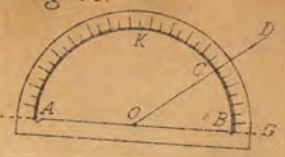
Llámase, en virtud de lo anterior, ángulo de 36°, 15′, 21″ el que intercepta entre sus lados, cualquiera que sea la circunferencia descrita desde su vértice como centro, un arco de 36°, 15′, 21″.

Cuando se conoce el número de grados, minutos y segundos de un ángulo, se obtiene su relacion con el ángulo recto tomando la relacion de ese número de grados, minutos y segundos con 90 grados; pero téngase cuidado de evaluar los dos ángulos en unidades de la misma especie, ya sean grados, minutos ó segundos. Así, puesto que 36°, 15′, 21″ equivalen á 130521 segundos, y 90 grados contienen 324000 segundos, la relacion entre el ángulo de 36°, 15′, 21″ y el ángulo recto está expresada por la fraccion

$$\frac{130521}{324000} = \frac{43507}{108000}.$$

152. Para conocer el número de grados de un ángulo, ó para construir un ángulo cuyo número de grados se conoce, empléase un instrumento llamado *trasportador*. Consiste en un semicírculo de talco ó de cobre, cuyo borde circular ó *limbo* está dividido en 180 partes iguales ó grados; en los tras-

Fig. 100.



portadores que tienen un decímetro de radio, la division se lleva hasta medios grados. El centro se indica con un pequeño agujero.

Para medir un ángulo DOG *(fig. 100)*, se coloca el instrumento de manera que su centro coincida con el vértice del ángulo, y que el diámetro AB, que va de cero á 180 grados, se aplique sobre uno de los lados OG. El número de grados del ángulo es entónces el que corresponde al punto en que el otro lado OD atraviesa el limbo.

Para trazar por el punto O de una recta OG otra recta OD que forme con la primera un ángulo dado, de 49° por ejemplo, se coloca el instrumento de manera que su centro esté en O, y que su diámetro AB coincida con la direccion OG; despues se marca el punto C del papel, sobre el cual cae la division 49 del limbo; y despues de quitar el trasportador, se traza la recta OC.

PROBLEMA.

153. *Conocidos dos ángulos* α *y* ε *de un triángulo, construir el tercero* γ.

Trácese una recta indefinida AB *(fig. 101)*: por uno de sus puntos O trácense una recta OC que forme con OA el ángulo COA igual á α, y otra recta OD que forme con OB el ángulo BOD igual á ε. El ángulo COD será el buscado, porque la suma de los tres ángulos formados en el punto O por encima de AB vale dos rectos (**20, 75**).

Escolio.

154. Vamos á construir un triángulo cuando se conocen: 1.°, un lado y dos ángulos; 2.°, dos lados y el ángulo comprendido; 3.°, dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos; 4.°, los tres lados. En estos cuatro problemas designaremos los tres lados por *a*, *b*, *c*, y los ángulos respectivamente opuestos por A, B, C, de manera que el ángulo A será el opuesto al lado *a*, el ángulo B al lado *b*, el ángulo C al lado *c*.

Fig. 101.

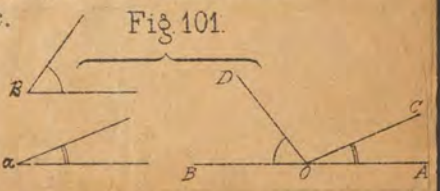


Fig. 102.

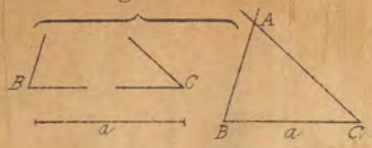
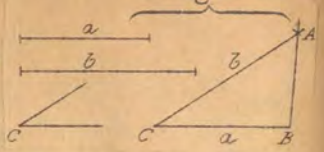


Fig. 103.



PROBLEMA.

14 **155.** *Construir un triángulo cuando se conocen un lado y dos ángulos.*

Pueden darse los dos ángulos B y C adyacentes al lado *a*, ó bien el ángulo A opuesto y uno de los adyacentes; este último caso se reduce al primero una vez construido el tercer ángulo (**153**).

Supongamos, pues, conocidos el lado *a* y los dos ángulos adyacentes B y C.

Despues de trazar una recta BC *(fig. 102)* igual al lado *a*, trácese por el punto B la recta BA, que forme con BC, y por encima de ella, un ángulo ABC igual al ángulo dado B; del mismo modo trácese por el punto C, y por encima de BC, la recta CA que forme con BC el ángulo ACB igual al otro ángulo dado C. El punto de encuentro A de esas dos rectas será el tercer vértice del triángulo buscado.

Para que el problema tenga solucion es necesario y basta que las dos rectas BA, CA se corten; es decir (**66**), que la suma de los ángulos dados B y C sea menor que dos rectos.

PROBLEMA.

156. *Construir un triángulo conociendo dos lados* a, b, *y el ángulo comprendido* C.

Trácese una recta BC *(fig. 103)* igual á *a;* por el punto C trácese despues la recta CA, que forme con la primera el ángulo ACB igual al ángulo dado C; sobre la recta CA, y á partir del punto C, llévese una longitud igual á *b;* en fin, únanse los puntos A y B y se tendrá el triángulo buscado.

PROBLEMA.

157. *Construir un triángulo conociendo dos lados* a, b, *y el ángulo* B *opuesto á uno de ellos.*

Trácese una recta BC *(fig. 104)* igual á *a*, y por el punto

Fig. 104.

B, la BA que forme con la primera el ángulo ABC igual al ángulo dado B; despues, haciendo centro en C y con una abertura de compás igual á *b*, describase un arco de círculo. Si A es un punto de interseccion del lado BA y del arco de círculo, bastará trazar AC para tener un triángulo que satisfaga á las condiciones exigidas.

158. *Discutamos* ahora este problema, es decir, busquemos las condiciones á que deben satisfacer los datos para que el problema sea posible, y en este caso, las diferentes soluciones que pueden existir.

1.° *Si el ángulo* B *es agudo (fig. 104)*, para que el problema tenga solucion es necesario que el arco del círculo encuentre al lado BA; en otros términos, que el lado *b* sea á lo menos igual á la perpendicular CD bajada desde el punto C sobre BA.

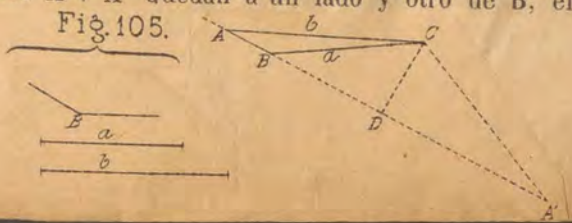
Si el lado *b* es igual á esa perpendicular CD, el círculo toca á la recta BA en D, y no hay más que una solucion: es el triángulo rectángulo BCD.

Si el lado *b* está comprendido entre la longitud de la perpendicular CD y la del lado *a*, la circunferencia corta á la recta BA en dos puntos A y A' situados encima de B, á uno y otro lado de D, hay entónces dos soluciones distintas: los triángulos ABC y A'BC.

En fin, si el lado *b* es mayor que *a*, el punto A' cae debajo de B, y el triángulo correspondiente debe ser desechado puesto que su ángulo en B no es ya el ángulo dado, sino su suplementario; no existe, pues, más que una solucion; el triángulo ABC.

2.° Si *el ángulo* B *es obtuso (fig. 105)*, la perpendicular CD no cae ya en el ángulo B, sino en su suplemento (**43**); y para que el problema sea posible, es decir, para que el arco de círculo corte á la recta BA por encima de B, se necesita que el lado *b* sea mayor que *a*; esto podía haberse previsto, porque en todo triángulo al mayor ángulo debe oponerse el mayor lado. Por otra parte, cuando esa condicion está satisfecha, los puntos A y A' quedan á un lado y otro de B; el triángulo

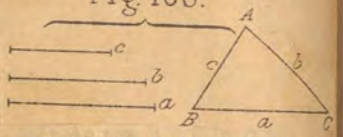
Fig. 105.



A' BC debe ser desechado, porque su ángulo en B es el suplemento del ángulo dado; no queda, pues, mas que una solucion: es el triángulo ABC.

3.° Si *el ángulo* B *es recto*, el problema es imposible cuando *b* es menor ó igual á *a*; y admite una solucion única si *b* es mayor que *a*.

Fig. 106.



159. *Construir un triángulo conociendo los tres lados* a, b, c.

Trácese *(fig. 106)* una recta BC igual á *a*; despues, haciendo centro en C con una abertura de compás igual á *b*, descríbase por encima de BC un arco de círculo; desde B como centro, y con una abertura de compás igual á *c*, trácese tambien por encima de BC, otro arco de círculo. Uniendo el punto A de interseccion de esos dos arcos con los puntos B y C, se tiene el triángulo pedido ABC.

Para que el problema tenga solucion es necesario y basta que los dos arcos de círculo se corten, y para esto que el mayor lado, *a* por ejemplo, sea menor que la suma y mayor que la diferencia de los otros dos, que son los radios. Este resultado está conforme con el escolio del núm. **30**.

§ V.—Trazado de paralelas y de perpendiculares.

PROBLEMA.

160. *Por un punto dado* A, *tomado fuera de una recta* BC, *trazar una paralela á dicha recta (fig. 107).*

La recta BC y la paralela buscada AD deben formar (**65**), con una secante cualquiera AC trazada por el punto A, dos ángulos alternos internos DAC, ACB iguales entre sí. De esta consideracion y de la solucion del problema del núm. **150**, resulta la construccion siguiente:

Fig. 107.

Fig. 108.

Desde el punto A como centro, con una abertura de compás arbitraria, pero bastante grande, descríbase un arco de círculo DC; desde el punto C, con la misma abertura, otro arco de círculo AB, que pasará necesariamente por A. Tómese con el compás la magnitud de la cuerda AB, y desde el punto C como centro, con esa abertura descríbase un arco de círculo que corte en D al arco DC. Tirando la recta AD, se tendrá la paralela pedida.

Es claro, en efecto, que de esta manera se ha construido un ángulo DAC igual á ACB. Puede evitarse el trazado de la recta AC, que sólo ha servido para la demostracion.

161. En la práctica se usa generalmente para resolver este problema un instrumento especial que lleva el nombre de *escuadra*. Es una hoja de madera cortada en forma de triángulo rectángulo, y tiene una pequeña abertura circular para facilitar su empleo. Una buena escuadra debe tener sus bordes perfectamente rectilíneos y un espesor de dos milímetros á lo más.

Para comprobar una escuadra BAC *(fig. 108)*, se aplica uno de los lados AB del ángulo recto contra una regla de exactitud conocida, y se traza con el lápiz una recta segun el lado AC. Hecho esto se da vuelta á la escuadra, como indica la figura, y se traza una nueva recta AC'; segun que las dos rectas así obtenidas coinciden ó se separan, el ángulo BAC es ó no recto; en otros términos, la escuadra es ó no exacta.

Para trazar con auxilio de la escuadra *(fig. 109)* por un punto C una paralela á una recta AB, se coloca en coincidencia con dicha recta AB la hipotenusa de la escuadra; en seguida se apoya la regla GH contra el cateto DF, y manteniendo fija la regla, se hace deslizar la escuadra hasta que la arista, que habíamos puesto coincidiendo con AB, llegue á pasar por el punto C; en esta posicion se traza á lo largo de esa arista la recta E'D', que será la paralela buscada. En efecto, los ángulos correspondientes E'D'F', EDF son iguales, y por tanto las rectas E'D', ED son paralelas.

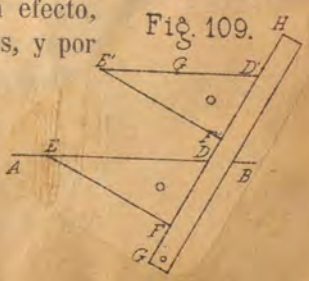


Fig. 109.

Este método no requiere que uno de los ángulos de la escuadra sea recto. Basta que las aristas sean rectas; esta ventaja y la facilidad de la operacion, explican la bondad del procedimiento.

Fig. 110.

PROBLEMA.

162. *Trazar una perpendicular á una recta dada en su punto medio.*

Sean *(fig. 110)* A y B dos puntos dados; se quiere levantar una perpendicular en el punto medio de la recta que los une.

La perpendicular en el punto medio de una recta, siendo el lugar geométrico de los puntos equidistantes de las extremidades de esa recta (**48**), basta obtener dos puntos, que estén cada uno á igual distancia de A y de B, y despues unir esos dos puntos. De aquí la siguiente construccion:

Desde A como centro, con un radio sensiblemente mayor que la mitad de AB, descríbase una circunferencia; desde B como centro, con la misma abertura de compás, descríbase otra circunferencia; estas dos circunferencias se cortarán, puesto que, siendo iguales los dos radios y cada uno de ellos mayor que la mitad de AB, la distancia de los centros AB está comprendida entre la suma y la diferencia de los radios.

Cada uno de los puntos de interseccion C y D estará equidistante de A y de B, y trazando CD se tendrá la perpendicular pedida.

Fig. 111.

En la práctica no se describen las circunferencias completas; basta trazar dos arcos de cada una, colocados á distinto lado de AB, en la region en que se sabe que tendrá lugar la interseccion *(fig. 111)*. El procedimiento explicado no supone que la recta AB está trazada.

Los dos problemas siguientes están comprendidos en el anterior:

1.° *Dividir una recta en dos partes iguales;*

2.° *Describir una circunferencia sobre una recta dada como diámetro.*

El segundo se reduce, en efecto, á determinar el *punto medio* de la recta, y ese punto es el centro de la circunferencia buscada.

PROBLEMA.

163. *Dividir un arco de círculo ó un ángulo en dos partes iguales (fig. 112).*

Fig. 112.

1.° Sea AB el arco propuesto; sabemos que la perpendicular trazada en el punto medio de una cuerda divide al arco en dos partes iguales (**103**); aplíquese, pues, la construccion del núm. **162**. Si el centro O del arco está dado, basta determinar un solo punto equidistante de A y de B, y trazar despues OE.

2.° Sea AOB el ángulo propuesto. Desde O como centro, con un radio arbitrario, descríbase un arco AB, comprendido entre los lados del ángulo, y la recta OE, que divide ese arco en dos partes iguales, será evidentemente la bisectriz del ángulo AOB.

Aplicando este mismo procedimiento á las dos mitades, despues á las mitades de esas mitades, y así sucesivamente, llegaremos á dividir el arco y el ángulo en 4, 8, 16, etc., partes iguales.

164. Puede suceder que el vértice del ángulo esté fuera de la hoja de dibujo; en otros términos, á veces se necesita *hallar la bisectriz del ángulo de dos rectas* AB *y* CD, *que no pueden prolongarse hasta su punto de interseccion.*

Trácese *(fig. 113)* una perpendicular cualquiera EP sobre AB, y otra FQ á CD. Sobre esas perpendiculares tómense dos magnitudes iguales HF y GE; despues, por H, tírese una paralela á CD, y por G una paralela á AB; el punto de encuentro M de estas dos paralelas es un punto de la bisectriz buscada. En efecto, el punto M está (**53**) á distancias iguales GE y HF de las dos rectas propuestas. Tomando otras dos longitudes iguales sobre EP y FQ, se obtendría un segundo punto M′ de la bisectriz, y no faltaría más que trazar MM′.

Fig. 113.

PROBLEMA.

165. *Describir una circunferencia que pase por tres puntos dados* A, B, C, *no situados en línea recta (fig. 77).*

El centro O, debiendo encontrarse (**103**) en la interseccion de las perpendiculares levantadas, una en el punto medio de AB, otra en el medio de BC, bastará para tener ese centro repetir dos veces la construccion del núm. **162**. Es inútil trazar las rectas AB y BC. Una vez conocido el punto O, se describirá la circunferencia buscada haciendo centro en él con una abertura de compás igual á una de las tres rectas iguales OA, OB, OC.

Para hallar el centro de una circunferencia trazada, se toman en ella tres puntos á capricho A, B, C, y se aplica la solucion del problema anterior.

166. En la práctica, la circunferencia que debe pasar por los tres puntos A, B, C, tiene á veces un radio demasiado grande para que se pueda trazarla con un compás ordinario, aun usando una pieza auxiliar que se llama *alargadera*. En tal caso, la circunferencia se obtiene por puntos. Hé aquí el procedimiento más usado *(fig. 114):*

Desde los puntos A y C, como centros con igual radio, se describen dos circunferencias, sobre las cuales, á partir de los puntos P y Q, se toman magnitudes iguales, Pa, ab, bc, ..., Pa', $a'b'$, $b'c'$, ...; $Q\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$..., $Q\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$. Se trazan dos radios correspondientes $A\alpha$, $C\alpha$, uno por encima de AB, otro por debajo de CB, y su interseccion M es un punto de la circunferencia buscada. En efecto, los triángulos AMI, BIC, tienen dos ángulos iguales, á saber: los ángulos en I, opuestos por el vértice, y el ángulo MAI, igual á BCI, por interceptar arcos iguales en circunferencias iguales; luego el ángulo AMC es igual al ángulo ABC, y, por consiguiente (**143**), el punto M está sobre la circunferencia determinada por los tres puntos A, B, C. De igual manera, trazando dos radios, tales como Ab' y $C\beta'$, el primero debajo de AB, el otro encima de CB, se obtiene un nuevo punto N de la circunferencia, porque el ángulo BAN, siendo igual al suplemento $BC\beta'$ del ángulo BCN, el cuadrilátero ABCN es inscriptible (**144**).

Fig. 114.

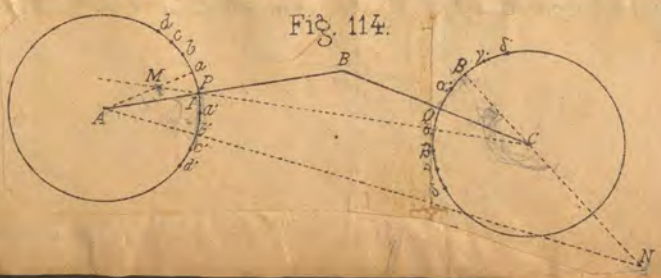


Fig. 115.

PROBLEMA.

167. *Trazar por un punto dado* C *una perpendicular á una recta dada* AB.

Hay que distinguir dos casos:

1.° El punto dado C está sobre la recta AB *(fig. 115)*. Tomando á uno y otro lado de C dos longitudes iguales CA y CB sobre la recta dada, el problema queda reducido al del número **162**. Pero aquí la recta AB está trazada y se conoce su punto medio; de manera que basta hallar un solo punto D de la perpendicular. Se hará, pues, la siguiente construccion:

Con una abertura de compás arbitraria, pero bastante grande, tómense sobre la recta dada, á partir de C, dos distancias, iguales CA y CB. Auméntese la abertura del compás, y desde los puntos A y B descríbanse sucesivamente, con esa nueva abertura, dos arcos de círculo por encima de AB. Uniendo el punto C con el de interseccion D de esos arcos, se tendrá la perpendicular buscada.

Fig. 116.

2.° El punto C está fuera de la recta AB *(fig. 116)*. Trazando desde C como centro un arco de círculo que corte á la recta AB en dos puntos A y B, volvemos al problema del número **162**, con la ventaja de conocer ya un punto C de la perpendicular y no necesitar más que otro. De aquí la construccion siguiente:

Desde C como centro, con un radio bastante grande, descríbase un arco de círculo que corte á la recta dada en dos puntos A y B. Desde estos dos puntos como centros, con una abertura de compás mayor que la mitad de AB, descríbanse dos arcos por debajo de AB. Uniendo C con el punto de encuentro E de esos arcos, se tendrá la perpendicular pedida.

168. Si se quiere dibujar con precision, no debe usarse *directamente* la escuadra para trazar perpendiculares. Hay, no obstante, un caso frecuente en que el uso, en cierto modo *indirecto*, de ese instrumento, conduce á muy buenos resultados:

es aquel en que *por varios puntos de una misma recta se quieren trazar perpendiculares á ella.* Se empieza por trazar con cuidado una de esas perpendiculares valiéndose del compás, y despues, con la escuadra, se trazan por los demás puntos dados paralelas á esa perpendicular. De igual manera se procede cuando *se quiere levantar una perpendicular en la extremidad de una recta que no puede prolongarse;* se traza con la escuadra, por este punto extremo, la paralela á una perpendicular ya trazada por medio del compás en otro punto cualquiera de la misma recta.

§ VI.—Problemas sobre las tangentes.

Fig. 117.

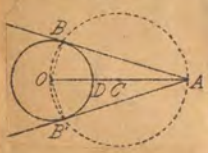
PROBLEMA.

169. *Trazar por un punto dado* A *una tangente á un círculo dado* O.

Hay que distinguir dos casos:

1.° El punto A *(fig. 117)* está sobre la circunferencia. Entónces basta levantar por el punto A una perpendicular al radio OA (**107**).

Fig. 118.



2.° El punto A está fuera del círculo *(fig. 118)*. Supongamos el problema resuelto; sean AB una tangente trazada por A al círculo O, y B su punto de contacto. Siendo la tangente perpendicular en la extremidad del radio, desde el punto de contacto B se ve la recta AO bajo un ángulo recto ABO. Luego (**143**) el punto B está situado en la circunferencia descrita sobre AO como diámetro; debiendo además hallarse en la circunferencia dada O, estará en la interseccion de esas dos circunferencias, y por tanto habrá dos soluciones.

Así, para resolver el problema descríbase una circunferencia sobre AO como diámetro, y uniendo el punto A con los puntos B y B′, en que esa circunferencia corta á la propuesta, se tendrán las dos tangentes BA y B′A.

COROLARIO.

170. *Las dos tangentes* AB *y* AB′ *que pueden trazarse á un círculo* O *desde un punto exterior* A *son iguales entre sí, y la recta que une el punto exterior con el centro del círculo divide en dos partes iguales el ángulo* BAB′ *de las dos tangentes, así como el ángulo* BOB′ *de los radios* BO, B′O, *que terminan en los puntos de contacto.*

En efecto, los dos triángulos rectángulos OBA, OB′A son iguales, por tener la misma hipotenusa y los catetos OB y OB′ iguales entre sí como radios del mismo círculo. Se tiene, pues,

$$AB = AB', \text{ áng. } BAO = \text{áng. } B'AO, \text{ áng. } BOA = \text{áng. } B'OA.$$

ESCOLIO.

171. Para trazar á un círculo una tangente paralela á una recta dada, se traza el diámetro perpendicular á dicha recta, y las extremidades de este diámetro son los puntos de contacto de las dos tangentes que satisfacen á la condicion impuesta.

Fig. 119.

PROBLEMA.

172. *Inscribir un círculo en un triángulo dado* ABC.

Se dice que un polígono está circunscrito á un círculo cuando cada uno de sus lados es tangente á la circunferencia; el círculo se dice entonces que está *inscrito* en el polígono.

Sentado esto, sea ABC *(fig. 119)* el triángulo propuesto, en el cual se quiere inscribir un círculo. Supongamos el problema resuelto. La recta AO, que une el centro del círculo buscado con el punto de interseccion A de las dos tangentes AD y AE, es, en virtud del problema anterior, la bisectriz del ángulo A del triángulo. De la misma manera se ve que el punto O debe hallarse sobre las bisectrices BO y CO de los ángulos B y C. Por consiguiente, trácense dos de esas bisectrices, y desde su punto de encuentro O como centro, con una abertura de compás igual á la longitud comun de las perpendiculares OD, OE, OF, bajadas desde ese punto á los lados,

se describirá una circunferencia tangente en D, F, E á los lados del triángulo propuesto.

Escolio.

173. Resulta de esta demostracion que las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo concurren en un punto. De una manera análoga podemos ver que las bisectrices de los ángulos exteriores de un triángulo ABC *(fig. 120)* forman un segundo triángulo $O'O''O'''$, cuyos vértices están situados sobre las bisectrices de los ángulos interiores. Cada uno de estos vértices es, en efecto, el centro de un círculo *ex-inscrito;* es decir, de un círculo tangente á uno de los lados del triángulo ABC y á las prolongaciones de los otros dos. Existen, pues, en general cuatro circunferencias tangentes á tres rectas dadas.

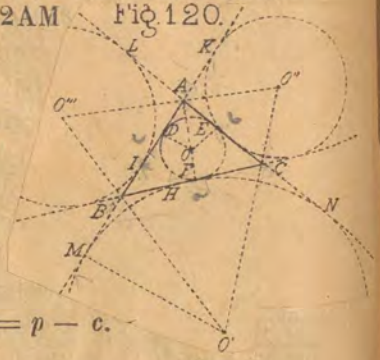
Si se designan por a, b, c los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, y por p el semiperímetro de ese triángulo, se tendrá para las distancias del vértice A á los puntos en que la recta AB toca á los cuatro círculos:

$$AM = p,\ AD = p - a,\ AI = p - b,\ AK = p - c.$$

En efecto, las igualdades

$$2p = AB + BH + HC + CA = AB + BM + CN + CA = AM + AN = 2AM$$

Fig. 120.



conducen desde luego á

$$AM = p.$$

De la misma manera se obtiene

$$BK = p,$$

de modo que

$$AK = BK - AB = p - c.$$

Asimismo obtendríamos

$$AL = AI = p - b.$$

En fin, se tiene

$$2AD = AD + AE = AB - BD + AC - CE = AB - BF + AC - CF = AB + AC - BC = (2p - a) - a = 2p - 2a,$$

es decir,

$$AD = p - a.$$

PROBLEMA.

174. *Describir sobre una recta dada* AB *un segmento capaz de un ángulo dado.*

Fig. 121.

Supongamos el problema resuelto, y sea AFB *(fig. 121)* el segmento buscado; la tangente BC en el punto B de este segmento forma con la cuerda AB un ángulo ABC, que, como todo ángulo AFB inscrito en el segmento, tiene **(139)** por medida la mitad del arco situado por debajo de AB; ese ángulo es, pues, igual al ángulo dado.

Se puede, por consecuencia, trazar la tangente BC independientemente de la circunferencia desconocida, construyendo en el punto B, por debajo de AB, el ángulo ABC igual al dado. El centro del círculo que buscamos tiene que hallarse ahora en la interseccion de la perpendicular OE levantada por el medio de la cuerda AB, y de la perpendicular BO levantada en B á la tangente BC. Para describir el círculo, colóquese la punta del compás en O y dése al instrumento una abertura igual á OB.

PROBLEMA.

175. *Trazar una tangente comun á dos círculos* O *y* O'.

Supongamos el problema resuelto.

1.° Sea AA' una tangente comun *exterior;* es decir, que deje á los dos círculos del mismo lado *(fig. 122)*. Si por el centro O' de uno de los círculos se imagina una paralela O'B á AA' esta paralela será, como AA', perpendicular al radio OA. Deberá, pues, ser tangente en B al círculo descrito, desde O como centro, con OB por radio; además, siendo la figura ABO'A' un rectángulo, se tiene

$$AB = A'O', \text{ y, por tanto, } OB = OA - AB = OA - O'A'.$$

Fig. 122.

Hé aquí la construccion que deducimos: descríbase una circunferencia, desde O como centro, con un radio igual á la diferencia de los radios de los dos círculos dados, y por el punto O′ trácese una tangente á esa circunferencia auxiliar; si B es el punto de contacto obtenido, tírese la recta OBA, y la O′A′ paralela á OA; uniendo los puntos A y A′, tendremos la tangente buscada.

Para que el problema sea posible, es necesario y suficiente que el punto O′ no se halle en el interior del círculo auxiliar.

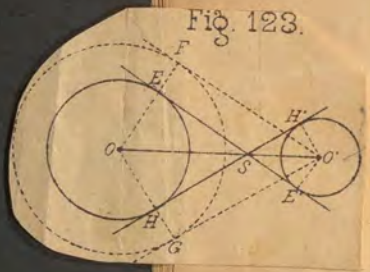
Debe, pues, verificarse que

$$OO' \geqq OB; \text{ es decir, } OO' \geqq OA - O'A'.$$

lo cual equivale á decir **(122)** que uno de los dos círculos propuestos O y O′ no debe ser interior al otro.

Si los dos círculos O y O′ son exteriores, tangentes exteriormente ó secantes, se tiene $OO' > OA - O'A'$; el punto O es exterior al círculo auxiliar, y se pueden trazar desde él dos tangentes á dicho círculo; luego los dos círculos propuestos tienen en cada uno de esos casos dos tangentes comunes exteriores.

Fig. 123.



Si los dos círculos son tangentes interiormente, se tiene $OO' = OA - O'A'$; el punto O′ está sobre la circunferencia auxiliar; no se puede trazar por este punto más que una tangente al círculo, y, por consiguiente, los dos círculos propuestos O y O′ tienen una sola tangente comun exterior.

2.° Sea EE′ una tangente comun *interior;* es decir, que deje á distinto lado los dos círculos O y O′ *(fig. 123)*. Imaginando, como en el caso anterior, una paralela O′F á EE′, se verá que esta paralela es tangente á un círculo concéntrico con el círculo O y descrito con un radio OF igual á la suma $OE + O'E'$ de los radios de los círculos dados. De aquí se deduce la construccion siguiente: descríbase desde el centro O de uno de los círculos una circunferencia cuyo radio sea igual á la suma de los radios de los círculos propuestos, y desde el punto O′ trácese una tangente á este círculo auxiliar; si F es el punto de contacto, tírese OEF, trácese O′E′ paralela á OF, y uniendo los puntos E y E′ tendremos la tangente buscada.

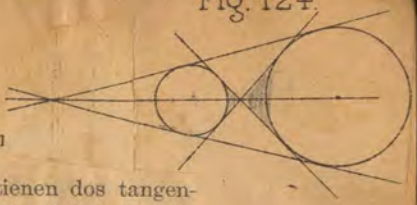
Para que el problema tenga solucion es necesario y suficiente que el punto O′ no esté en el interior del círculo auxiliar; se debe, pues, tener

$$OO' \geqq OF, \text{ ó bien } OO' \geqq OE + O'E';$$

esto equivale á decir **(122)** que los dos círculos dados deben ser exteriores uno á otro, ó tangentes exteriormente.

En el primer caso se tiene $OO' > OE + O'E'$; el punto O′ es exterior al círculo auxiliar; se pueden entonces trazar dos tangentes á dicho

Fig. 124.



círculo por O′, y los dos círculos propuestos O y O′ tienen dos tangentes comunes interiores. En el segundo caso, $OO' = OE + O'E'$; el punto O′ está sobre la circunferencia auxiliar; no se puede trazar por dicho punto más que una tangente á ese círculo, y, por consiguiente, los dos círculos propuestos O y O′ tienen una sola tangente comun interior.

176. En *resúmen:*

Dos círculos exteriores *(fig. 124)* tienen *cuatro* tangentes comunes: dos exteriores, dos interiores.

Dos círculos tangentes exteriormente *(fig. 125)* tienen tres tangentes comunes: dos exteriores, una interior.

Dos círculos secantes *(fig. 126)* tienen dos tangentes comunes, que son exteriores.

Dos círculos tangentes interiormente *(fig. 127)* tienen una sola tangente comun, que es exterior.

Si un círculo es interior á otro, no tienen tangente comun.

Se ve fácilmente que las *tangentes interiores, lo mismo que las exteriores, se cortan en un punto de la recta que une los centros, la cual es bisectriz comun de sus ángulos, y que dichas tangentes son iguales entre sí* **(170).**

§ VII.—Apéndice.

177. En la redaccion de los tres párrafos que preceden se presentan diferencias esenciales.

Los problemas resueltos en el § IV son muy sencillos: su resolucion en cierto modo intuitiva, no es en el fondo más que la aplicacion directa de un teorema conocido. Por esto nos hemos limitado á enunciar primero la solucion y demostrarla brevemente despues, sin explicar cómo hemos llegado á ella.

En el § VI los problemas son más complicados: su resolucion exige algun esfuerzo intelectual. A fin de iniciar al lector en esta clase de ejercicios, hemos supuesto resuelto el problema y hemos construido la figura; examinándola despues atentamente, hemos mostrado cómo las incógnitas estaban relacionadas con los datos, lo cual nos ha conducido al descubrimiento de la construccion pedida.

La primera marcha constituye la *síntesis,* en la que *se prueban las verdades conocidas;* la segunda es el análisis, en la que *se descubren las verdades desconocidas.* El análisis es el método de invencion; haciendo uso de él *se descubre.* La síntesis es un método de exposicion más rápido que instructivo; no debe emplearse exclusivamente más que en el caso en que la solucion es evidente. En tésis general, conviene comenzar toda buena exposicion por un análisis, y no dejar á la síntesis más

Fig. 125.

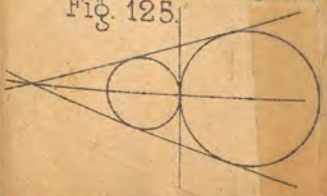


Fig. 126.

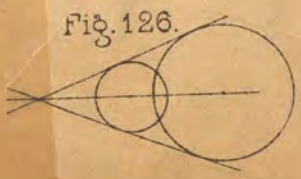


Fig. 127.

que el esclarecimiento de los detalles; los dos métodos se ayudan así mutuamente, guiando el uno la marcha y afirmándola el otro. Así hemos procedido en el § V.

178. Es imposible indicar un método cierto y general para resolver todos los problemas de Geometría. Son muy varias las cuestiones que se pueden proponer para que un método único conduzca siempre á su solucion; hay, sin embargo, ciertos procedimientos particulares que se aplican directamente á las cuestiones de un género determinado. Vamos á indicar ligeramente los que se refieren á los dos primeros libros.

179. Se procede siempre (salvo las cuestiones que por su extrema sencillez se resuelven inmediatamente) por *sustituciones sucesivas*. Se reduce el problema propuesto á otro que á su vez se reduce á un tercero, y así sucesivamente, hasta que se llegue á un problema conocido ó cuya solucion sea inmediata.

Así, por ejemplo, el problema de trazar por un punto una paralela á una recta se reduce á la construccion de un ángulo igual á otro dado; así tambien todas las cuestiones sobre perpendiculares se reducen á la primera de ellas, que es *trazar una perpendicular en el punto medio de una recta;* así el problema de la tangente comun á dos círculos se reduce á la construccion de una tangente por un punto exterior, etc., etc.

Hé aquí otro ejemplo ménos sencillo:

Construir un triángulo equilátero de perímetro máximo entre todos aquellos cuyos lados pasan por tres puntos dados A, B, C.

El vértice M del triángulo pedido M N P *(fig. 128)* debe estar situado en el segmento capaz de 60° descrito sobre A B; análogamente, en el segmento capaz de 60° descrito sobre A C debe hallarse el vértice N. Se obtendrá, pues, un triángulo equilátero circunscrito al triángulo dado A B C, describiendo sobre A B y A C dos segmentos capaces de 60°, trazando luego una secante arbitraria M A N por el punto A, y, por último, las rectas M B y N C, que darán por su interseccion el tercer vértice P. Entre todos los triángulos que pueden obtenerse por esta construccion se trata de determinar aquel cuyo lado M A N es un máximo.

El problema queda, pues, reducido al siguiente: *Trazar por un punto* A *comun á dos circunferencias* C *y* D *la secante máxima (fig. 129).* Siendo M A N una secante cualquiera, si se bajan sobre ella las perpendiculares C P y D R desde los centros C y D, la recta P R será la mitad de la secante, y bastará, por tanto, buscar el máximo de P R ó de la paralela D L, que es igual á ella. Pero en el triángulo rectángulo D L C se tiene D L $<$ C D; C D es, pues, el máximo de P R, y este máximo corresponde á la posicion en que la secante M A N es paralela á la línea de los centros C D de las dos circunferencias

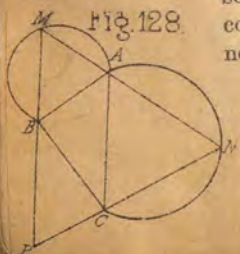


Fig. 128

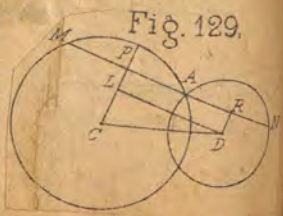


Fig. 129

A veces la cuestion á que se reduce la propuesta es más general que ésta. Entónces hay que escoger entre las soluciones del segundo problema las que convengan á la primera cuestion y dejar á un lado las soluciones extrañas. Así, por ejemplo, en el núm. **157** hemos reducido el problema propuesto al de hallar sobre la recta BA un punto A cuya distancia al C sea igual á *b;* pero para el problema que se considera, la recta $AC = b$ debe estar colocada en el ángulo dado B, por lo cual hemos descartado en la discusion **(158)** las rectas comprendidas en el ángulo adyacente y suplementario del B.

El método de sustituciones sucesivas no es tan solo un método geométrico: es la marcha natural del espíritu cuando trata de establecer una proposicion cualquiera cuya evidencia no es inmediata. Así se ofrece este método en la demostracion de la mayor parte de los teoremas de Geometría. Para probar la verdad de una proposicion A, se reduce á otra B, que á su vez se reduce á una tercera C, y así sucesivamente hasta que se llegue á una proposicion M, evidente por sí misma ó anteriormente establecida. Pero para la exactitud del razonamiento se requiere la *reciprocidad* entre dos proposiciones consecutivas cualesquiera de la serie de A B, C, ..., M; ó en otros términos, la verdad de cada una de las proposiciones que se consideren debe implicar la verdad de la precedente y la siguiente, sin lo cual la verdad de la proposicion final M no implicaria la de la primera A.

Cuando se ha formado la cadena de proposiciones, se puede exponer de dos maneras la demostracion: ó siguiendo el órden mismo A, B, C, ..., M de la invencion, ó volviendo, al contrario, desde la proposicion M y recorriendo la serie de todas ellas en el órden inverso M, ..., C, B, A. Por la primera manera se hace el *análisis* del teorema; por la segunda se presenta la *síntesis.*

180. El procedimiento que consiste en doblar una figura ó ciertas partes de ella alrededor de una recta convenientemente escogida, que recibe el nombre de *eje,* permite á veces descubrir por la simple inspeccion relaciones que no serian percibidas sin este artificio. La teoría de las perpendiculares y oblicuas ofrece de esto un ejemplo notable.

Cuando se dobla una figura alrededor de un eje XY, uno cualquiera M de sus puntos llega á otra posicion M', que puede obtenerse bajando desde el punto M una perpendicular á XY y prolongándola en una longitud igual á la distancia entre el punto y el eje. Se dice que el punto M' es el *simétrico* de M con respecto á XY, y el procedimiento de que hablamos suele llamarse *método por simetría.*

Hé aquí dos ejemplos de este método:

1.° *Dados dos puntos* A *y* B *y una recta* XY, *determinar sobre ésta un punto* M *tal que la suma* AM + BM *sea un mínimo.*

Fig. 130.

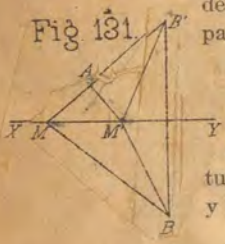
Si los dos puntos dados están, como A y B' *(fig. 130)*, situados á diferente lado de XY, la recta AB' da, por su interseccion con XY, el punto pedido M.

Si los dos puntos A y B se hallan á un mismo lado de XY *(fig. 130)*, se observa que todo punto M' de XY equidista del punto B y de su simétrico B' con respecto á XY **(48)**; el camino AM'B' es pues, igual á AM'B, y basta buscar el mínimo de AM'B; pero estando situados A y B' á diferente lado de XY, el punto pedido M será el de interseccion de AB' con XY. Nótese que *las dos partes* AM *y* MB *del camino mínimo están igualmente inclinadas sobre* XY. En efecto, el punto M permanece fijo en el rebatimiento de la figura alrededor de XY, y B cae sobre su simétrico B'; luego el ángulo BMY coincide con el ángulo B'MY; y como este último es opuesto por el vértice á AMY, se ve que los ángulos AMX, BMY, son iguales.

2.° *Dados dos puntos* A *y* B *y una recta* XY, *hallar sobre ésta un punto* M *tal que* BM — AM *sea un máximo.*

Si los dos puntos se hallan como A y B' *(fig. 131)* á un mismo lado de XY, la recta AB' corta al eje XY en el punto pedido M, puesto que para cualquier otro punto M' del eje XY se tiene

Fig. 131.



$$B'M' - AM' < B'A = B'M - AM.$$

Si los puntos están situados á diferente lado del eje *(fig. 131)*, sustituyendo el punto B por su simétrico B', se ve que basta unir A con B' y hallar el punto M de interseccion de esta recta con el eje.

181. Entre los varios modos de demostracion, es digno de mencion especial el *método de reduccion al absurdo,* que consiste en mostrar que la no existencia de la proposicion que se quiere establecer conduce á un absurdo manifiesto ó á consecuencia contradictoria con el supuesto. Lo hemos empleado repetidas veces; en el núm. **57** nos ha servido para probar la existencia de las paralelas.

Este método se usa principalmente en la demostracion de las recíprocas. Supongamos, por ejemplo, que se trata de la recíproca de esta proposicion:

En todo cuadrilátero circunscrito ABCD, *la suma de dos lados opuestos* AB + CD *es igual á la de los otros dos* AD + BC *(fig. 132).*

Se empezará por establecer esta proposicion directa del modo siguiente:

Siendo E, F, G, H los cuatro puntos de contacto de los lados del cuadrilátero con la circunferencia inscrita en él, se tiene **(170)**

$$AE = AH,\ BE = BF,\ CG = CF,\ DG = DH;$$

Fig. 132.

de donde, sumando miembro á miembro,

$$AB + CD = AD + BC.$$

Pasando ahora á la recíproca se dirá:
Si en un cuadrilátero ABCD *se cumple la igualdad*

$$AB + CD = AD + BC,$$

este cuadrilátero es circunscriptible (fig. 132); es decir, que si se traza un círculo tangente á los tres lados AD, AB, BC, cuyo centro será el punto de interseccion de las bisectrices de los ángulos A y B **(170)**, este círculo será necesariamente tangente al cuarto lado CD del cuadrilátero; porque si así no fuese, se podría trazar por el punto D una tangente DI á ese círculo, cuya tangente cortaria en I al lado BC. Siendo entonces circunscrito el cuadrilátero DABI, se tendria

$$AB + DI = AD + BI, \text{ y tambien } CD < DI + IC,$$

de las cuales se deduciria

$$AB + CD < AD + BC,$$

lo que es contrario al supuesto.

Cuando, despues de haber demostrado una proposicion directa, se emplea para la recíproca el método de reduccion al absurdo, este queda reducido á demostrar la proposicion contraria **(19)**.

En la demostracion que precede se prueba efectivamente que *en todo cuadrilátero no circunscriptible las sumas de los lados opuestos no son iguales.* Y por la regla general del núm. **40**, las recíprocas de las dos proposiciones directa y contraria habrán de verificarse necesariamente.

182. Entre todos los métodos particulares, ninguno hay tan general y fecundo como el *método por interseccion de lugares geométricos.*

La mayor parte de los problemas de Geometría se reducen, en último análisis, á la determinacion de un punto por ciertas condiciones. ¿Se trata, por ejemplo, de hacer pasar una circunferencia por tres puntos dados? Se reduce á determinar el centro.

¿Se trata de trazar una tangente á una circunferencia por un punto exterior? Hay que buscar un punto de contacto. Así, dejando á un lado una de las condiciones dadas, las otras no bastarán para determinar el punto y habrá una infinidad de puntos que satisfagan á estas condiciones, cuyos puntos formarán un cierto lugar geométrico, en el cual habrá de estar el que se busca. Haciendo despues abstraccion de otra condicion, se tendrá un nuevo lugar geométrico, que cortará al primero en el punto pedido.

La elegancia y el valor práctico de la solucion obtenida dependen,

como es natural, de la hábil eleccion de las dos condiciones de que se prescinde sucesivamente, porque de esto dependen la naturaleza de los dos lugares geométricos, la facilidad de su investigacion y la sencillez de su construccion. En los problemas de elementos de Geometría plana, en los cuales todas las construcciones se hacen con la regla y el compás, los únicos lugares geométricos que deben aparecer son la recta y el círculo.

Hemos visto ya numerosos ejemplos de este método:

Para hallar el centro de un círculo que pase por tres puntos dados A, B, C, se hace primero abstraccion de uno de los puntos, C por ejemplo, y se halla para lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A y B la perpendicular levantada en su punto medio á AB; haciendo despues abstraccion del punto A, se tiene la perpendicular levantada en el punto medio de BC, como lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por B y C. Estas dos perpendiculares se cortan en el centro pedido.

En el problema de *trazar una tangente á un círculo de centro* O *por un punto exterior* A, el punto de contacto debe estar situado, por una parte en la circunferencia dada O, y debe ser, por otra parte, vértice de un ángulo recto, cuyos lados pasen por los puntos fijos A y O; estará, pues, en la interseccion de dos lugares geométricos, que son: la circunferencia O y la descrita sobre AO como diámetro.

Hé aquí otro ejemplo más complicado que los anteriores:

Describir una circunferencia que sea tangente á una circunferencia dada C *y á una recta* AX *en un punto dado* A *(fig. 133).*

La perpendicular levantada á la recta dada en el punto A es evidentemente un primer lugar geométrico en donde ha de hallarse el centro de la circunferencia pedida.

Pero si se observa además que su centro ha de estar á una distancia del punto A igual al radio desconocido, y á una distancia del centro C igual á la suma ó diferencia de los radios de las dos circunferencias (segun que éstas hayan de ser tangentes exterior ó interiormente), se ve que, tomando á partir del punto A sobre la perpendicular AX, á uno y otro lado de esta, dos longitudes AB y AB′ iguales al radio del círculo C, el centro pedido habrá de estar equidistante de B y C si el contacto es exterior, ó de B′ y C si es interior. Así, pues, las perpendiculares á BC y B′C en sus puntos medios constituyen un segundo lugar geométrico para el centro que se busca; los puntos O y O′ en que cortan á la perpendicular BB′ serán, por consiguiente, los centros de los dos círculos que resuelven el problema.

El método por interseccion de lugares geométricos se presta bien á la discusion de los problemas. Se empieza por buscar las condiciones para que los dos lugares obtenidos se corten: el número de sus puntos

Fig. 133

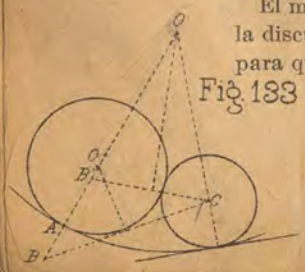
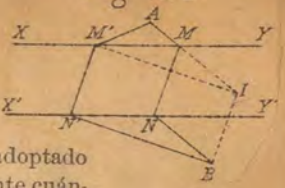


Fig. 134.



comunes es el número de las posiciones posibles del punto adoptado como incógnita de la cuestion. En general, se ve inmediatamente cuántas figuras cumplen las condiciones del enunciado para cada posicion del punto que se busca, y así se ve el número de soluciones del problema.

183. Completaremos estas nociones á medida que avancemos en el estudio de la Geometría; pero ántes de terminar diremos que á menudo se facilita mucho la resolucion de un problema por medio de *construcciones auxiliares*. Hé aquí dos ejemplos:

1.° *Construir un trapecio conociendo las longitudes de sus cuatro lados.*

Basta para resolver este problema *tener la feliz idea* de trazar por uno de los vértices la paralela á uno de los lados no paralelos del trapecio; así se obtiene un triángulo y un paralelógramo; se sabe construir el triángulo porque se conocen sus tres lados, y ya la figura se completa fácilmente.

2.° *Dadas dos paralelas* X Y, X' Y, *y dos puntos* A *y* B *fuera de ellas y á diferente lado, hallar el camino más corto de* A *á* B *por una línea quebrada* A M N B, *tal que la porcion* M N *comprendida entre las paralelas tenga una direccion dada (fig. 134).* Basta *tener la feliz idea* de trazar por el punto B la recta B I paralela á la direccion dada, é igual á la longitud constante que las dos paralelas X Y, X' Y', interceptan sobre las rectas paralelas á la direccion que se considera. Porque si A M' N' B es uno cualquiera de los caminos de que se trata en el enunciado, su longitud será igual á la de la quebrada A M' I B, que se compone de una parte constante B I y otra variable A M' I. Todo se reduce, pues, á determinar sobre X Y la posicion que debe ocupar el punto M' para que la longitud A M' I sea un mínimo. Pero evidentemente el punto M en que la recta A I corta á X Y es esta posicion, y el camino mínimo se tendrá trazando M N paralela á la direccion dada y uniendo N con D.

La riqueza inagotable de la Geometría consiste en la diversidad de estas construcciones auxiliares, diversidad que depende de la variedad misma del asunto. Por numerosos que fueran los ejemplos, no podria sacarse de ellos ninguna regla general relativa á esas construcciones auxiliares.

LIBRO III

FIGURAS SEMEJANTES.

§ I.—Líneas proporcionales.

DEFINICIONES.

184. Se dice que dos magnitudes son *proporcionales* una á otra cuando la relacion de dos valores cualesquiera A y B de la primera es igual á la relacion de los valores correspondientes C y D de la segunda **(181)**, y se da el nombre de *proporcion* á la igualdad de las dos relaciones.

$$(1) \qquad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Cuando las dos magnitudes consideradas son de la misma especie, como dos longitudes, dos volúmenes, etc., se dice que el valor D es una *cuarta proporcional* á A, B y C. En la misma hipótesis, si los valores B y C son iguales entre sí, la relacion (1) se convierte en

$$(2) \qquad \frac{A}{B} = \frac{B}{D},$$

y se dice que B es *media proporcional* entre A y D, y que D es *tercera proporcional* á A y B.

185. Refiramos cada una de las magnitudes consideradas á una unidad de su especie; si a y b representan los números que

miden los valores A y B de la primera, se tendrán, por un teorema conocido (**130**),

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}.$$

De igual manera, si c y d son las relaciones de los valores C y D á la unidad adoptada para la medida de la segunda magnitud, se tendrá

$$\frac{C}{D} = \frac{c}{d}.$$

Por consiguiente, la relacion (1) se trasforma en la igualdad *numérica*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \tag{3}$$

que recibe tambien el nombre de *proporcion;* los dos números a y d se llaman términos *extremos*, y b y c *medios*.

En la igualdad (3) se pueden quitar los denominadores y escribir

$$ad = bc.$$

Se enuncia este resultado de la manera siguiente: *En toda proporcion (numérica) el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

La relacion (2) se trasforma análogamente en la igualdad numérica

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$$

ó

$$b^2 = ad, \text{ y por tanto } b = \sqrt{ad}.$$

Así, *cuando una magnitud es media proporcional entre otras dos, el número que expresa su medida es igual á la raíz cuadrada del producto de los números que miden las otras dos magnitudes, suponiendo que la unidad es la misma.*

186. Importa conocer bien la diferencia que existe entre las relaciones (1) y (3). En la primera, por ejemplo, no es posible quitar denominadores; el producto de dos magnitudes no tiene ningun sentido, porque en toda multiplicacion el multiplicador es esencialmente un número abstracto.

No obstante, hablaremos en lo sucesivo del *producto de dos líneas;* pero entiéndase bien que se quiere expresar por esa frase más breve el producto de los números que expresan las medidas de esas líneas referidas á una misma unidad.

187. El LEMA siguiente nos será muchas veces útil:

Supongamos que un móvil recorre de izquierda á derecha una línea recta indefinida XY sobre la cual están dos puntos fijos A y B, y estudiemos cómo varía la relacion de las distancias del móvil á dichos puntos *(fig. 135).*

Para una posicion cualquiera M′ del móvil á la izquierda de A, se verifica

Fig. 135.

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{M'B - AB}{M'B} = 1 - \frac{AB}{M'B}.$$

Aquí se observa que si el punto M′ está muy distante, el denominador M′B es muy grande; por consecuencia, la fraccion $\frac{AB}{M'B}$ es muy pequeña y la relacion $\frac{M'A}{M'B}$ se aproxima á la unidad tanto como se quiera. A medida que el móvil se acerca al punto A, el denominador M′B disminuye tendiendo hácia AB; la fraccion $\frac{AB}{M'B}$ aumenta aproximándose á la unidad, y la relacion $\frac{M'A}{M'B}$ disminuye hasta *cero*, valor al cual llega cuando el móvil esté en A. Así, *á la izquierda del punto* A *la relacion considerada decrece de una manera continua desde* 1 *hasta* 0.

Pasado el punto A, la relacion $\frac{MA}{MB}$ aumenta, puesto que

su numerador crece y su denominador disminuye; llega á ser igual á 1 cuando el móvil está en O, medio de AB. Así, *desde* A *hasta* O *la relacion considerada crece desde* 0 *hasta* 1.

A partir del punto O, designando por N la posicion del móvil á la derecha de ese punto, la relacion $\frac{NA}{NB}$ continúa creciendo por las mismas causas; si el móvil se aproxima á B, el numerador NA tiende hácia AB, el denominador disminuye tendiendo hácia cero, y, por consecuencia, la relacion va tomando valores cada vez más grandes, y que pueden llegar á exceder á cualquier número, por grande que éste sea. Se expresa ésto diciendo que el valor de la relacion se hace infinito, y se representa ese estado límite por el símbolo ∞. Así *desde* O *hasta* B, *la relacion considerada crece de una manera continua desde* 1 *hasta* ∞.

Por último, para cualquiera posicion N′ del móvil á la derecha de B, se tiene

$$\frac{N'A}{N'B} = \frac{N'B + AB}{N'B} = 1 + \frac{AB}{N'B};$$

cuando N′ se aleja de B, el denominador N′B aumenta más y más indefinidamente, es decir, hasta el infinito; la fraccion $\frac{AB}{N'B}$ disminuye gradualmente hasta cero, y la relacion $\frac{N'A}{N'B}$ decrece sucesivamente hasta 1. Así, *á la derecha de* B *la relacion considerada decrece de una manera continua desde* ∞ *hasta* 1.

En resúmen, la relacion propuesta toma dos veces á la izquierda del punto O todos los valores numéricos menores que 1, y dos veces á la derecha de O todos los valores numéricos superiores á 1.

Luego *si se nos dan dos puntos fijos* A *y* B, *existen siempre sobre la recta indefinida* XY *que los une dos puntos, y solamente dos, tales que las relaciones de las distancias de cada uno de ellos á los puntos* A *y* B *tienen un mismo valor dado. Esos*

dos puntos están situados al mismo lado del medio O *de la recta* AB, *uno entre* A *y* B, *el otro fuera: los puntos están ambos á la izquierda de* O, *como* M *y* M', *ó á la derecha de* O *como* N *y* N', *segun que el valor dado á la relacion es menor ó mayor que la unidad.*

El punto N, situado entre A y B, divide realmente á la recta AB en la relacion dada; por extension se dice que el punto exterior correspondiente N' divide tambien á la recta AB en esa misma relacion. Para evitar, sin embargo, toda confusion, se dice que los segmentos NA y NB, determinados por el punto N, y que tienen por suma AB, son *aditivos;* y se llaman *sustractivos* los segmentos N'A y N'B determinados por el punto N', y cuya diferencia es AB.

Cuando una recta AB está dividida así por dos puntos N y N', de manera que los segmentos aditivos NA y NB son proporcionales á los segmentos sustractivos N'A y N'B, se dice que los dos puntos N y N' dividen *armónicamente* la recta AB ó son *conjugados armónicos* con respecto á la recta AB. La relacion

$$\frac{NA}{NB} = \frac{N'A}{N'B},$$

pudiendo escribirse

$$\frac{AN}{AN'} = \frac{BN}{BN'},$$

indica que, *recíprocamente,* A y B son conjugados armónicos con respecto á la recta NN'.

TEOREMA.

188. *Dos rectas cualesquiera son cortadas en partes proporcionales por una serie de rectas paralelas;* en otros términos, *cuando dos rectas* AG, A'G' *son cortadas por una serie de paralelas* AA', BB', CC',..., GG', *la relacion de dos segmentos cualesquiera de la primera es igual á la relacion de los dos segmentos correspondientes de la segunda (figuras 136 y 137).*

Fig. 136

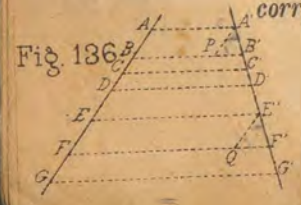


Fig. 137

Basta (**135**) probar:

1.° Que *si dos segmentos cualesquiera* AB *y* EF *de la primera recta son iguales entre sí, los segmentos correspondientes* A'B' *y* E'F' *de la segunda recta son tambien iguales entre sí;*

2.° Que *si sobre la primera recta un segmento* EG *es igual á la suma de otros dos* AB *y* CD, *sobre la segunda recta el segmento* E'G', *correspondiente á* EG, *es tambien igual á la suma de los segmentos* A'B' *y* C'D', *que corresponden á* AB *y* CD.

1.° Tracemos A'P y E'Q paralelas á AG; A'P y AB serán iguales como paralelas comprendidas entre paralelas; E'Q será igual á MF por la misma razon; de consiguiente, $A'P = E'Q$, puesto que, segun la hipótesis, $AB = EF$. Por otra parte, los ángulos PA'B', QE'F' son iguales por correspondientes, y los ángulos A'PB', E'QF' por tener los lados paralelos y del mismo sentido; luego los triángulos PA'B', QE'F', teniendo un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, son iguales y se tiene $A'B' = E'F'$.

2.° Puesto que, por hipótesis, $EF = AB$ y $GF = CD$, se tiene, en virtud de lo que precede, $E'F' = A'B'$ y $F'G' = C'D'$; el segmento E'G' es, pues, igual á la suma de A'B' y C'D'.

La figura puede ofrecer dos disposiciones diferentes, pero la demostracion subsiste.

TEOREMA.

189. *Toda paralela* DE *á uno de los lados* BC *de un triángulo* ABC, *divide á los otros dos en partes proporcionales (figuras 138, 139 y 140).*

En efecto, concibiendo por el vértice A una paralela á BC, vemos (**188**) que se tiene

$$\text{(1)} \qquad \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC},$$

ó tambien

$$\text{(2)} \qquad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

$$(3) \qquad \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CE}.$$

Cada una de estas proporciones se halla aquí establecida directamente; pero conviene observar que, en virtud de las reglas de Aritmética, una cualquiera de ellas comprende á las otras dos.

Están indicadas las tres disposiciones que puede presentar la figura.

190. Recíprocamente, *si dos puntos* D *y* E, *situados respectivamente sobre dos lados* AB *y* AC *de un triángulo* ABC, *dividen esos lados en partes proporcionales, la recta* DE *que une aquellos puntos es paralela al tercer lado* BC.

Puesto que cada una de las proporciones (1), (2), (3) entraña las otras dos, se puede partir de una cualquiera de ellas como hipótesis; elegiremos, por ejemplo, la primera

$$(1) \qquad \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}.$$

Esto sentado, hay que distinguir varios casos.

Supongamos primero que los puntos D *y* E *estén situados sobre los mismos lados*, es decir, el D entre A y B, el E entre A y C *(fig. 138)*, y concibamos por el punto D una paralela á BC. Esta paralela determinará (**189**) entre A y C un punto cuyas distancias á A y C formarán una relacion igual á $\frac{DA}{DB}$. Ahora bien, entre A y C (**187**) no existe más que un solo punto, tal que la relacion de sus distancias á A y C sea igual á $\frac{DA}{DB}$, y por hipótesis ese punto es E. Luego la paralela á BC, trazada por el punto D, pasa por E y coincide con DE. Luego DE es paralela á BC.

Supongamos, en segundo lugar, los puntos D *y* E *situados sobre las prolongaciones de los lados.* Si D está, por ejemplo,

Fig. 138

debajo de AB *(fig. 139)*, la relacion $\frac{DA}{DB}$ será mayor que 1; lo mismo sucederá con su igual $\frac{EA}{EC}$, y de consiguiente, el punto E se hallará análogamente debajo de AC. Podemos ahora concluir la demostracion como en el caso anterior.

Fig. 139

De la misma manera veríamos que si D estuviese por encima de BA *(fig. 140)*, la proporcion (1) exigiria que E estuviese encima de CA, y la demostracion entónces terminaria como en el primer caso.

Fig. 140

Esta recíproca exige alguna atencion; la hipótesis contiene en realidad dos partes: la primera consiste en la existencia de la proporcion (1); la otra se refiere á la posicion de los puntos D y E, que deben estar situados de la misma manera sobre los lados AB y AC. Esta segunda parte, si bien está de ordinario sobreentendida para mayor brevedad, es necesaria; porque si uno de los puntos, D por ejemplo, estuviese sobre el lado AB, y el otro E sobre la prolongacion del lado AC, la recta DE no sería paralela á BC, á pesar de que la proporcion (1) podria estar satisfecha.

TEOREMA.

191. *En todo triángulo* ABC *(fig. 141)*:

1.° *La bisectriz* AD *de un ángulo cualquiera* BAC *divide al lado opuesto* BC *en dos segmentos aditivos* DB *y* DC *proporcionales á los lados adyacentes;*

2.° *La bisectriz* AD' *de un ángulo exterior* BAE *divide el lado opuesto en dos segmentos sustractivos* D'B, D'C *proporcionales á los lados adyacentes.*

En efecto:

1.° Trazando BE paralela á la bisectriz AD, se tiene en el triángulo BEC (**189**)

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AE}{AC}.$$

Por otra parte, el ángulo BEA es el correspondiente del ángulo DAC, y los ángulos EBA y DAB son alternos internos; además, por ser AD bisectriz del ángulo BAC, los ángulos DAC, DAB son iguales; por consecuencia, los ángulos BEA, EBA son tambien iguales, y el triángulo BAE es isósceles. Reemplazando ahora, en la proporcion anterior, el lado AE por su igual AB, se tiene

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

2.° Si trazamos BE′ paralela á la bisectriz AD′ del ángulo exterior BAE, se tiene, en el triángulo D′AC (**189**),

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AE'}{AC}.$$

Por otra parte, el ángulo BE′A es el correspondiente del ángulo D′AE, y los ángulos E′BA y D′AB son alternos internos; además, por ser AD′ bisectriz del ángulo BAE, los ángulos D′AE, D′AB son iguales; por tanto, los ángulos BE′A, E′BA son tambien iguales y el triángulo BAE′ es isósceles. Reemplazando ahora en la proporcion anterior el lado AE′ por su igual AB, se tiene

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}. \ (*)$$

192. RECÍPROCAMENTE, *si una recta que parte del vértice de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales á los lados adyacentes, esta recta es la bisectriz del ángulo considerado ó del suplementario, segun que corte al mismo lado opuesto ó á su prolongacion.*

En efecto, entre B y C no existe (**187**) más que un punto que divida la recta BC en segmentos que guarden la relacion de AB á AC; el teorema directo exige, por consecuencia, que ese punto pertenezca á la bisectriz del ángulo BAC *(fig. 141)*.

(*) NOTA 10.

Fig. 141.

Del mismo modo, fuera de BC no existe más que un punto D′ que divida á BC en dos segmentos sustractivos que guarden la relación de AB á AC (**187**), y el directo exige que ese punto pertenezca á la bisectriz del ángulo exterior BAE *(figura 141)*.

COROLARIO.

193. Los dos puntos D y D′ satisfacen á la proporción

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C};$$

son, pues, conjugados armónicos con respecto á la recta BC (**187**). Así, *los dos lados de un ángulo, la bisectriz de este ángulo y la bisectriz del ángulo suplementario, determinan sobre una secante cualquiera cuatro puntos tales que los dos últimos son conjugados con respecto á los otros dos.*

Por consiguiente, si se tiene un triángulo PMQ inscrito en un círculo, el diámetro DD′, perpendicular á uno de los lados PQ del triángulo, queda dividido armónicamente por los otros dos lados *(fig. 142)*.

Puesto que, siendo iguales los arcos D′P y D′Q, la recta MD′ es bisectriz del ángulo PMQ, y su perpendicular MD será bisectriz del ángulo adyacente y suplementario QMC.

RECÍPROCAMENTE, *si se tiene un triángulo* PMQ *inscrito en un círculo y el diámetro* DD′ *queda dividido armónicamente en los puntos* B *y* C *por los lados* MQ *y* MP, ese diámetro es perpendicular al tercer lado PQ *(fig. 142)*.

En efecto, la perpendicular PQ′, bajada desde el punto P sobre DD′, corresponderia á un nuevo triángulo inscrito PMQ′, y en virtud de la directa, el diámetro DD′ cortaria al lado MQ′ de este triángulo, en un punto B′ conjugado armónico de C, con respecto á DD′. Pero B es por el supuesto ese punto conjugado armónico; luego los puntos B y B′ se confunden, así como los triángulos PMQ y PMQ′, y PQ es perpendicular al diámetro DD′.

TEOREMA.

194. *El lugar geométrico de los puntos cuyas distancias á dos puntos fijos están en una relacion dada, es una circunferencia (fig. 142)* (*).

Sean B y C los dos puntos fijos, $\frac{m}{n}$ la relacion dada y M un punto cualquiera del lugar; es decir, un punto tal que

$$\frac{MB}{MC} = \frac{m}{n}.$$

Existen desde luego sobre la recta indefinida BC dos puntos del lugar, ó lo que es igual, dos puntos D y D' (**187**) que satisfacen á las relaciones

$$\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}, \quad \frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n};$$

de aquí se deduce

$$\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MC} \text{ y } \frac{D'B}{D'C} = \frac{MB}{MC}.$$

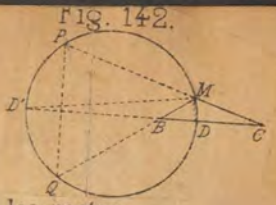
Estas proporciones demuestran (**192**), la primera, que MD es bisectriz del ángulo BMC, y la segunda, que MD' es bisectriz del ángulo suplementario BMP. Ahora bien, las bisectrices de dos ángulos adyacentes y suplementarios son perpendiculares entre sí; luego el punto variable M es el vértice de un ángulo recto DMD', cuyos dos lados pasan constantemente por los puntos fijos D y D'; todo punto M del lugar está, pues, situado en la circunferencia descrita sobre DD' como diámetro.

Falta demostrar que, recíprocamente, todo punto M de la circunferencia pertenece al lugar, es decir, satisface la relacion (1).

Y en efecto, puesto que los puntos B y C dividen armóni-

(*) NOTA 11.

Fig. 142.



camente el diámetro DD', los puntos P y Q en que las rectas CM y MB encuentran á la circunferencia son simétricos con respecto al diámetro DD' (**193**). Los arcos D'P y D'Q son, pues, iguales, y la recta MD' es bisectriz del ángulo BMP. Se verifica, por consiguiente, la proporcion

$$\frac{MB}{MC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n}.$$

§ II.—Líneas proporcionales en el círculo.

DEFINICIONES.

195. Se dice que dos rectas trazadas entre los lados de un ángulo ó de su opuesto por el vértice son *antiparalelas*, cuando la primera forma, con uno de los lados del ángulo dado, un ángulo igual al que la segunda forma con el otro lado.

Así, las dos rectas DE y BC *(fig. 143)* son antiparalelas con respecto al ángulo BAC cuando el ángulo ADE es igual al ángulo ACB. Entónces el ángulo AED que la primera recta forma con el segundo lado AC, es igual al ángulo ABC que la segunda recta forma con el primer lado AB (**79**).

TEOREMA.

196. *Cuando los dos lados de un ángulo son cortados por dos rectas antiparalelas, el producto de las distancias del vértice á los dos puntos en que cada uno de los lados corta á las dos transversales es constante (fig. 143).*

De manera que si BAC es el ángulo propuesto, y si las dos rectas BC y DE son antiparalelas, queremos demostrar que se verifica la igualdad

$$AB.AD = AC.AE.$$

En efecto, tómese AD' = AD y AE' = AE, y trácese D'E'.

La igualdad de los triángulos ADE, AD'E', que tienen un ángulo comun comprendido entre dos lados iguales, lleva consigo la igualdad de los ángulos ADE, AD'E'. Por otra parte, los ángulos ADE, ACB son iguales por hipótesis (**195**); luego los ángulos correspondientes AD'E', ACB son iguales y las rectas BC, D'E' son paralelas (**65**); se tiene, pues (**189**), la proporcion

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AD'},$$

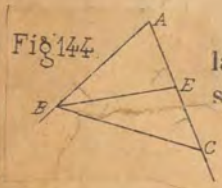


Fig 144

la cual, si reemplazamos en ella las cantidades AE' y AD' por sus iguales AE y AD, se convierte en

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \text{ ó } AB.AD = AC.AE.$$

197. Recíprocamente, *si dos rectas* DE *y* BC, *trazadas entre los lados de un ángulo* BAC, *son tales que el producto de las distancias del vértice á los dos puntos en que cortan á cada uno de los lados es constante*, es decir, si son tales que se verifica

$$(1) \qquad AB.AD = AC.AE \text{ ó } \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD},$$

las rectas son antiparalelas con respecto al ángulo.

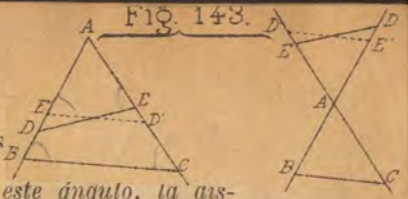
En efecto, concibamos la recta que, trazada por el punto E, fuese antiparalela á BC con respecto al ángulo BAC; esta recta corta al lado AB en un punto (**196**), cuya distancia al vértice A será una cuarta proporcional á AB, AE, AC. Pero la distancia AD es precisamente esa cuarta proporcional en virtud de la igualdad (1); luego la recta DE es antiparalela á BC.

Corolario.

198. Si los dos puntos D y B se confundiesen *(fig. 144)* se tendría $\overline{AB}^2 = AC.AE$.

Luego *cuando dos rectas antiparalelas con respecto á un*

Fig. 143.



ángulo se cortan sobre uno de los lados de este ángulo, la distancia del vértice á este punto es media proporcional entre las distancias del vértice á los puntos en que el segundo lado del ángulo corta á las dos rectas antiparalelas.

RECÍPROCAMENTE, *si por un punto* B, *tomado sobre uno de los lados de un ángulo* BAC, *se trazan en el interior del ángulo dos rectas* BC, BE, *tales que* $\overline{AB}^2 = AC.AE$, *esas dos rectas son antiparalelas con respecto al ángulo.*

Fig. 145.

TEOREMA.

199. *Si desde un punto tomado en el plano de un círculo se trazan secantes á ese círculo, el producto de las distancias de dicho punto á los dos puntos de interseccion de cada secante con la circunferencia es constante, cualquiera que sea la direccion de la secante.*

Sean EA, ED dos secantes que parten del punto fijo E: se quiere demostrar que

$$EA.EB = EC.ED.$$

La figura puede presentarse de dos maneras, segun que el punto E es interior *(fig. 145)* ó exterior al círculo *(fig. 146)*; pero la demostracion es una misma en ambos casos.

Tracemos las cuerdas AC y BD; los ángulos ACD, ABD, hallándose inscritos en el mismo segmento, son iguales, y de consiguiente las cuerdas AC, BD son antiparalelas con respecto al ángulo AED. Se verifica, pues (**196**), la relacion

$$EA.EB = EC.ED.$$

200. RECÍPROCAMENTE, *cuando dos rectas* AB *y* CD, *prolongadas si es necesario, concurren en un punto* E *tal que se verifica la relacion*

$$EA.EB = EC.ED,$$

las extremidades A, B, C, D *están situadas sobre una misma circunferencia.*

Fig. 146

En efecto, segun el núm. **197**, la relacion dada prueba que las dos rectas AC y BD son antiparalelas con respecto al ángulo AED; por consiguiente, los ángulos ACD, DBA son iguales, y si sobre la recta AD se describe un segmento capaz del ángulo ACD, la circunferencia que pasa por los tres puntos A, C, D contiene al punto B.

Corolario.

201. Consideremos el caso en que el punto E es exterior *(fig. 146)*, y supongamos que la secante EDC gira alrededor del punto E hasta coincidir con la tangente EF; la secante entera EC y su parte externa ED se convierten ámbas en la longitud EF de la tangente, y la igualdad

$$EA.EB = EC.ED,$$

tomada en el límite, se convierte en la siguiente:

$$EA.EB = \overline{EF}^2.$$

Luego *si por un punto exterior á un círculo se trazan una secante y una tangente á dicho círculo, la tangente es media proporcional entre la secante entera y su parte externa.*

Se puede tambien aplicar directamente á este caso particular la demostracion del caso general: los ángulos EBF, AFE *(fig. 147)*, el uno inscrito, el otro formado por una cuerda y una tangente, tienen por medida la mitad del arco AF; su igualdad prueba que las rectas AF y BF son antiparalelas con respecto al ángulo E, y por tanto entraña la relacion

$$\overline{EF}^2 = EA.EB.$$

202. Recíprocamente, *si tres puntos* A, B, F, *situados los dos primeros,* A *y* B, *sobre un lado del ángulo* E, *y el tercero* F, *sobre el otro lado, son tales que se verifica la igualdad*

$$\overline{EF}^2 = EA.EB,$$

la circunferencia determinada por esos tres puntos es tangente en F *al lado* EF.

Fig. 147.

En efecto, segun el núm. **188**, la relacion dada prueba que las rectas AF y BF son antiparalelas con respecto al ángulo E; los ángulos AFE, EBF son, pues, iguales; luego si se describe una circunferencia que pase por A y F, y sea además tangente en F á la recta EF, esa circunferencia, en virtud de la construccion conocida del segmento capaz (**174**), pasará por el punto B.

§ III.—Semejanza de polígonos.

DEFINICIONES.

203. Dos polígonos del mismo número de lados se llaman *semejantes* cuando tienen sus ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales.

Los *lados homólogos* son aquellos que están adyacentes á ángulos respectivamente iguales, y áun estos mismos ángulos se llaman tambien *ángulos homólogos;* en fin, se llama *relacion de semejanza* de los dos polígonos la relacion que existe entre dos lados homólogos cualesquiera.

Así, los dos pentágonos ABCDE, A′B′C′D′E′ *(fig. 148)*, son semejantes si se verifican las igualdades

$$A = A',\ B = B',\ C = C',\ D = D',\ E = E';$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

En los triángulos semejantes, tales como ABC, A′B′C′ *(fig. 149)*, los lados homólogos se oponen á ángulos iguales.

LEMA.

204. *Si cortamos un triángulo cualquiera* ABC *por una paralela* DE *á uno de sus lados* BC, *se forma un nuevo triángulo* ADE *semejante al primero (figuras 150, 151 y 152 .*

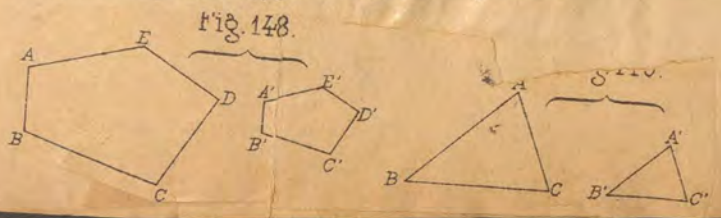


Fig. 150.

Fig. 151.

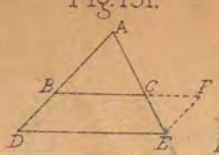


Fig. 152.

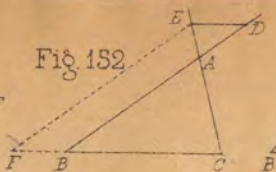
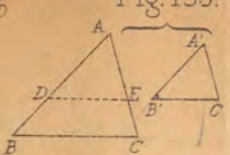


Fig. 153.



En efecto:

Los dos triángulos ADE, ABC *(fig. 150)* tienen, en primer lugar, sus ángulos respectivamente iguales, porque el ángulo A es comun y los ADE, ABC son correspondientes, así como los AED, ACB.

Además, los lados homólogos son proporcionales, porque siendo DE paralela á BC, se tiene (189)

$$(1) \qquad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC};$$

si trazamos EF paralela á AB se tiene tambien

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC};$$

y como las partes de paralelas DE, BF, comprendidas entre paralelas, son iguales,

$$(2) \qquad \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Uniendo las porporciones (1) y (2), que tienen una razon comun, se llega á la serie de relaciones iguales

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Escolio.

205. La proposicion enunciada subsiste cuando la paralela DE está situada debajo de BC *(fig. 151)*, ó encima de A *(fig. 152)*. La demostracion es exactamente la misma en el caso de la *fig. 151;* y en el caso de la *fig. 152* toda la diferencia consiste en que los ángulos ADE, ABC, así como los ángulos AED, ACB, son alternos internos en vez de ser correspondientes.

TEOREMA.

206. *Dos triángulos* ABC, A'B'C' *son semejantes:*

1.° *Cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales;*

2.° *Cuando tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados proporcionales;*

3.° *Cuando tienen sus lados proporcionales.*

1.° Supongamos que se tenga *(fig. 153)*

$$A = A', B = B'.$$

Sobre el lado AB, homólogo de A'B', tómese una longitud AD igual á A'B', y trácese DE paralela á BC. El triángulo ADE es semejante á ABC (**204**), y basta por tanto demostrar la igualdad de los triángulos A'B'C', ADE.

Ahora bien, los ángulos A y A' son iguales por hipótesis, y el ángulo ADE es correspondiente del ángulo ABC, que tambien por el supuesto es igual á B'; por último el lado AD es igual á A'B' por construccion. Luego los dos triángulos ADE, A'B'C', son iguales por tener un lado igual adyacente á dos ángulos iguales.

2.° Supongamos que se tiene

$$(1) \qquad A = A', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'};$$

tomemos sobre el lado AB, homólogo de A'B', una longitud AD igual á A'B', y tracemos DE paralela á BC. El triángulo ADE es semejante al triángulo ABC (**204**), y basta demostrar ahora la igualdad de los triángulos ADE, A'B'C'.

La semejanza de los triángulos ABC, ADE da la proporcion

$$(2) \qquad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

que tiene los mismos numeradores que la proporcion (1); los denominadores AD y A'B', son además iguales por construccion; luego AE = A'C'; y los dos triángulos ADE, A'B'C', teniendo un ángulo igual comprendido entre dos lados iguales, son iguales.

3.° Supongamos que

$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'};$$

tómese sobre el lado AB una longitud AD igual á A'B', y tracemos DE paralela á BC. El triángulo ADE es semejante á ABC (**204**), y basta por tanto demostrar la igualdad de los triángulos ADE, A'B'C'.

La semejanza de los triángulos ADE, ABC, nos da la serie de razones iguales.

$$(2) \qquad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EA},$$

que presenta los mismos numeradores que la serie (1). Por consiguiente, los denominadores AD, A'B' de las dos primeras razones, siendo iguales por construccion, es necesario que tambien se verifique

$$DE = B'C', \; EA = C'A';$$

los dos triángulos ADE, A'B'C' son, pues, iguales, por tener sus tres lados respectivamente iguales.

COROLARIOS.

207. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente paralelos ó respectivamente perpendiculares;* porque en uno y otro caso, los dos triángulos tienen sus ángulos respectivamente iguales (**80**).

208. *Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen un ángulo agudo igual.*

ESCOLIOS.

209. Del núm. **206** resulta que, *en los triángulos, la igualdad de los ángulos entraña la proporcionalidad de los lados, y recíprocamente.* Esta propiedad fundamental, cuyo descubrimiento se atribuye á Thales (639-548 a. J. C.), no subsiste para los polígonos cualesquiera. Por ejemplo, un cuadrado y un rectángulo tienen sus ángulos iguales, y sin embargo,

sus lados homólogos no son proporcionales. De la misma manera, un cuadrado y un rombo tienen sus lados proporcionales, y sin embargo, sus ángulos no son iguales.

210. El cuadro siguiente, en que están reunidos los casos de igualdad y los casos de semejanza de los triángulos, haciendo que se correspondan, permite comparar las dos teorías.

Dos triángulos son:	
iguales,	semejantes,
cuando tienen:	
1.° Dos ángulos iguales adyacentes á un lado igual;	1.° Dos ángulos iguales.
2.° Un ángulo igual, comprendido entre dos lados iguales;	2.° Un ángulo igual, comprendido entre dos lados proporcionales;
3.° Los tres lados iguales;	3.° Los tres lados proporcionales.

Se ve que cada caso de semejanza contiene *dos* condiciones, y cada caso de igualdad *tres*.

211. Importa observar tambien el método igual que hemos seguido para la demostracion en los tres casos del núm. **206.** Consiste en tomar sobre un lado del primer triángulo, á partir del vértice, una longitud igual al lado homólogo del segundo y trazar despues, por el punto así determinado, una paralela á uno de los otros dos lados del primer triángulo. De ese modo se construye un triángulo auxiliar, que, en virtud del lema del núm. **204**, es semejante al primero; y las condiciones encerradas en la hipótesis permiten, por último, demostrar la igualdad del triángulo auxiliar con el segundo de los propuestos, valiéndose del caso de igualdad correspondiente al caso de semejanza que se estudia.

212. Réstanos ahora mostrar el uso de esta teoría; es decir, indicar de qué manera los casos de semejanza intervienen en la demostracion de los teoremas. Dos triángulos semejantes

satisfacen á cinco condiciones, y cada caso de semejanza exige solamente dos, agrupadas de tal manera que, cuando están satisfechas, las otras tres tambien lo están. Si, pues, en una figura cualquiera hemos reconocido la semejanza de dos triángulos por la aplicacion de uno de los tres casos, podemos deducir inmediatamente que las otras tres condiciones tambien están satisfechas, y de esa manera habremos adquirido nuevos datos que nos permitirán seguir adelante en nuestras investigaciones.

Busquemos, por ejemplo, *en qué relacion se cortan las medianas de un triángulo.*

Llamamos *medianas* de un triángulo las rectas que unen los vértices con los puntos medios de los lados respectivamente opuestos.

Sea ABC *(fig. 154)* un triángulo dado; tracemos dos de sus medianas AD y BE, que se cortan en el punto G. Si se traza la recta DE, esta recta será paralela al lado AB (**190**), y los dos triángulos AGB, DGE, son semejantes, así como los triángulos ACB, ECD (**204**). Se tiene, pues, la serie de relaciones iguales.

$$\frac{DG}{AG} = \frac{EG}{BG} = \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{2}.$$

Puesto que $DG = \frac{AG}{2}$ y $EG = \frac{BG}{2}$, resulta

$$DG = \frac{AD}{3} \text{ y } EG = \frac{BE}{3}.$$

Así, *dos medianas cualesquiera de un triángulo se cortan en un punto situado al tercio de cada una de ellas, contado á partir del lado dividido por ella en dos partes iguales.*

Segun esto, la segunda y la tercera mediana encuentran á la primera en el mismo punto. Luego *las tres medianas de un triángulo concurren en un mismo punto* colocado sobre una cualquiera de ellas de la manera expresada.

Fig. 154.

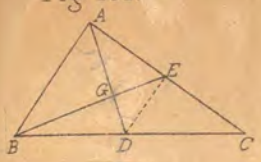
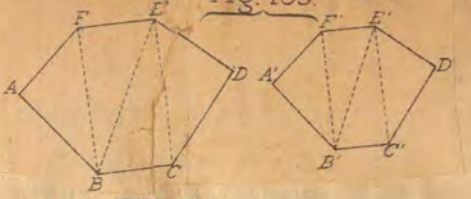


Fig. 155.



TEOREMA.

213. *Dos polígonos compuestos de un mismo número de triángulos semejantes é igualmente dispuestos, son semejantes (figura 155).*

Sean ABF, FBE, EBC, CED, y A'B'F', F'B'E', E'B'C', C'E'D', dos series de triángulos respectivamente semejantes é igualmente dispuestos; el polígono ABCDEF, formado por los primeros triángulos, digo que es semejante al polígono A'B'C'D'E'F' formado por los segundos.

En efecto:

1.° Los ángulos de los dos polígonos son iguales, bien por ser ángulos homólogos de triángulos semejantes, bien por ser sumas de ángulos homólogos de triángulos semejantes. Así, los ángulos A y A', por ser ángulos de triángulos homólogos semejantes BAF, B'A'F', son iguales; mientras que el ángulo B es igual al ángulo B' por ser el primero la suma de los tres ángulos ABF, FBE, EBC, respectivamente iguales á los otros tres ángulos A'B'F', F'B'E', E'B'C', que componen el B',

2.° Los lados homólogos son proporcionales, porque se tiene sucesivamente:

Por la semejanza de los triángulos ABF, A'B'F',

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'F'}{AF} = \frac{B'F'}{BF};$$

Por la de los triángulos BFE, B'F'E',

$$\frac{B'F'}{BF} = \frac{F'E'}{FE} = \frac{E'B'}{EB};$$

Por la de los triángulos EBC, E'B'C'.

$$\frac{E'B'}{EB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'E'}{CE};$$

Por la de los triángulos CED, C'E'D',

$$\frac{C'E'}{CE} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE};$$

y de todas esas igualdades, suprimiendo las razones comunes,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'F'}{AF} = \frac{F'E'}{FE} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE}.$$

214. RECÍPROCAMENTE, *dos polígonos semejantes pueden ser descompuestos en un mismo número de triángulos semejantes é igualmente dispuestos (fig. 156).*

Sean ABCDE, A'B'C'D'E', dos polígonos semejantes. Tomemos en el interior del primero un punto cualquiera O, y unámoslo con las extremidades del lado AB; sobre el lado A'B', homólogo de AB, y en el interior del polígono A'B'C'D'E', construyamos los ángulos B'A'O', A'B'O', respectivamente iguales á los ángulos BAO, ABO. El punto O' será vértice de un triángulo O'A'B', semejante al triángulo OAB (**206**), y situado, con respecto al segundo polígono A'B'C'D'E', de la misma manera que el triángulo OAB con respecto al polígono ABCDE.

Hecho esto, unamos el punto O con todos los vértices del primer polígono, y el punto O' con todos los vértices del segundo. Los dos polígonos quedarán así descompuestos en el mismo número de triángulos igualmente dispuestos, cuya semejanza respectiva nos falta ahora demostrar.

Los dos triángulos OAB, O'A'B', semejantes por construccion, nos dan

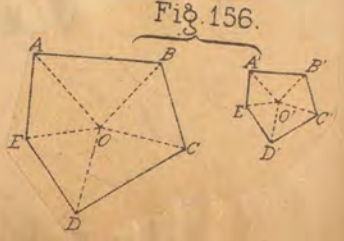
$$\frac{O'B'}{OB} = \frac{A'B'}{AB};$$

y la semejanza de los polígonos propuestos

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC};$$

luego se tiene

Fig. 156.



$$\frac{O'B'}{OB} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Por otra parte, el ángulo O'B'C' diferencia de los ángulos A'B'C', A'B'O', que son respectivamente iguales á los ABC, ABO, es igual al ángulo OBC, diferencia de los últimos.

Luégo los triángulos OBC, O'B'C' son semejantes, por tener un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.

De la semejanza de los triángulos O'B'C', OBC, se podria deducir igualmente la de los triángulos inmediatos O'C'D', OCD, y así sucesivamente.

Escolio.

215. Dos puntos O y O', situados en el plano de dos polígonos semejantes, se llaman *homólogos* cuando, uniendo uno de ellos O con las extremidades de un lado AB, y el otro O' con las extremidades del lado homólogo A'B', se obtienen dos triángulos O'A'B', OAB, semejantes é igualmente dispuestos con respecto á los dos polígonos.

Resulta de la demostracion anterior que dos puntos homólogos cualesquiera pueden ser tomados por centros de descomposicion de dos polígonos semejantes en triángulos semejantes é igualmente dispuestos.

Si el punto O fuese exterior al polígono ABCDE, su homólogo O' deberia tambien ser exterior al polígono A'B'C'D'E'; en tal caso, los dos polígonos deben considerarse descompuestos en triángulos aditivos y triángulos sustractivos.

Si el punto O coincidiese con uno de los vértices A, su homólogo O' coincidiria con el vértice A'.

216. Dos rectas situadas en el plano de dos polígonos semejantes, se llaman *homólogas* cuando sus dos extremidades son respectivamente puntos homólogos.

La relacion de dos rectas homólogas cualesquiera es igual á la relacion de semejanza de los polígonos.

Sean, en efecto, ABCDE, A'B'C'D'E' *(fig. 157)*, dos po-

lígonos semejantes, y FH, F'H' dos rectas homólogas. La semejanza (**215**) de los triángulos FAB, F'A'B', prueba la igualdad de los ángulos ABF, A'B'F', y la de las relaciones $\frac{F'B'}{FB}$, $\frac{A'B'}{AB}$. Asimismo, la semejanza de los triángulos HAB, H'A'B', entraña la igualdad de los ángulos HBA, H'B'A', y la de las relaciones $\frac{H'B'}{HB}$, $\frac{A'B'}{AB}$.

Se tiene, por consiguiente,

$$\frac{F'B'}{FB} = \frac{H'B'}{HB},$$

y además,

áng. FBH ó HBA — FBA = áng. F'B'H' ó H'B'A' — F'B'A'.

Luégo los triángulos FBH, F'B'H', son semejantes (**206**), y la relacion $\frac{FH}{F'H'}$ es igual á cada una de las relaciones iguales $\frac{F'B'}{FB}$, $\frac{A'B'}{AB}$; es decir, á la relacion de semejanza de los polígonos considerados.

TEOREMA.

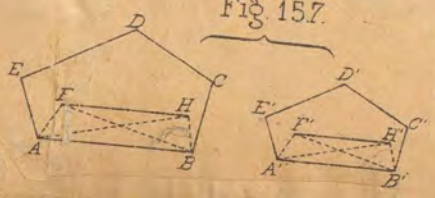
217. *La relacion de los perímetros de dos polígonos semejantes, es igual á su relacion de semejanza.*

En efecto, sean ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig. 157*) dos polígonos semejantes; las relaciones

$$\frac{AB}{A'B'}, \frac{BC}{B'C'}, \frac{CD}{C'D'}, \frac{DE}{D'E'}, \frac{EA}{E'A'},$$

son iguales, por definicion (**203**), á la relacion de semejanza; luego, en virtud de una propiedad conocida, la suma de sus numeradores y la suma de sus denominadores, es decir, los perímetros de los polígonos ABCDE, A'B'C'D'E', forman una

Fig. 157.



relacion igual á las precedentes, ó en otros términos, á la relacion de semejanza.

TEOREMA.

218. *Dos paralelas cualesquiera son cortadas en partes proporcionales por una serie de secantes que parten del mismo punto.*

Sean AD y A'D' dos paralelas, y una serie de secantes OAA', OBB', OCC', ODD', que parten del mismo punto O, colocado, bien entre las dos paralelas, bien exteriormente *(figura 158)*; se tienen las relaciones iguales

$$\text{(1)} \qquad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}.$$

En efecto, los triángulos semejantes OAB, O'A'B' (**204**), dan

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB}.$$

Del mismo modo, por la semejanza de los triángulos OBC, O'B'C', se tiene

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OC'}{OC}.$$

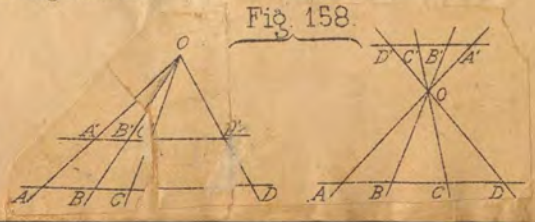
Por último, los triángulos semejantes OCD, O'C'D' dan á su vez

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{C'D'}{CD}.$$

Suprimiendo las razones comunes, se tienen las igualdades (1) que queriamos demostrar.

219. La misma demostracion nos hace ver que las relaciones (1) son iguales á las siguientes

Fig. 158.



$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD}.$$

En otros términos, *la relacion de dos partes cualesquiera correspondientes de las dos paralelas es la misma que las de las distancias del punto O á los puntos de interseccion de una cualquiera de las secantes con las paralelas.*

220. RECÍPROCAMENTE, *cuando varias secantes* AA', BB', CC', DD' *cortan á dos paralelas en partes proporcionales, dichas secantes concurren en un mismo punto (fig. 158)* (*).

Llamemos $\frac{a}{b}$ la relacion de dos partes correspondientes de las dos paralelas, de manera que tengamos

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \ldots = \frac{a}{b}.$$

1.° Si las dos series de puntos A, B, C, D y A', B', C', D' presentan una disposicion inversa *(fig. 158)*, dos secantes cualesquiera AA' y CC' se cortan en un punto O interior á las dos paralelas, y los triángulos semejantes OAC, O'A'C' dan

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{a}{b}.$$

Así, una cualquiera de las secantes corta á la primera AA' en un punto O, situado entre A y A', tal que se verifica

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{a}{b}.$$

Todas las secantes pasan, pues, por este punto O (**187**).

2.° Si las dos series de puntos A, B, C, D y A', B', C', D' están dispuestos de la misma manera *(fig. 158)*, se verá análogamente que una secante cualquiera CC' corta á la primera AA' en un punto O, situado fuera de AA', y tal que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{a}{b}.$$

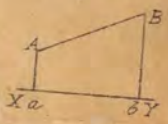
(*) NOTA 12.

Todas las secantes concurren, pues, en ese punto O (**187**).

Cuando la relacion $\frac{a}{b}$ es igual á la unidad, las partes correspondientes de las dos paralelas son iguales entre si y las secantes son paralelas. El teorema enunciado subsiste, por consiguiente, si consideramos dos rectas *paralelas* como *dos rectas que concurren en el infinito.*

§ IV. — Relaciones métricas entre las diferentes partes de un triángulo.

Fig. 159.



DEFINICIONES.

221. Se llama *proyeccion* de un punto A sobre una recta indefinida XY, el pié *a* de la perpendicular bajada desde el punto sobre la recta *(fig. 159).*

Si se considera una recta limitada AB, la proyeccion de esta recta sobre XY es el intervalo *ab* que separa las proyecciones de sus extremidades A y B.

TEOREMA.

222. *Si desde el vértice* A *del ángulo recto de un triángulo rectángulo* ABC *se baja la perpendicular* AD *á la hipotenusa:* 1.°, *cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyeccion sobre la hipotenusa;* 2.°, *la perpendicular* AD *es media proporcional entre los dos segmentos* BD *y* CD *de la hipotenusa (fig. 160).*

En efecto:

1.° Las rectas AC y AD son antiparalelas con respecto al ángulo B (**195**), puesto que forman un ángulo recto, la primera con el lado BA, la segunda con el lado BC. Se tiene, pues (**198**),

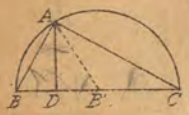
$$\overline{BA}^2 = BC.BD,$$

y análogamente demostraríamos que

$$\overline{CA}^2 = BC.CD.$$

2.° Siendo las rectas AC y AD antiparalelas con respecto al ángulo B, los ángulos BAD y C son iguales (**195**); por consiguiente, si llevamos el triángulo ADB á ADB', haciéndole girar alrededor de AD, el ángulo B'AD será igual al ángulo C, y las dos rectas AB' y AC serán antiparalelas con respecto al ángulo ADC. Se tendrá, pues,

Fig. 160.



$$\overline{AD}^2 = B'D.CD \text{ ó } \overline{AD}^2 = BD.CD.$$

COROLARIO.

223. Uniendo un punto cualquiera A de una circunferencia con las extremidades B y C de un diámetro *(fig. 160)*, se forma un triángulo rectángulo (**143**). De aquí otra manera de enunciar la proposicion anterior:

1.° *Toda cuerda* AB *de un círculo es media proporcional entre el diámetro* BC *que pasa por una de sus extremidades y su proyeccion* BD *sobre ese diámetro.*

2.° *La perpendicular* AD, *bajada desde un punto cualquiera* A *de una circunferencia sobre un diámetro* BC, *es media proporcional entre los dos segmentos* BD *y* CD *de ese diámetro.*

TEOREMA.

224. *Si los tres lados de un triángulo rectángulo están valuados en números por medio de una unidad comun, el cuadrado del número que mide la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los números que miden los dos catetos;* ó con más brevedad, *en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.*

En efecto, sumando las dos igualdades (**222**, 1.°)

$$\overline{AB}^2 = BC.BD, \ \overline{AC}^2 = BC.CD,$$

resulta

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC\,(BD + CD)$ ó $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.

COROLARIO.

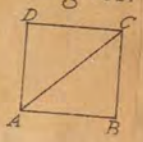
225. Este teorema permite calcular uno de los lados de un triángulo rectángulo cuando se conocen los otros dos.

Si, por ejemplo, conocemos los catetos b y c, la hipotenusa a resulta de la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ de donde } a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Sean $b = 3$, $c = 4$, tendremos $a = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Fig. 161.



Si se conoce la hipotenusa a y uno de los catetos b, se obtiene el otro cateto c por la fórmula

$$c^2 = a^2 - b^2, \text{ de donde } c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Para $a = 5$ y $b = 3$, resulta $c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

De la proposicion anterior podemos deducir tambien que *la relacion entre la diagonal y el lado de un cuadrado es igual á* $\sqrt{2}$. La diagonal AC *(fig. 161)* es, en efecto, hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles ABC, en el cual se verifica

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{2AB}^2;$$

de donde

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = 2 \text{ y } \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}.$$

Así la diagonal y el lado de un cuadrado son dos rectas *inconmensurables*, puesto que su relacion es un número inconmensurable. Por consideraciones puramente geométricas ya lo habíamos demostrado en el núm. **149**.

TEOREMA.

226. *En todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto á un ángulo agudo es igual á la suma de los cuadrados de los otros*

BIBLIOTECA DEL C. O. A. M.

dos lados, menos dos veces el producto de uno de estos lados por la proyeccion del otro sobre él.

Sean ABC el triángulo propuesto, C un ángulo agudo y CD la proyeccion del lado AC sobre CB; se quiere demostrar la relacion

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC.CD.$$

Dos casos pueden presentarse, segun que la perpendicular AD cae dentro ó fuera del *ángulo* ABC; el primero tiene lugar cuando el ángulo ABC es agudo; el segundo cuando ese ángulo es obtuso (**43**).

En el primer caso *(fig. 162)*, el triángulo rectángulo ABD nos da

$$(1) \qquad \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 .$$

Ahora bien, puesto que el punto D, por hipótesis, está situado entre C y B, tenemos

$$BD = BC - CD;$$

y por un teorema conocido de Aritmética (*),

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC.CD.$$

Sustituyendo este valor de $\overline{BD}^2$ en la expresion (1), resulta

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 - 2BC.CD;$$

y como en el triángulo rectángulo ACD

$$\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 ,$$

obtenemos finalmente

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC.CD.$$

En el segundo caso *(fig. 163)*, la demostracion es la misma. Verdad es que en vez de

---

(*) El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primer número, más el cuadrado del segundo, menos el doble producto de ambos números.

Fig. 162.

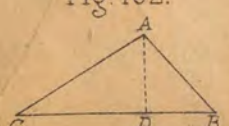
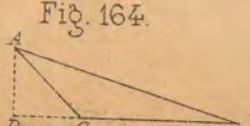


Fig. 163.

Fig. 164.



$BD = BC - CD$, se tiene $BD = CD - BC$;

pero como, segun el teorema citado de Aritmética, el cuadrado de BD sigue siendo el mismo, y solo de ese cuadrado hemos hecho uso en la demostracion, se ve que todo el razonamiento subsiste.

TEOREMA.

227. *Si uno de los ángulos de un triángulo es obtuso, el cuadrado del lado opuesto á ese ángulo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más dos veces el producto de uno de estos lados por la proyeccion del otro lado sobre él (fig. 164).*

Sean ABC el triángulo propuesto, C el ángulo obtuso, y CD la proyeccion de AC sobre BC; se quiere demostrar la igualdad

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC.CD.$$

El triángulo rectángulo ABD nos da

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2. \quad (1)$$

Ahora bien, puesto que el ángulo ACB es obtuso, la perpendicular AD cae fuera del triángulo (**43**), y el punto D es exterior á BC: tenemos, por consiguiente,

$$BD = BC + CD;$$

y en virtud de un teorema conocido de Aritmética (*),

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC.CD.$$

Sustituyendo este valor de $\overline{BD}^2$ en la igualdad (1), encontramos

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2BC.CD;$$

y como en el triángulo rectángulo ACD

(*) El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el doble producto de los dos números.

$$\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2,$$

resulta, finalmente,

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC.BD.$$

COROLARIO.

228. De los tres teoremas anteriores podemos deducir que, *en un triángulo, el cuadrado de un lado es menor, igual ó mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos, segun que el ángulo opuesto á aquel lado es agudo, recto ú obtuso;* luego recíprocamente (**40**), *un ángulo de un triángulo es agudo, recto ú obtuso, segun que el cuadrado del lado opuesto es menor, igual ó mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.*

Por ejemplo, si $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, el ángulo A es recto y el triángulo es rectángulo, puesto que $25 = 16 + 9$. Si $a = 11$, $b = 9$, $c = 8$, el ángulo A es agudo, puesto que $11^2 = 121$ es menor que $9^2 + 8^2$; ó lo que es igual, $81 + 64 = 145$.

229. Como aplicacion de los teoremas que preceden, vamos á calcular las alturas de un triángulo en funcion de los lados. Designaremos por ABC el triángulo considerado, y por a, b, c las longitudes de los lados respectivamente opuestos á los ángulos A, B, C.

Busquemos la altura $AD = h$ que parte del vértice A. De los dos ángulos B y C, por lo menos uno es agudo; supongamos que es el C *(fig. 163)*.

En el triángulo rectángulo ADC (**225**) se tiene

$$h^2 = b^2 - \overline{CD}^2,$$

y en el triángulo ABC (**226**)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a.CD.$$

De esta igualdad sacamos

$$CD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

y sustituyendo en la primera

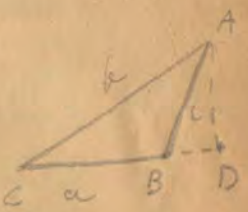
$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2};$$

ó en virtud de un teorema de Aritmética (*).

$$h^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}.$$



Si ahora designamos por p el semiperímetro del triángulo ABC, es decir, si hacemos

$$a + b + c = 2p,$$

tendremos

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a),$$
$$a + c - b = 2p - 2b = 2(p - b),$$
$$a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c).$$

Introduciendo estos valores en la expresion de h^2, simplificando y extrayendo la raíz cuadrada, se obtiene

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ejemplo. Para las alturas h, h', h'', del triángulo cuyos lados son 13, 9 y 6, se encuentra, con aproximacion de un milímetro,

$$h = 3{,}641,\ h' = 5{,}259,\ h'' = 7{,}886.$$

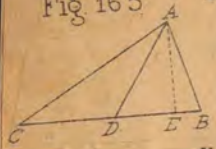
TEOREMA.

230. *La suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual á dos veces el cuadrado de la mediana relativa al tercer lado, más dos veces el cuadrado de la mitad de ese tercer lado (fig. 165).*

Sean ABC el triángulo propuesto, AD la mediana relativa al lado BC, y AE la perpendicular bajada desde el punto A sobre BC.

(*) La diferencia de los cuadrados de dos números, es igual al producto de la suma de dichos números por su diferencia.

Fig. 165



Siendo el ángulo ADB agudo, se tiene, en el triángulo ADB,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD.DE;$$

y siendo el ángulo ADC obtuso, se tiene en el triángulo ADC,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD.DE.$$

Sumando las dos igualdades anteriores, y observando que CD = BD, obtenemos

$$(1) \qquad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2AD^2 + 2BD^2.$$

Corolarios.

231. Consideremos un cuadrilátero ABCD *(fig. 166)*, y sean E y F los puntos medios de las dos diagonales AC y BD. Aplicando sucesivamente el teorema anterior á los dos triángulos ABC, ADC, se tiene

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2,$$

$$\overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2;$$

sumándolas y designando por S la suma de los cuadrados de los cuatro lados del cuadrilátero,

$$S = 4\overline{AE}^2 + 2(\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2).$$

Ahora bien, en el triángulo BED se tiene

$$\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2 = 2\overline{BF}^2 + 2\overline{EF}^2.$$

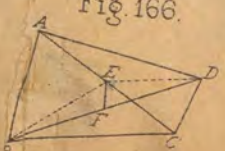
Luego

$$S = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{BF}^2 + 4\overline{EF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2.$$

Así, *la suma de los cuadrados de los cuatro lados de un cuadrilátero cualquiera es igual á la suma de los cuadrados de las dos diagonales, mas cuatro veces el cuadrado de la recta que une los puntos medios de esas diagonales.*

Para que el cuadrilátero sea un paralelógramo, es necesario y suficiente que los puntos E y F coincidan **(85, 86)**. Luego *en todo paralelógramo la suma de los cuadrados de los lados es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales;* y recíprocamente, *si la suma de los cuadrados de los lados de un cuadrilátero es igual á la suma de los cuadrados de las dos diagonales, el cuadrilátero es un paralelógramo.*

Fig. 166.



232. Volvamos al triángulo A B C *(fig. 165)*. Si permaneciendo fijos los puntos B y C, el vértice A se mueve de manera que la suma de los cuadrados de los lados A B y A C permanece constante, la igualdad (1) del núm. **230** nos enseña que el valor de la mediana A D debe permanecer constante. Luego *el lugar de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus distancias á dos puntos fijos es constante, es una circunferencia cuyo centro está en el punto medio de la recta que une los dos puntos fijos.* Para hallar el radio A D de este círculo, basta sustituir en la igualdad (1) la suma $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$ por la constante dada K^2; así tenemos,

$$K^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2, \quad \overline{AD}^2 = \frac{K^2}{2} - \overline{BD}^2, \quad AD = \sqrt{\frac{K^2}{2} - \overline{BD}^2}.$$

Se ve que el lugar geométrico buscado no existe sino en tanto que se verifica la condicion

$$\frac{K^2}{2} > \overline{BD}^2 \text{ ó } K > BD\sqrt{2}. \text{ (*)}$$

233. Como última aplicacion del teorema anterior, vamos ahora á calcular las medianas de un triángulo en funcion de sus lados.

Si m es la mediana relativa al lado $BC = a$, se tiene, por la igualdad (1),

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ de donde } m = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Ejemplo. En un triángulo cuyos lados son 13, 9 y 6, obtenemos para las medianas respectivas m, m', m'', con un milímetro de aproximacion,

$$m = 4{,}031,\ m', = 9{,}069,\ m'' = 10{,}770.$$

TEOREMA.

234. *La diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al doble producto del tercer lado por la proyeccion de la mediana correspondiente sobre este lado.*

Sea A B C el triángulo propuesto *(fig. 165)*; de las dos igualdades

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD.DE,$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD.DE,$$

(*) NOTA 13.

consideradas en el núm. **230**, restando la primera de la segunda y observando que BD = CD, resulta:

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 4BD.DE \text{ ó } \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 2BC.DE.$$

COROLARIO.

235. Si suponemos que los puntos B y C permanecen fijos, y que el vértice A se mueve de manera que la diferencia $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$ sea constante, la igualdad anterior nos demuestra que la proyeccion DE de la mediana no varía; es decir, que la proyeccion E del vértice móvil A sobre la recta BC no varía. Luego *el lugar geométrico de los puntos* A, *tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á dos puntos fijos* B *y* C *es constante, es una recta perpendicular á la* BC *que une los dos puntos fijos.* Para tener el valor DE basta reemplazar en la igualdad última la diferencia $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$ por la constante dada K^2 así obtendremos

$$K^2 = 2BC.DE, \quad DE = \frac{K^2}{2BC} \text{ (*)}$$

TEOREMA.

236. *El producto de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado de la bisectriz de su ángulo, mas el producto de los dos segmentos que esa bisectriz determina sobre el tercer lado.*

En efecto, sean *(fig. 167)* ABC el triángulo propuesto, ACEBE′ el círculo circunscrito y AD la bisectriz del ángulo BAC, la cual pasa necesariamente por el punto E medio del arco BC; los triángulos ABE, ADC, tienen dos ángulos iguales, á saber: el BAE igual al DAC, por ser la recta AE bisectriz del ángulo BAC, y los BEA, DCA, tambien iguales por inscritos en el mismo segmento BECA. Los dos triángulos serán, pues, semejantes, y tendremos

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

ó bien **(199)**

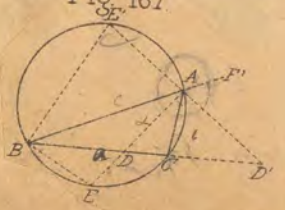
$$AB.AC = AE.AD = (AD + DE)AD = \overline{AD}^2 + DA.DE = \overline{AD}^2 + DB.DC.$$

237. Considerando la bisectriz AD′ del ángulo exterior CAF′, la cual pasa por el punto E′, medio del arco BAC, se deduciria de la semejanza de los triángulos ACD′, ABE′ la igualdad

$$AD'.AC = AE'.AD',$$

(*) NOTA 13.

Fig. 167



que podria transformarse en la siguiente

$$AB.AC = D'B.D'C - \overline{AD'}^2.$$

Luego *el producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de los dos segmentos sustractivos que la bisectriz de su ángulo exterior determina sobre el tercer lado, menos el cuadrado de esta bisectriz.*

238. Estos teoremas permiten calcular la longitud de las bisectrices de un triángulo en funcion de los lados.

Se trata, por ejemplo, de la bisectriz $AD = \alpha$; basta reemplazar en la expresion

$$bc = \alpha^2 + DB.DC,$$

los segmentos BD y DC por sus valores, deducidos (**191**) de las relaciones

$$\frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB + DC}{b + c} = \frac{a}{b + c}.$$

Despues de efectuar las reducciones, y llamando p el semiperímetro del triángulo, se obtiene

$$\alpha = \frac{2}{b + c}\sqrt{bcp\,(p - a)}.$$

Un cálculo análogo nos daria para la bisectriz $AD' = \alpha'$ del ángulo exterior

$$\alpha' = \frac{2}{c - b}\sqrt{bc\,(p - b)\,(p - c)}.$$

Ejemplo. Para las bisectrices interiores α, β, γ, y para las exteriores α', β', γ'. del triángulo cuyos lados son 13, 6 y 9, se obtiene, con un milímetro de aproximacion,

$$\alpha = 3{,}883\ \ \beta = 7{,}778\ \ \gamma = 10{,}407,$$
$$\alpha' = 30{,}983\ \ \beta' = 7{,}137\ \ \gamma = 12{,}093.$$

Escolio.

239. Hé aquí otra expresion, muchas veces útil, del producto de dos lados de un triángulo:

El producto de dos lados AB, AC, *de un triángulo es igual al producto del diámetro* AD *del círculo circunscrito, por la altura* AE *relativa al tercer lado (fig. 168).*

La igualdad que se quiere demostrar es

$$AB.AC = AD.AE \text{ ó } \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

Fig. 168.

la cual resulta inmediatamente de la semejanza de los triángulos rectángulos ABD, AEC, cuyos ángulos agudos D y C son iguales por inscritos en el mismo segmento.

Este teorema permite calcular el radio R del círculo circunscrito en funcion de los lados del triángulo; basta para ello sustituir en la igualdad

$$bc = 2R.AE,$$

la altura AE, por su valor dado en el núm. **229**; se obtiene así:

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}$$

Si $a = 13$, $b = 9$, $c = 6$, resulta $R = 7{,}416$.

TEOREMA.

240. *En todo cuadrilátero inscriptible el producto de las diagonales es igual á la suma de los productos de los lados opuestos y recíprocamente.*

Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera *(fig. 169)*; fórmese el ángulo CIB igual al ángulo ABD, el BCI igual al ADB, y trácese AI.

Los triángulos BCI, ABD, por tener dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes; y por consiguiente,

$$(1)\quad \frac{AB}{BI} = \frac{BD}{BC}, \text{ y } \frac{AD}{IC} = \frac{BD}{BC} \text{ ó } AD.BC = BD.IC,$$

La primera proporcion y la igualdad de los ángulos ABI, DBC, prueban que los triángulos ABI, DBC, son semejantes, por tener un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales; luego

$$(2)\quad \frac{AB}{BD} = \frac{AI}{DC} \text{ ó } AB.DC = BD.AI,$$

y sumando las igualdades (1) y (2).

$$AB.DC + AD.BC = BD\,(AI + IC).$$

Como AI + IC es mayor que AC, se ve que, en general, en un cuadrilátero el producto de las diagonales es menor que la suma de los productos de los lados opuestos. Para que haya igualdad entre los dos productos es necesario que AC = AI + IC, es decir que el ángulo BCI, igual al ángulo BDA, sea tambien igual al BCA; en otros términos, que la circunferencia determinada por los puntos A, B, C, pase por el punto D.

Fig. 169

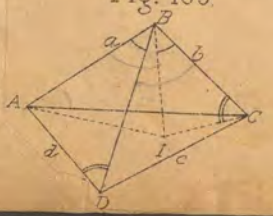


Fig. 170.

Corolario.

241. Sea ABCD *(fig. 170)* un cuadrilátero inscrito; tomando el arco AD′ igual al arco CD, y el arco DA′ igual al arco AB, se forman dos nuevos cuadriláteros inscritos CBAD′, BCDA′, que dan, en virtud del teorema anterior,

$$AC.BD' = AB.CD' + CB.AD', \quad BD.CA' = DC.BA' + BC.DA'.$$

Dividiendo miembro á miembro, y observando que

$$BD' = CA', CD' = BA' = AD, AD' = CD, \quad DA' = AB,$$

puesto que á arcos iguales corresponden cuerdas iguales, se obtiene

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB.AD + CB.CD}{DC.DA + BC.BA}.$$

Luego *en todo cuadrilátero inscriptible la relacion de las diagonales es igual á la relacion entre la suma de los productos de los lados que terminan en las extremidades de la primera diagonal, y la suma de los productos de los lados que terminan en las extremidades de la segunda.* La recíproca es verdadera (*).

Escolio.

242. Este teorema permite calcular las diagonales $AC = x$, $BD = y$, de un cuadrilátero inscrito en funcion de los lados $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. En efecto, segun las propiedades demostradas,

$$xy = ac + bd, \quad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd};$$

de donde multiplicando y dividiendo estas igualdades miembro á miembro,

$$x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}; \quad y^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

§ V.—Problemas relativos á líneas proporcionales.

243. *Dividir una recta* A *en partes proporcionales á rectas dadas* M, N, P, *ó en un número dado de partes iguales.*

Despues de haber trazado un ángulo de magnitud conveniente *(fig. 171)*, tómese sobre el lado BC una longitud BE igual á A, y sobre el lado BD longitudes BF, FG, GH, res-

(*) NOTA 14.

pectivamente iguales á M, N, P. Tírese HE, y trácense las paralelas FL, GK á HE. La recta BE ó A quedará así dividida, en los puntos L y K, en partes proporcionales á M, N, P. Tenemos, en efecto (**188**),

$$\frac{BL}{BF} = \frac{LK}{FG} = \frac{KE}{GH} \text{ ó } \frac{BL}{M} = \frac{LK}{N} = \frac{KE}{P}.$$

244. Si se quisiera dividir A proporcionalmente á números dados m, n, p, representaríamos estos números por rectas M, N, P, tomando una longitud arbitraria por unidad, y entraríamos en el caso anterior.

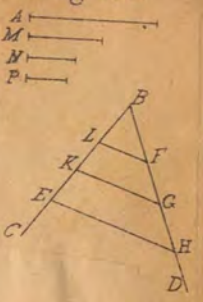
245. El procedimiento gráfico que acabamos de indicar permite tambien dividir una recta A en partes iguales; basta suponer que M, N y P son iguales entre sí; esto equivale á llevar sobre BD longitudes BF, FG, GH, iguales entre sí, y despues trazar por F y G paralelas á HE.

246. Cuando son varias las rectas que se quieren dividir en partes iguales, suele preferirse el procedimiento siguiente:

Sea, por ejemplo, 5 el número de partes en que se quiere dividir las rectas. Empezaremos por trazar una recta indefinida CD *(fig. 172)*, sobre la cual se llevará cinco veces una misma abertura de compás CE = EF = FG = GH = HD. Desde las extremidades C y D como centros, con un radio igual á CD, descríbanse dos arcos de círculo, que se cortarán en un punto O, y tracemos OC, OE, OF, OG, OH, OD.

Hecho esto, tómense OA y OB iguales á una de las rectas que se quiere dividir, y trácese AB, la longitud AB será igual á la recta considerada, porque el triángulo OCD es equilátero y por tanto el triángulo OAB, que le es semejante, tambien debe serlo; además, la recta AB queda dividida (**218**), por las secantes que parten de O, en cinco partes proporcionales á las de CD, es decir, iguales entre sí.

Fig. 171.



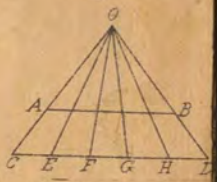
PROBLEMA.

247. *Hallar la cuarta proporcional á tres rectas dadas* M, N, P.

Despues de haber trazado un ángulo BAC de magnitud conveniente *(fig. 173)*, llévense sobre el lado AB las longitudes AB y AD respectivamente iguales á M y N, y sobre el lado AC una longitud AC igual á P; tírese la recta BC, y la DE que le es paralela; AE será la cuarta proporcional buscada. Se tiene, en efecto (**189**),

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \text{ ó } \frac{M}{N} = \frac{P}{AE}.$$

Fig. 172.



Escolios.

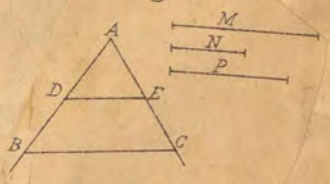
248. Si las rectas N y P fuesen iguales, AE sería la tercera proporcional á M y N.

249. Si quisiéramos construir una recta x ligada á varias longitudes dadas a, b, c, d, a', b', c', por una expresion de la forma

$$x = \frac{abcd}{a'b'c'},$$

en la cual el numerador contiene un factor más que el denominador, hariamos sucesivamente

Fig. 173.



$$\frac{ab}{a'} = \alpha, \quad \frac{\alpha c}{b'} = \varepsilon;$$

de donde sacariamos

$$x = \frac{\varepsilon d}{c'}.$$

Se empezaria por construir la recta auxiliar α, que es la cuarta proporcional á a' a, b; despues la recta ε, que es la cuarta proporcional á b', α, c; y finalmente x, que es la cuarta proporcional á c', ε, d.

Fig. 174.

Fig. 175.

PROBLEMA.

250. *Construir la media proporcional á dos rectas dadas* A *y* B.

1.° Sobre una recta indefinida tómense, una á continuacion de otra, dos longitudes CD y DE respectivamente iguales á A y B. Descríbase una semicircunferencia que tenga por diámetro CE, y por el punto D levántese la perpendicular DF á CE. La recta DF será (**223**) la media proporcional á CD y DE; es decir, entre A y B.

2.° Cuando las rectas dadas A y B son un poco grandes, se prefiere el siguiente método: tómense sobre una recta indefinida *(fig. 175)*, y á partir del mismo punto C, dos longitudes CD y CE respectivamente iguales á A y B; descríbase la semicircunferencia cuyo diámetro es CD, y levántese EF perpendicular á CD; por último, trácese la FC. Esta cuerda FC (**223**) será media proporcional á CD y CE; es decir, á A y B.

3.° Tambien se podria describir una circunferencia cualquiera que pasase por los puntos D y E, despues de tomadas las magnitudes CD = A y CE = B *(fig. 175)*, por ejemplo, la circunferencia que tiene por diámetro ED, y trazar la tangente CG á dicha circunferencia. Esta tangente (**201**) es media proporcional entre CD y CE; es decir, entre A y B. Bajo el punto de vista gráfico, este procedimiento es menos ventajoso que los anteriores; no conviene, pues, emplearlo sino cuando se quiere efectuar la construccion en una figura que contiene ya trazadas algunas de las líneas que el método exige.

Escolios.

251. La media proporcional á dos rectas dadas suele designarse bajo el nombre de *media geométrica*, mientras que se llama *media aritmética* de esas dos longitudes á su semisuma.

Los tres lados del triángulo rectángulo CGO′ *(fig. 175)* representan respectivamente: CG la media geométrica de las rectas A y B; CO′ su media aritmética y GO′ su semidiferencia. Como el lado GC es menor que la hipotenusa CO′, se ve

$CO' = \frac{A+B}{2} = \frac{CD+CE}{2}$; en efecto

$CO' = CD - O'D = CD - \frac{CD-CE}{2}$;

$= \frac{2CD-CD+CE}{2} = \frac{CD+CE}{2}$ "

que *la media geométrica es menor que la media aritmética.* Llamemos δ su diferencia, el triángulo O'CG nos da

$$\overline{O'G}^2 = \overline{CO'}^2 - \overline{CG}^2 = (CO' + CG)\,(CO' - CG);$$

ahora bien, las rectas CO' y CG son ambas mayores que la menor B de las dos líneas propuestas; luego

$$(*)\quad \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 > 2B.\delta, \text{ de donde } \delta < \frac{(A-B)^2}{8B}.$$

Así, *la diferencia entre la media aritmética y la media geométrica de dos longitudes* A *y* B *es menor que el cuadrado de la diferencia de esas longitudes, dividido por ocho veces la menor.*

PROBLEMA.

252. *Trazar una tangente comun á dos círculos (fig. 176).* Sean C y C' los dos círculos, R y R' sus radios, y supongamos, para fijar las ideas, R > R'. Si AA' es una tangente comun exterior que corta á la línea de los centros en O más allá de CC', los radios CA y C'A' serán paralelos y del mismo sentido; por consiguiente,

$$(1)\qquad \frac{OC}{OC'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{R}{R'}.$$

Ahora bien, toda recta MM' que une las extremidades de dos radios paralelos y del mismo sentido CM y C'M', corta igualmente á la línea de los centros en un punto O_1, situado fuera de CC', y tal que

$$\frac{O_1C}{O_1C'} = \frac{CM}{C'M'} = \frac{R}{R'}.$$

Luego los dos puntos O y O_1 se confunden en uno solo (**187**).

De igual manera vemos que si BB' es una tangente comun interior, que corta á la línea de los centros en O', entre C y C', los radios CB, C'B' son paralelos y de sentido contrario; luego

$$(2) \qquad \frac{O'C}{O'C'} = \frac{CB}{C'B'} = \frac{R}{R'}.$$

Ahora bien, toda recta MN' que une las extremidades de dos radios paralelos y de sentido contrario CM, C'N', corta igualmente á la línea de los centros en un punto O'_1 situado entre C y C', y tal que

$$\frac{O'_1C}{O'_1C'} = \frac{CM}{C'N'} = \frac{R}{R'}.$$

Los dos puntos O' y O'_1 se confunden, pues, en uno solo (**187**).

De lo dicho resulta la construccion siguiente: Trácese en el primer círculo un radio cualquiera CM, y en el segundo el diámetro M'N' paralelo á CM; tírense MM' y MN', y desde los puntos O y O' en que esas rectas cortan á la línea de los centros, trácense las tangentes á uno de los círculos; estas tangentes lo serán tambien al otro círculo.

Habrá dos tangentes comunes exteriores en tanto que el punto O esté situado fuera del círculo C. En la relacion (1), puesta bajo la forma

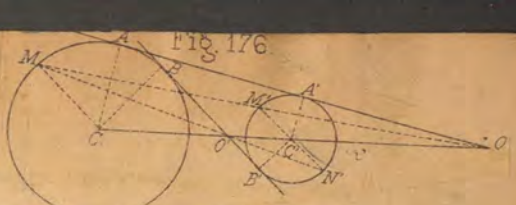
$$\frac{OC - OC'}{OC} = \frac{R - R'}{R}; \quad OC = \frac{CC'}{R - R'} \cdot R,$$

vemos que, para que OC sea mayor que R, es necesario y suficiente que la distancia CC' de los centros sea mayor que la diferencia R — R' de los radios; es decir, que los dos círculos no sean ni interior el uno al otro, ni tangentes interiormente.

En este último caso, CC' = R — R'; por tanto, OC = R, y el punto O no es otro que el punto de contacto de los dos círculos; entónces hay una sola tangente comun exterior.

Análogamente, para que haya dos tangentes comunes interiores es necesario que el punto O' sea exterior al círculo C. La relacion (2) puesta bajo la forma

$$\frac{O'C + O'C'}{O'C} = \frac{R + R'}{R}; \quad O'C = \frac{CC'}{R + R'} \cdot R,$$



nos enseña que, para que O'C sea mayor que R, es necesario y suficiente que la distancia CC' de los centros sea mayor que la suma R + R' de los radios; es decir, que los dos círculos sean exteriores uno á otro. Cuando los dos círculos son tangentes exteriormente, CC' = R + R', y por tanto O'C = R, el punto O' no es ahora otro que el de contacto de los dos círculos; no hay, pues, en este caso más que una tangente comun interior.

En resúmen.

Dos círculos exteriores tienen *(fig. 124) cuatro* tangentes comunes, dos exteriores, dos interiores.

Dos círculos tangentes exteriormente *(fig. 125)* tienen *tres* tangentes comunes, dos exteriores, una interior.

Dos círculos secantes *(fig. 126)* tienen dos tangentes comunes, ambas exteriores.

Dos círculos tangentes interiormente *(fig. 127)* tienen una sola tangente comun, que es exterior.

Si un círculo es interior al otro, no tienen tangente comun.

Hemos supuesto los dos círculos desiguales. Si R' = R, las fórmulas anteriores se convertirian en

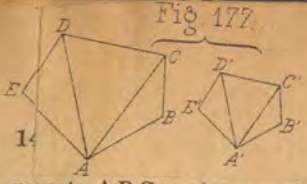
$$OC = R.\ \frac{CC'}{0} = \infty,\ O'C = \frac{CC'}{2}.$$

Alejándose indefinidamente el punto O en la recta que une los centros, las tangentes comunes exteriores llegan á convertirse en paralelas á dicha recta; y en cuanto á las interiores, se cortan en el punto medio de la recta que une los centros.

PROBLEMA.

253. *Construir sobre una recta dada:* 1.°, *un triángulo semejante á un triángulo dado;* 2.°, *un polígono semejante á otro polígono dado (fig. 177).*

1.° Para construir sobre la recta A'B', considerada como homóloga de AB, un triángulo semejante al triángulo ABC, fórmese un ángulo B'A'C', igual al ángulo BAC, y otro A'B'C' igual al ABC. El triángulo A'B'C' así obtenido y el pro-



puesto ABC serán semejantes, por tener dos ángulos respectivamente iguales (**206**).

2.° Para construir sobre A'B', considerada como homóloga de AB, un polígono semejante al ABCDE, descompóngase este último en triángulos, trazando por uno de sus vértices A las diagonales AC, AD. Constrúyase entonces sobre A'B' un triángulo A'B'C' semejante al ABC; despues, sobre A'C', otro triángulo A'C'D', semejante al ACD; y por último, sobre A'D' otro A'D'E', semejante al ADE. El polígono A'B'C'D'E' así obtenido, y el polígono ABCDE dado, serán semejantes por estar compuestos del mismo número de triángulos semejantes é igualmente dispuestos.

254. Si en vez de darse un lado A'B' del polígono pedido, se nos diese la relacion de semejanza $\frac{m}{n}$, podriamos aún aplicar el procedimiento anterior, con tal que empezáramos construyendo la recta A'B', cuya relacion con AB es igual á $\frac{m}{n}$ (**247**). Suele preferirse, sin embargo, el procedimiento siguiente:

Se unen los vértices del polígono dado ABCDE *(fig. 178)* con un punto O elegido arbitrariamente en su plano; se toma sobre OA una longitud OA', cuya relacion con OA sea igual á $\frac{m}{n}$; trácese despues en el ángulo AOB la recta A'B', paralela á AB, en el ángulo BOC, la B'C' paralela á BC, ..., y así sucesivamente. Los polígonos A'B'C'D'E', ABCDE, son semejantes porque (**213**) los triángulos aditivos OB'A', OA'E', OE'D', y los sustractivos OB'C', OC'D', cuya reunion constituye el polígono A'B'C'D'E', son respectivamente semejantes á los triángulos OBA, OAE, OED, y á los OBC, OCD, que reunidos forman el polígono dado ABCDE.

PROBLEMA.

255. *Construir dos rectas, cuya suma y cuyo producto se conocen (fig. 179).*

Sea BC la suma dada, y A una recta cuyo cuadrado es igual al producto dado. Supongamos el problema resuelto, y sean BF y FC las rectas buscadas; si describimos una semicircunferencia sobre BC como diámetro, la perpendicular FE será media proporcional entre BF y FC (**233**), y por consiguiente debe ser igual á A; la paralela trazada por E á CB, interceptará, pues, sobre la tangente en B una longitud BD, tambien igual á A. De este análisis resulta la construccion siguiente:

Sobre BC, como diámetro, descríbase una semicircunferencia; en el punto B levántese una perpendicular BD á BC, tómese en ella la longitud BD = A, trácese DEE' paralela á BC, y proyéctense sobre BC en F y F' los puntos E y E' en que esa paralela corta al círculo. Las dos rectas buscadas serán BF y FC, ó lo que es igual, BF' y F'C.

Así, cuando el problema es posible, no tiene más que una solucion, y para que sea posible es necesario y suficiente que la paralela DEE' encuentre á la semicircunferencia; es decir, que la recta BD ó A no sea mayor que el radio, ó la mitad de BC. Cuando la longitud A llega á su valor máximo $\frac{1}{2}$ BC, la paralela DEE' es tangente al círculo, y los dos segmentos de BC son OB y OC. De aquí sacamos que *el producto de dos rectas, cuya suma es constante, alcanza su valor máximo cuando las dos rectas son iguales entre sí.*

Escolio.

256. Si designamos por p y q la suma y el producto dados, tendremos

$$EO = BO = CO = \frac{p}{2};\ EF = BD = \sqrt{q},$$

$$OF = \sqrt{\overline{EO}^2 - \overline{EF}^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

y, por consiguiente,

$$BF = BO - OF = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Fig. 179.

$$CF = CO + OF = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

PROBLEMA.

257. *Construir dos rectas cuya diferencia y cuyo producto son conocidos (fig. 180).*

Sea EF la diferencia dada, y sea A la recta cuyo cuadrado es igual al producto dado. Supongamos el problema resuelto, y sean DE y DF las dos rectas buscadas. La tangente DB, trazada desde el punto D al círculo cuyo diámetro es EF, es media proporcional entre DE y DF (**201**), y por tanto debe ser igual á A. La tangente DB es, por otra parte, perpendicular al diámetro BC, y este igual á la diferencia dada EF; podemos, pues, deducir la siguiente construccion:

Sobre los lados de un ángulo recto tómense respectivamente una longitud BD igual á A, y una longitud BO igual á la mitad de la diferencia dada; desde el punto O como centro, con OB por radio, descríbase una circunferencia; trácese despues la recta DO, que cortará á la circunferencia en los puntos E y F; DE y DF serán las rectas pedidas.

El problema es siempre posible, y no tiene más que una solucion.

Escolio.

258. Si designamos por p y q la diferencia y el producto dados, tendremos

$$OE = OF = OB = \frac{p}{2}, \quad BD = \sqrt{q},$$

$$OD = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

y de consiguiente,

$$DE = OD - OE = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2},$$

Fig. 180.

$$DF = OD + OF = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} + \frac{p}{2}.$$

Escolio.

259. Los dos problemas anteriores permiten construir las raíces de toda ecuacion de segundo grado con una incógnita; es decir, de toda ecuacion comprendida en la forma

$$x^2 \pm px \pm q = o,$$

p y q siendo números positivos cualesquiera.

En efecto, de las cuatro ecuaciones

$$x^2 + px + q = o,$$
$$x^2 - px + q = o,$$
$$x^2 + px - q = o,$$
$$x^2 - px - q = o,$$

la primera se convierte en la segunda, y la tercera en la cuarta con solo cambiar x en $-x$. Basta, pues, construir las raíces de las dos siguientes

$$x^2 - px + q = o \text{ y } x^2 - px - q = o$$

Poniendo estas ecuaciones bajo la forma

$$q = x(p - x),\ q = x(x - p),$$

se ve que construir las raíces de la primera es construir dos rectas cuya suma es p y el producto q. Del mismo modo construir las raíces de la segunda, es construir dos rectas cuya diferencia es p y el producto q. Siempre que una cuestion de Geometría tratada por el Álgebra conduzca á una ecuacion de segundo grado, se sabrá, por consiguiente, construir la solucion.

PROBLEMA.

260. *Dividir una recta en media y extrema razon (fig. 181).*

Se dice que un punto divide á una recta AB en *media y extrema razon* cuando su distancia á uno de los extremos A de

la recta es media proporcional entre su distancia al otro extremo B y la recta entera AB.

Vemos *à priori*;

1.° Que entre A y B existe un punto X, y uno solo, que goza de la propiedad enunciada. Porque, desde A hasta B, la relacion $\frac{AB}{XA}$ decrece de una manera continua desde el infinito hasta 1, miéntras que la relacion $\frac{XA}{XB}$ crece desde cero hasta infinito; así, cuando el punto X se mueve de A á B, la primera relacion disminuye, la segunda aumenta; y como la primera empieza por ser mayor que la segunda y acaba siendo menor, existe entre A y B una posicion de X, y solo una, para la cual tendremos

$$(1) \qquad \frac{AB}{XA} = \frac{XA}{XB} \text{ ó } \overline{XA}^2 = AB.XB.$$

2.° Que sobre la prolongacion de AB, á la izquierda de A, existe un punto X', y sólo uno, que goza de la propiedad enunciada. Porque en este lado de la recta la relacion $\frac{AB}{X'A}$ crece de una manera continua desde cero hasta infinito, miéntras que la relacion $\frac{X'A}{X'B}$ decrece desde 1 hasta 0; existe, pues, á la izquierda de A una posicion de X', y sólo una, para la cual se verifica

$$(2) \qquad \frac{AB}{X'A} = \frac{X'A}{X'B} \text{ ó } \overline{X'A}^2 = AB.X'B.$$

3.° Que sobre la prolongacion AB, á la derecha de B, no puede existir punto alguno que goce de la propiedad referida. Porque la distancia de un punto de esta parte de la recta al punto A, siendo mayor que su distancia al punto B y mayor tambien que la recta AB, no puede ser media proporcional entre estas longitudes.

En resumen, sobre la recta indefinida que une los puntos

A y B existen dos puntos X y X′, y no más que dos, que dividen la recta AB en media y extrema razon; el primero X, *interior*, y los dos segmentos correspondientes XA, XB son entonces *aditivos;* el segundo X′, *exterior*, y los segmentos X′A, X′B son *sustractivos*.

Para determinar esos dos puntos X y X′, basta conocer AX y AX′. Ahora bien, si de la igualdad (2) se resta la igualdad (1), tenemos

$$\overline{X'A}^2 - \overline{XA}^2 = AB\,(X'B - XB),$$

ó

$$(X'A + XA)\,(X'A - XA) = AB\,(X'B - XB);$$

es decir,

$$XX'\,(X'A - XA) = AB.XX',$$

y, por consiguiente,

$$X'A - XA = AB.$$

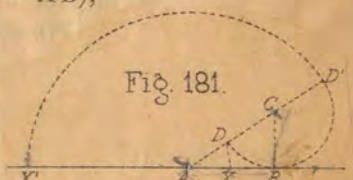


Fig. 181.

Por otra parte, la relacion (1) nos da

$$\frac{AB + XA}{AB} = \frac{XA + XB}{XA} \text{ ó } \frac{X'A}{AB} = \frac{AB}{XA};$$

es decir,

$$X'A.XA = \overline{AB}^2.$$

Luego la determinacion de las rectas AX y AX′ equivale á construir dos rectas cuya diferencia sea igual á AB y cuyo producto sea $\overline{AB}^2$; es un caso particular del problema del número **257**. De aquí la siguiente construccion:

Levántese en la extremidad B una perpendicular BC á la recta AB é igual á su mitad; desde C como centro, con CB por radio, descríbase una circunferencia; trácese AC, que cortará á la circunferencia en D y D′; la recta AD será la incógnita AX, y la recta AD′ será la incógnita AX′. Dos arcos de círculo descritos desde A como centro, con AD y AD′ por radio, cortarán á la recta indefinida AB en los puntos buscados X y X′.

Escolio.

261. Designando por a la recta AB, y reemplazando en la fórmula del núm. **258** p por a, y q por a^2, se encuentra

$$(1)\quad AX = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1),\ AX' = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Conviene observar que

$$BX = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5}),\ BX' = \frac{a}{2}(3+\sqrt{5}).$$

PROBLEMA.

262. *Describir una circunferencia que pase por dos puntos dados y sea tangente á una recta dada ó á un círculo dado.*

1.° Sean A y B *(fig. 182)* los dos puntos dados, y KL la recta dada. Prolonguemos AB hasta el punto C en que corta á KL. Si T es el punto de contacto del círculo buscado O con la recta dada, CT será la media proporcional (**201**) entre las dos rectas conocidas CB y CA. De aquí la siguiente construccion:

Trácese AB hasta su encuentro C con KL; determínese la media proporcional entre CB y CA, y tómese CT sobre CL, igual á la media obtenida. Levántese despues la perpendicular TO á KL, y la perpendicular OO′ en el punto medio de AB; el punto O comun á esas dos perpendiculares, será el centro del círculo buscado.

Si tomamos CT′, igual tambien á la media proporcional, pero á la izquierda del punto C, se obtiene otra solucion.

Si AB fuese paralela á KL, el punto de contacto estaria sobre la perpendicular levantada en el punto medio de AB y no habria más que una solucion.

Por último, es evidente que el problema no tiene solucion cuando los puntos A y B están á distinto lado de la recta KL.

2.° Sean B y C los dos puntos dados, y O la circunferencia dada *(fig. 183)*. Supongamos el problema resuelto, y sea A el punto en que el círculo pedido O′ toca al dado O; todo se re-

Fig. 182.

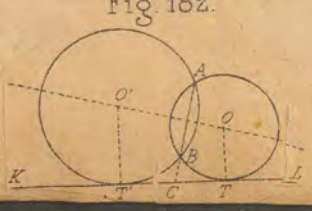


Fig. 183.

duce á encontrar el punto M en que la tangente AM corta á la recta BC prolongada. Ahora bien, si por los puntos B y C trazamos una circunferencia auxiliar cualquiera que corte á la circunferencia O en dos puntos D y E, la cuerda DE prolongada pasará por M. En efecto, designemos por ε el punto en que la recta MD corta á la circunferencia O; se tendrá

$$MD.M\varepsilon = \overline{MA}^2 = MB.MC.$$

Luego (**200**) el punto ε está sobre la circunferencia determinada por los tres puntos C, B, D, es decir, sobre la circunferencia auxiliar; no es otro, pues, que el de interseccion E de la circunferencia O con la auxiliar. De este análisis sacamos la construccion siguiente:

Por los dos puntos B y C trácese una circunferencia cualquiera que corte á la dada O en dos puntos D y E; y desde el punto M de interseccion de DE con BC, trácese una tangente MA al círculo O. El punto A será el de contacto del círculo dado O y del que se busca, cuyo centro O' habrá de estar en la interseccion de OA prolongada y de la perpendicular en el punto medio de BC.

La segunda tangente, trazada desde M al círculo dado O, daría otra solucion.

Si los puntos B y C estuviesen equidistantes del centro O, las rectas BC y DE serian paralelas; bastaria en tal caso trazar al círculo O una tangente paralela á BC; se obtendrian tambien dos soluciones.

Es evidente que el problema no es posible sino en tanto que los puntos B y C son ámbos exteriores ó ámbos interiores al círculo O.

§ VI.—Polígonos regulares.

DEFINICIONES.

263. Un polígono se dice que es *regular* cuando todos sus lados son iguales, así como sus ángulos. Tales son, por ejemplo, el triángulo equilátero y el cuadrado.

264. Se llama *línea quebrada regular* toda línea quebrada convexa cuyos lados y ángulos son iguales.

TEOREMA.

265. *Se puede siempre inscribir ó circunscribir á una circunferencia dada un polígono regular de un número cualquiera de lados.*

Supongamos la circunferencia dividida en n partes iguales, si n es el número de lados que debe tener el polígono.

1.° Trazando las cuerdas AB, BC, ... *(fig. 184)* que unen los puntos de division, se tendrá un polígono regular inscrito de n lados. En efecto, los lados de este polígono son iguales por ser cuerdas de arcos iguales, y sus ángulos son iguales por estar inscritos en segmentos iguales, puesto que cada ángulo, ABC por ejemplo, del polígono está inscrito en un segmento correspondiente á dos divisiones consecutivas de la circunferencia.

2.° Si trazamos las tangentes *(fig. 184)* por los puntos de division A, B, C, ..., se tendrá un polígono regular circunscrito de n lados. En efecto, en los triángulos GAB, HBC, ..., los lados AB, BC, ..., son iguales, y los ángulos en A, B, C, ..., formados por una tangente y una cuerda, son tambien iguales, puesto que todos ellos tienen por medida la mitad de una division de la circunferencia; los triángulos citados son, por consiguiente, isósceles é iguales, y se tiene $G = H = K = \ldots$, y además $AG = GB = BH = HC = CK, \ldots$; de donde se deduce $GH = HK =, \ldots$ Así, el polígono GHK, ..., tiene sus ángulos iguales é iguales sus lados.

En virtud de esta demostracion, para tener el polígono regular de n lados circunscrito á un círculo dado basta dividir la circunferencia en n partes iguales y trazar tangentes por los puntos de division. Ahora bien, los puntos medios M, N, P, ..., de los arcos AB, BC, CD, ..., subtendidos por los lados del polígono regular inscrito *(fig. 185)*, dividen evidentemente la circunferencia en n partes iguales; luego se tendrá un polígono regular circunscrito de n lados trazando las tan-

Fig. 184.

gentes por esos puntos. Muchas veces se prefiere este segundo método, porque el polígono regular circunscrito así obtenido A′B′C′D′ ..., tiene sus lados paralelos á los del polígono inscrito ABCD ..., y sus vértices A′, B′, C′, ..., sobre los mismos radios OAA′, OBB′ ... en que están los vértices del inscrito. En efecto, dos lados tales como BC y B′C′ son paralelos por perpendiculares á una misma recta ON; y además, dos tangentes tales como MB′, NB′ deben cortarse (**170**) sobre la bisectriz OB del ángulo MON.

Fig. 186.

266. Recíprocamente, *se puede siempre inscribir y circunscribir una circunferencia á un polígono regular dado.*

Sea ABCDEF el polígono regular dado *(fig. 186)*.

1.° Para demostrar que se puede circunscribir una circunferencia á ese polígono, basta probar que la circunferencia que pasa por tres vértices consecutivos cualesquiera A, B, C, pasa por el vértice siguiente D. Sea O el centro de la circunferencia determinada por los tres puntos A, B, C; tracemos OA, OD y la perpendicular OH á BC. Inviértase el cuadrilátero ABHO, haciéndolo girar alrededor de OH; los ángulos en H, siendo rectos, BH tomará la direccion HC, y el punto B caerá en C, puesto que BH = HC. Además, por ser el polígono regular, el ángulo ABH es igual al ángulo HCD, y el lado BA al lado CD; por consiguiente, el lado BA tomará la direccion CD, y el punto A caerá en D. Luego OD es igual al radio OA, y la circunferencia pasará por D.

2.° Los lados AB, BC, ... son cuerdas iguales del círculo circunscrito, y por tanto las perpendiculares OH, OG, ..., bajadas desde el centro á cada una de ellas, serán iguales (**104**); luego si desde O como centro, con OH por radio, se describe una circunferencia, ésta será tangente á los lados del polígono en sus puntos medios, y de consiguiente inscrita en el polígono.

Corolarios.

267. Se llama *centro* de un polígono regular el centro co-

mun O de la circunferencia inscrita y de la circunscrita. Ese punto, hallándose á la vez equidistante de todos los lados y de todos los vértices del polígono, es á la vez el punto de concurso de las bisectrices de todos los ángulos y de las perpendiculares levantadas en los puntos medios de todos los lados.

Se llama *radio* de un polígono regular el radio del círculo circunscrito, y *apotema* el radio del círculo inscrito.

Se llama *ángulo en el centro* de un polígono regular el ángulo AOB de dos radios consecutivos; este ángulo es igual al GOH, formado por dos apotemas consecutivas, y, por consiguiente, es el suplemento del GBH del polígono. Si n es, pues, el número de lados, y tomamos por unidad el ángulo recto, el ángulo en el centro valdrá $\frac{4}{n}$, y el del polígono $2 - \frac{4}{n}$. Se ve de esta manera que, excepto el triángulo equilátero, cuyo ángulo vale 60°, y el cuadrado, cuyos ángulos son rectos, todos los polígonos regulares tienen sus ángulos obtusos.

268. Por razonamientos iguales á los anteriores demostraríamos que toda línea quebrada regular es inscriptible y circunscriptible, y por tanto que tiene un centro, un radio y una apotema, los cuales son el centro comun y los radios de los círculos inscrito y circunscrito. Una línea quebrada regular no difiere, pues, de una porcion de polígono regular sino en que su ángulo en el centro no es necesariamente parte alícuota de cuatro ángulos rectos.

TEOREMA.

269. 1.° *Dos polígonos regulares del mismo número de lados, son semejantes.*

2.° *Su relacion de semejanza es igual á la de sus radios ó de sus apotemas.*

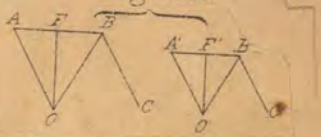
En efecto:

1.° Los dos polígonos tienen sus ángulos iguales, porque el valor del ángulo de un polígono regular no depende más que del número de lados (**267**), y el número de lados supone-

mos que es el mismo; por otra parte, los lados son proporcionales, puesto que en uno y otro polígono son iguales. Luego los polígonos considerados son semejantes.

2.° Sean *(fig. 187)* AB el lado del primer polígono, O su centro, OB su radio, OF su apotema; sean igualmente A'B' el lado del segundo polígono, O' su centro, O'B' su radio y O'F' su apotema. Los triángulos rectángulos BFO, B'F'O' son semejantes (**208**), puesto que los ángulos FBO, F'B'O' son iguales, por mitades de ángulos iguales ABC, A'B'C' (**267**). Se tiene, pues,

Fig. 187.



$$\frac{BF}{B'F'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{OF}{O'F'};$$

y como los polígonos propuestos son semejantes, su relacion de semejanza es igual á la relacion de sus lados AB, A'B', ó de sus semi-lados BF, B'F'; por consiguiente, la relacion de semejanza es igual á la de los radios ó apotemas de los polígonos.

Escolio.

270. Supongamos la circunferencia dividida en m partes iguales; designemos por a la longitud de cada una de esas partes, y unamos los puntos de division, contando de p en p, á partir de uno de ellos.

Si p es primo con m, la circunferencia ma y el arco pa, subtendido por cada una de las cuerdas sucesivas, tendrán por mínimo comun múltiplo pma, y se volverá al punto de partida despues de haber recorrido p veces la circunferencia ma, ó m veces el arco pa. De esta manera se habrá formado, pues, un polígono regular de m lados. Por ejemplo, en la *fig. 190*, en que la circunferencia ha sido dividida en 10 partes iguales, se obtiene, uniendo de 1 en 1 los puntos de division, el decágono regular convexo, y uniéndolos de 3 en 3 el decágono regular *estrellado*.

Si p y m, en vez de ser primos entre sí, tienen un divisor comun δ, el mínimo comun múltiplo del arco pa y de la cir-

cunferencia ma será $\frac{mp}{\theta}\,a$. Volveremos, pues, al punto de partida despues de haber recorrido $\frac{p}{\theta}$ veces la circunferencia ó $\frac{m}{\theta}$ veces el arco pa; en otros términos, se habrá formado así un polígono regular de $\frac{m}{\theta}$ lados, y no ya de m lados.

A primera vista parece resultar de aquí que existen tantos polígonos regulares (convexos ó estrellados) de m lados como números primos con m hay en la serie 1, 2, 3,... $(m-1)$. Pero si observamos que uniendo los puntos de division de p en p, suponiendo p y m primos entre sí, se obtiene el mismo polígono que uniéndolos de $m-p$ en $m-p$, se ve que en realidad *el número de polígonos regulares de* m *lados es igual al número de los enteros primos con* m *contenidos en la serie*

$$1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}.$$

Segun esto, no hay más que un exágono regular; hay dos pentágonos regulares, dos decágonos, cuatro pentedecágonos, etcétera (*).

Fig. 188.

§ VII.—Problemas sobre los polígonos regulares.

PROBLEMA.

271. *Inscribir un cuadrado en un círculo dado (fig. 188).*

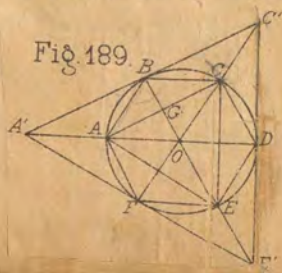
Basta trazar dos diámetros perpendiculares entre sí, y unir sus extremidades, para tener el cuadrado que se pide ABCD.

El triángulo AOB, rectángulo en O, da

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{2OA}^2; \text{ de donde } AB = OA\sqrt{2}.$$

(*) NOTA 15.

Fig. 189.



Así, *el lado del cuadrado inscrito en el círculo de radio* R *es igual á* R. $\sqrt{2}$.

Conviene observar que la apotema del cuadrado inscrito es igual á la mitad del lado, y que el lado del cuadrado circunscrito es igual al diámetro del círculo considerado.

COROLARIO.

272. Del cuadrado se pasa al octógono regular inscrito dividiendo *(fig. 188)* cada uno de los arcos AB, BC, CD, DA en dos partes iguales. Igualmente del octógono se deduciria el polígono de 16 lados, y así continuariamos. Se puede, por tanto, *con la regla y el compás*, inscribir los polígonos de 4, 8, 16, 32,..., y en general de 2^n lados.

PROBLEMA.

273. *Inscribir un exágono regular en un círculo (fig. 189).* Supongamos resuelto el problema, y sea ABCDEF el exágono buscado. Si trazamos dos radios consecutivos, OA, OB, se obtiene un triángulo OAB, que por ser isósceles tendrá sus ángulos A y B iguales. Pero observando que el radio BO prolongado pasa por el vértice E, se ve que el ángulo inscrito ABE tiene por medida la mitad del arco AFE, es decir, una division de la circunferencia; y como el ángulo en el centro AOB tiene tambien por medida una de esas divisiones AB, los dos ángulos ABO y AOB son iguales, y el triángulo OAB es equilátero. Luego *el lado del exágono inscrito en un círculo es igual al radio.*

Para inscribir un exágono regular en un círculo bastará, pues, llevar seis veces sobre la circunferencia una abertura de compás igual al radio, y unir consecutivamente los puntos de division así obtenidos.

COROLARIOS.

274. Uniendo de dos en dos los vértices del exágono, se

obtiene el triángulo equilátero inscrito ACE. El triángulo rectángulo ACD nos da

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2.$$

de donde

$$AC = R\sqrt{3}.$$

Luego *el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio* R *es igual á* $R\sqrt{3}$. La apotema OG es igual á la mitad del radio, porque la figura ABCO es un rombo.

275. Trazando tangentes por los puntos B, D, F, se forma el triángulo equilátero circunscrito A'C'E', cuyos lados son paralelos á los del triángulo equilátero inscrito ACE. La relacion de semejanza de estos dos triángulos es igual (**269**) á $\frac{OB}{OG}$; es decir, á 2. Así, una recta cualquiera del triángulo equilátero circunscrito es doble de su homóloga en el inscrito.

276. Del exágono se pasa al dodecágono regular inscrito, dividiendo en dos partes iguales los arcos subtendidos por los lados del primero; del dodecágono al polígono regular de 24 lados análogamente, y así podríamos continuar. Podemos, pues, *con la regla y el compás,* inscribir en un círculo los polígonos regulares de 6, 12, 24, 48,... y en general, 3.2^n lados.

Fig. 190.

PROBLEMA.

277. *Inscribir un decágono regular en un círculo dado (figura 190).*

Supongamos el problema resuelto; es decir, la circunferencia dividida en diez partes iguales por los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, K, I.

Uniendo los puntos de division sucesivos, se obtiene el decágono regular convexo ABCDEFGHKI; uniendo los puntos de division de tres en tres, se obtiene el decágono regular estrellado ADGICFKBEH (**270**). Se quieren conocer los lados AB y AD de estos dos decágonos.

Ahora bien, observando que el radio BO *(fig. 191)* prolongado pasa por el vértice G, se deduce que el ángulo AMB, cuyo vértice está en el interior del círculo, tiene por medida la mitad del arco AB, mas la mitad del arco GD; es decir, dos divisiones de la circunferencia. Por otra parte, el ángulo inscrito ABG tiene por medida la mitad del arco AG, es decir, tambien dos divisiones; y el ángulo en el centro BOD tiene esa misma medida. Los triángulos AMB, DMO son, de consiguiente, isósceles, y se tiene

Fig. 191.

$$AM = AB,\ MD = OD,\quad \text{ó bien}\quad AD - AM = OD.$$

Además, los ángulos OMA, DOA, siendo iguales por tener ámbos por medida tres divisiones, las rectas OM y OD son antiparalelas con respecto al ángulo OAD, y se tiene (**198**)

$$AD.AM = \overline{AO}^2.$$

Las dos igualdades últimas nos enseñan que los lados AD y AB = AM que se buscan tienen por diferencia el radio y por producto el cuadrado del radio. Luégo *se obtendrán los lados de los dos decágonos* (**260**) *dividiendo el radio en media y extrema razon; el mayor segmento aditivo será el lado del convexo, y el menor segmento sustractivo será el lado del estrellado.*

Si R es el radio del círculo, tendremos (**261**)

$$AB = R.\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ \text{y}\ AD = R\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Corolarios.

278. Si despues de tener dividida la circunferencia en diez partes iguales unimos alternativamente los puntos de division, obtenemos el *pentágono regular convexo* ACEGK; unién-

Fig. 192.

dolos de cuatro en cuatro, se obtiene el pentágono regular estrellado AEKCG *(fig. 192)*.

Para calcular los lados FD y FB *(fig. 193)* de los dos pentágonos regulares, basta notar que si trazamos el diámetro FA, las cuerdas AD y AB son los lados del decágono estrellado y del convexo. Ahora bien, los triángulos rectángulos FAD, FAB dan

$$FD = \sqrt{4R^2 - \overline{AD}^2}, \quad FB = \sqrt{4R^2 - \overline{AB}^2};$$

de donde reemplazando AD y AB por sus valores (**277**) y simplificando,

$$FD = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad FB = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \quad (*).$$

279. Del decágono convexo podemos pasar al polígono regular de 20 lados, de éste al de 40, ... y así sucesivamente, tomando los puntos medios de los arcos subtendidos por los lados del polígono anterior. Se puede, por consecuencia, *con la regla y el compás*, inscribir en un círculo los polígonos de 5, 10, 20, 40, ..., y, en general, 5.2^n lados.

PROBLEMA.

280. *Inscribir un pentedecágono regular en un círculo dado (fig. 194).*

Supongamos resuelto el problema, es decir, dividida la circunferencia en quince partes iguales por los puntos A, B, C, ..., N, O, P.

Uniendo los puntos de division de 1 en 1, de 2 en 2, de 4 en 4, de 7 en 7, se obtienen los lados AB, AO, AE, AI, del pentedecágono regular convexo y de los tres pentedecágonos estrellados.

Consideremos los lados AB y AE; si Q es el punto medio del arco CD, tendremos

Fig. 193.

Fig. 194.

(*) NOTA 16

$$\text{arco } AQ = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{15} = \frac{1}{6},$$

$$\text{arco } QB = \text{arco } QE = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{15} = \frac{1}{10}.$$

Luego, para construir AB y AE, basta llevar, á partir del punto A, una cuerda AQ igual al lado del exágono; despues, á partir de Q á uno y otro lado, una cuerda QB = QE igual al lado del decágono convexo.

Para calcular AB y AE, bajemos desde el punto Q las perpendiculares QS, QT, á esos lados; la igualdad de los triángulos rectángulos QAS y QAT, que tienen la hipotenusa comun y un ángulo agudo igual QAS = QAT, nos da

$$AS = AT,\ QS = QT;$$

además de la igualdad de los triángulos rectángulos BQS, TQE, que tienen la hipotenusa y un cateto igual, se deduce

$$ET = BS.$$

Luego

$$AB = AS - BS \text{ y } AE = AT + TE = AS + BS.$$

Pero QS es la mitad del lado del decágono convexo, puesto que AQ es igual al radio; y siendo el arco BQ la décima parte de la circunferencia, el ángulo inscrito BAQ es la mitad del ángulo en el centro del decágono convexo; tendremos, pues,

$$QS = \frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1);$$

por consiguiente,

$$AS = \sqrt{\overline{AQ}^2 - \overline{QS}^2} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$BS = \sqrt{\overline{BQ}^2 - \overline{QS}^2} = \frac{R}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{3}.)$$

De las igualdades anteriores sacamos

$$AB = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$$

$$AE = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$$

Análogamente se verá que si X es el punto medio de ML, AX es el lado del decágono estrellado y XO = XI el lado del exágono, lo que permitirá construir y calcular de una manera análoga los lados AO y AI de los otros dos pentedecágonos estrellados. Observando que XY es la mitad del lado del decágono estrellado, encontramos

$$AO = \frac{R}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$

$$AI = \frac{R}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$$

281. Del pentedecágono convexo pasariamos al polígono regular de 30 lados, al de 60, ..., etc., tomando los puntos medios de los arcos subtendidos por los lados del polígono anterior. Se puede, por consiguiente, *con la regla y el compás*, inscribir los polígonos regulares de 15, 30, 60, ..., y en general de $3.5.2^n$ lados.

PROBLEMA.

282. *Conocido el lado de un polígono regular inscrito en un círculo dado, calcular el lado del polígono inscrito cuyo número de lados es doble (fig. 195).*

Sean AB = *a* el lado conocido y R el radio del círculo; si CD es el diámetro perpendicular á AB, AC será el lado que buscamos; designémoslo por *a'*.

La cuerda AC es media proporcional entre el diámetro CD y su proyeccion CE = OC − OE sobre dicho diámetro; se tiene pues,

Fig. 195.

$$a'^2 = 2R(R - OE) = R(2R - 2OE).$$

Mas el triángulo rectángulo AEO nos da

$$OE = \sqrt{AO^2 - \overline{AE}^2} \text{ ó } OE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Tendremos, por consiguiente,

$$(1) \qquad a' = \sqrt{R\,(2R - \sqrt{4R^2 - a^2})}\ (*).$$

En particular, cuando se toma el radio por unidad, se tiene

$$(2) \qquad a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

Se puede dar á esta igualdad otra forma más cómoda para el cálculo numérico. El producto de la suma $2 + \sqrt{4 - a^2}$, por la diferencia $2 - \sqrt{4 - a^2}$, es igual á la diferencia de los cuadrados de 2 y de $\sqrt{4 - a^2}$, es decir, á

$$4 - (4 - a^2) = a^2.$$

Por tanto,

$$2 - \sqrt{4 - a^2} = \frac{a^2}{2 + \sqrt{4 - a^2}},$$

y, finalmente,

$$(3) \qquad a' = \frac{a}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a^2}}}.$$

Escolio.

283. Si partimos de un polígono cuyo lado se conoce, podemos, aplicando la fórmula (3), calcular sucesivamente los lados, y, por consiguiente, los perímetros de los polígonos regulares inscritos de $2n$, $4n$, $8n$, $16n$, ..., lados, siendo n el número de lados del polígono primitivo. El cuadro siguiente expresa los resultados que se obtienen, sea partiendo del cuadrado cuyo lado es $\sqrt{2}$, en el círculo de radio 1, sea del exágono, cuyo lado en el mismo círculo es 1:

(*) NOTA 17.

Número de lados.	Semiperímetro.	Número de lados.	Semiperímetro.
4	2,82842	6	3,00000
8	3,06146	12	3,10582
16	3,12144	24	3,13262
32	3,13654	48	3,13935
64	3,14033	96	3,14103
128	3,14127	192	3,14145

El error cometido en estos valores es menor que una unidad del quinto órden decimal, y siempre por defecto.

PROBLEMA.

284. *Conociendo el lado de un polígono regular inscrito, calcular el lado del polígono regular circunscrito semejante (figura 196).*

Sean AB $= a$ el lado que se nos da y R el radio del círculo; tracemos la tangente CD en el punto medio F del arco AB, y prolonguémosla hasta los puntos C y D en que corta á los radios OA y OB prolongados. CD será el lado que buscamos (**265**): designémoslo por α.

Los triángulos semejantes AOE, COF, nos dan

$$\frac{CF}{AE} = \frac{OF}{OE} \text{ ó } \frac{\alpha}{a} = \frac{R}{OE};$$

Fig. 196.

y como se tiene (**282**) además

$$OE = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2},$$

resulta que

$$(1) \qquad \alpha = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}} \ (*).$$

Cuando el radio se toma por unidad, tenemos

$$(2) \qquad \alpha = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$

(*) NOTA 17.

Escolio.

285. Conocidos los lados de los polígonos regulares de n, $2n$, $4n$, $8n$,... lados, inscritos en el círculo de radio 1, podemos calcular, aplicando la fórmula (2), los lados, y, por consecuencia, los perímetros de los polígonos regulares semejantes circunscritos al mismo círculo. El cuadro siguiente expresa los resultados que se obtienen partiendo del cuadrado ó del exágono:

Número de lados.	Semiperímetro.	Número de lados.	Semiperímetro.
4	4,00000	6	3,46411
8	3,31371	12	3,21540
16	3,18260	24	3,15967
32	3,15173	48	3,14609
64	3,14412	96	3,14272
128	3,14223	192	3,14188

Estos valores han sido obtenidos por exceso con aproximacion de menos de una unidad del quinto órden decimal.

PROBLEMA.

286. *Siendo dados el radio* r *y la apotema* a *de un polígono regular, calcular el radio* r' *y la apotema* a' *del polígono regular que tenga el mismo perímetro y un número de lados doble (figura 197).*

Sean AB el lado y O el centro del polígono dado; trazando el radio OGC perpendicular á AB, se tendrá

$$OC = r,\ OG = a.$$

Tracemos CA y CB y unamos los puntos medios D y E de estas dos cuerdas. La recta DE, paralela á AB é igual á su mitad, será el lado del polígono regular del mismo perímetro que el primero y cuyo número de lados es doble. Por otra parte, el ángulo DOE, siendo la mitad del ángulo en el centro AOB del polígono primitivo, el punto O será tambien centro del nuevo polígono, y tendremos

$$OD = r',\ OF = a'.$$

Pero el punto F es el medio de CG; luego

$$(1) \quad OF = \frac{1}{2}(OG + OC), \text{ ó bien } a' = \frac{1}{2}(a + r).$$

Además, el triángulo rectángulo ODC nos da (**222**)

$$(2) \quad \overline{OD}^2 = OC.OF \text{ ó } r' = \sqrt{r.a'}.$$

Las igualdades (1) y (2) resuelven el problema propuesto; la primera permite calcular a'; y una vez conocida a', la segunda nos dará r'.

Escolio.

287. Se ve en la figura que OF es mayor que OG y que OD es menor que OC. Luego *cuando se pasa de un polígono regular al polígono regular iso-perímetro, cuyo número de lados es doble, la apotema aumenta y el radio disminuye*, de manera que la diferencia entre el radio y la apotema va decreciendo. El triángulo AOG nos enseña que esta diferencia OA — OG es menor que AG; es decir, menor que la mitad del lado del polígono correspondiente. Ahora bien, como el perímetro permanece constante, el valor de los lados tiende hácia cero á medida que el número de lados se duplica sucesivamente. Luego *el exceso del radio sobre la apotema puede llegar á ser tan pequeño como se quiera.*

Puede verse tambien que *la diferencia* r′ — a′ *es menor que el cuarto de la diferencia anterior* r — a.

En efecto, si desde el punto O como centro, con OD por radio, se traza el arco DIE, se tiene

$$r' - a' = IF \text{ y } r - a = CG = 2CF.$$

Se trata, pues, de probar que IF es menor que la mitad de CF; es decir, que IF es menor que CI. Pero el ángulo inscrito IDE, y el ángulo IDC, formado por una tangente y una cuerda, tienen respectivamente por medida la mitad del arco IE y la mitad del arco DI; estos ángulos son, pues, iguales, y DI es bisectriz del ángulo CDF. Luego, finalmente, la relacion de

IF á IC es igual (**191**) á la que existe entre la perpendicular DF y la oblicua DC, y, por consiguiente, menor que 1.

COROLARIO.

288. Sean p y P los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, uno inscrito y otro circunscrito, y sean p' y P' los perímetros de dos polígonos regulares inscrito y circunscrito de doble número de lados; siendo la relacion de semejanza ó la de los perímetros igual á la de las apotemas (**269**), tendremos *(fig. 197)*

Fig. 197

$$\frac{p}{P} = \frac{OG}{OC}, \qquad \frac{p'}{P'} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OD};$$

de donde

$$\frac{OC}{\frac{1}{p}} = \frac{OG}{\frac{1}{P}} \qquad \text{y} \qquad \frac{OD}{\frac{1}{p'}} = \frac{OF}{\frac{1}{P'}}.$$

Por otra parte, los triángulos semejantes ODC, ACG, nos dan:

$$\frac{OC}{OD} = \frac{AC}{AG} = \frac{p'}{p} \qquad \text{ó} \qquad \frac{OC}{\frac{1}{p}} = \frac{OD}{\frac{1}{p'}};$$

se tiene, pues,

$$\frac{OC}{\frac{1}{p}} = \frac{OG}{\frac{1}{P}} = \frac{OD}{\frac{1}{p'}} = \frac{OF}{\frac{1}{P'}}.$$

Además (**286**),

$$OF = \frac{1}{2}(OC + OG) \qquad \text{y} \qquad OD = \sqrt{OC \cdot OF};$$

luego, por último,

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{P}\right), \qquad \frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{p} \times \frac{1}{P'}}.$$

Por medio de estas dos fórmulas se pueden calcular los perímetros p' *y* P' *de dos polígonos regulares inscrito y circunscrito de* 2n *lados, si se nos dan los perímetros* p *y* P *de los polígonos regulares inscrito y circunscrito de* n *lados.*

§ VIII.—Medida de la circunferencia.

DEFINICIONES.

289. La idea general de longitud es de las que no pueden ser reducidas á otra. Pero, como lo hemos dicho ya, no es necesario saber definir una magnitud para poderla medir, es decir, para poderla comparar con otra de *su misma especie;* basta tener la nocion de las magnitudes de esta especie y haber definido su igualdad y su suma. Así, despues de haber definido la igualdad y la suma de las líneas rectas (**3**), se concibe claramente lo que es una línea recta (ó quebrada) doble, triple, etc., de otra, y en general, que tenga una relacion cualquiera con otra línea recta ó quebrada. Otro tanto puede decirse de dos arcos de círculo del mismo radio (**93**).

No sucede lo mismo cuando se trata de comparar un arco de círculo, ó en general un arco de curva cualquiera con la línea recta. Siendo aquí imposible la descomposicion en partes respectivamente superponibles, y resultando la *igualdad* en Geometría de la posibilidad de la coincidencia, se ve que, propiamente hablando, un arco de curva y una línea recta no pueden ser *iguales,* sino tan sólo *equivalentes.* Para reducir la nocion de la longitud de un arco de curva á la de la longitud de una línea recta, se adopta entónces la definicion siguiente:

Se llama longitud de un arco de curva el límite hácia el cual tiende el perímetro de una línea quebrada inscrita en este arco, cuando sus lados tienden hácia cero.

290. Para justificar esta definicion hay que probar que *este límite existe* y *que es único;* es decir, independiente de la ley segun la cual se hacen tender hácia cero los lados de la línea quebrada.

Se puede suponer que el arco de curva considerado AB *(fig. 198)* es convexo en toda su extension, porque en otro caso se le descompondría en varios arcos, convexos unos y otros cóncavos, y establecida la proposicion para los arcos parciales, se haria extensiva al arco total.

Admitamos (despues de esta observacion) las dos definiciones siguientes:

Estando inscrita una línea quebrada cualquiera ACD... B en el arco de curva AB, llamamos línea quebrada circunscrita *correspondiente* la línea AM'N'...T'B que se forma trazando las tangentes á la curva AB en los vértices de la línea inscrita.

Si se inscriben sucesivamente en el arco AB líneas quebradas que vayan formándose segun una ley determinada, y no se les impone más que la condicion de que sus lados tiendan hácia cero, diremos que la ley de inscripcion es *cualquiera;* pero si las líneas quebradas sucesivas son además tales que los vértices de cada una de ellas sean tambien vértices de la siguiente, diremos que la ley de inscripcion es *simple.* Claro es que hay infinitas leyes simples de inscripcion.

Ahora dividiremos la demostracion en tres partes:

1.ª *La relacion de los perímetros de una línea quebrada inscrita y de la circunscrita correspondiente, tiende hácia la unidad, sea cualquiera la ley segun la cual tienden hácia cero los lados de la línea inscrita.*

Sean, en efecto, M, N,... T las proyecciones de los vértices de la línea circunscrita sobre los lados de la inscrita: el valor de la relacion

$$\frac{AM' + M'C + CN' + \ldots + T'B}{AM + MC + CN + \ldots + TB}$$

está comprendido entre los valores de las relaciones

$$\frac{AM'}{AM}, \quad \frac{M'C}{MC}, \quad \frac{CN'}{CN}, \ldots, \quad \frac{T'B}{TB},$$

y basta, por tanto, probar que cada una de estas tiene por límite la unidad. Consideremos, por ejemplo, la relacion $\frac{CN'}{CN}$, y sobre una recta $\alpha\beta$, invariable de posicion y magnitud, construyamos un triángulo $\alpha\beta\gamma$, rectángulo en β, y cuyo ángulo agudo α sea igual al ángulo agudo N'CN. Los triángulos semejantes N'CN y $\alpha\beta\gamma$, dan

$$\frac{CN'}{CN} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta};$$

pero cuando el lado CD tiende hácia cero, tiende tambien hácia cero el ángulo N'CN ó su igual α, y, por consiguiente, la longitud finita y variable $\alpha\gamma$ tiene por límite $\alpha\beta$; ó en otros términos, la relacion que se considera tiene por límite la unidad.

2.ª *El perímetro de una línea quebrada inscrita segun una ley* SIMPLE, *tiende hácia un límite determinado, y este límite es el mismo cualquiera que sea la ley simple que se considere.*

Ante todo es evidente que, si varias líneas quebradas inscritas en el arco AB se suceden segun una ley simple determinada, sus perímetros tienden hácia un límite determinado L, porque estos perímetros crecen incesantemente siendo menores que el perímetro de una línea quebrada cualquiera circunscrita al arco AB. Podemos además asegurar (1.ª)

que las líneas quebradas circunscritas correspondientes tienden hácia el mismo límite L.

Consideremos ahora dos líneas quebradas inscritas que pertenecen á dos leyes *simples* diferentes; sean p y p' sus perímetros; P y P′ los perímetros de las líneas circunscritas correspondientes; L el límite comun de p y P; L′ el límite comun de p' y P′. Siendo toda línea quebrada inscrita menor que una circunscrita cualquiera, se tiene $p < P'$; y por tanto, el límite L de p no puede ser mayor que el límite L′ de P′; del mismo modo se vería que L′ no puede exceder á L. Luego L y L′ son iguales.

3.ª *El perímetro de una línea quebrada inscrita, segun una ley* CUALQUIERA, *tiende hácia un límite determinado, y este límite es independiente de la ley de inscripcion adoptada.*

Consideremos, en efecto, una serie de líneas quebradas inscritas en el arco AB segun una ley cualquiera; sean p el perímetro de una quebrada de las de la serie, y P el perímetro de la quebrada circunscrita correspondiente; se pueden tomar los lados de la línea quebrada inscrita bastante pequeños para que la diferencia $P - p$ sea menor que una cantidad fija ε tan pequeña como se quiera, puesto que (1.ª) la relacion de p á P tiende hácia la unidad. Sea L el límite de los perímetros de las líneas quebradas inscritas en el arco AB segun una ley simple cualquiera. Siendo P mayor que una línea quebrada cualquiera inscrita segun una ley simple, será mayor ó á lo ménos igual al límite L. Se tendrá, pues, *à fortiori*

$$p + \varepsilon > L \qquad \text{ó} \qquad p > L - \varepsilon.$$

Además, siendo p menor que una cualquiera de las quebradas circunscritas correspondientes á las inscritas, segun una ley simple, será menor que su límite L, y se tendrá

$$p \leqq L.$$

Por consiguiente, estando p encerrada entre L y una cantidad $L - \varepsilon$ que difiere de L en tan poco como se quiera, tendrá por límite L.

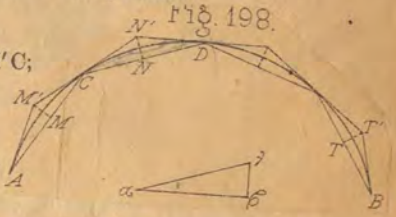
Debemos á M. O. Bonnet el principio de esta demostracion, que no requiere, como se ve, más que ideas elementales.

291. De lo que precede se deducen varias consecuencias importantes.

1.ª *Todo arco convexo* A *es menor que una línea cualquiera* B *que* la *envuelve partiendo de los mismos extremos.*— Basta, en efecto, concebir una línea quebrada A′ inscrita en el arco A, y otra quebrada B′ inscrita en la línea B, de modo que no tenga ningun punto comun con el arco A. Se tendrá entónces (**74**) $A' < B'$ y, por consiguiente, pasando al límite $A < B$. Del mismo modo se vería que *el perímetro de una línea convexa cerrada es menor que el de cualquiera otra línea que la envuelve* (*).

(*) NOTA 18.

2.ª *La relacion de un arco de curva* A C *á su cuerda (fig. 198) tiene por límite la unidad cuando el arco tiende hácia cero.*—Porque, trazando las tangentes A M′ y C M′, se tiene (1.ª)



$$\text{cuerda AC} < \text{arco AC} < \text{AM}' + \text{M}'\text{C};$$

de donde

$$1 < \frac{\text{arco AC}}{\text{cuerda AC}} < \frac{\text{AM}' + \text{M}'\text{C}}{\text{AM} + \text{MC}}.$$

Pero se ha demostrado (**290, 1.ª**) que esta última relacion tiene por límite la unidad cuando el arco A C tiende hácia cero. Luego queda demostrada la proposicion.

TEOREMA.

292. *La relacion de dos circunferencias cualesquiera, es igual á la de sus radios.*

Sean R y R′ los radios y C y C′ las longitudes de dos circunferencias; inscribamos en la primera un polígono regular cualquiera, y en la segunda otro del mismo número de lados. Siendo P y P′ los perímetros de estos polígonos, se tendrá (**269**)

$$\frac{\text{P}}{\text{P}'} = \frac{\text{R}}{\text{R}'}.$$

Y siendo cierta esta proporcion, cualquiera que sea el número de lados de los dos polígonos, subsistirá haciendo crecer indefinidamente el número de lados; pero entónces los perímetros P y P′ tenderán hácia sus límites respectivos C y C′ (**290, 291**) y su relacion tenderá hácia $\frac{\text{C}}{\text{C}'}$. Se tendrá, pues, el límite

$$\frac{\text{C}}{\text{C}'} = \frac{\text{R}}{\text{R}'}.$$

COROLARIO.

293. La proposicion precedente da

$$\frac{\text{C}}{\text{R}} = \frac{\text{C}'}{\text{R}'} \text{ ó } \frac{\text{C}}{2\text{R}} = \frac{\text{C}'}{2\text{R}'};$$

luégo la relacion de una circunferencia á su diámetro es la misma para todas las circunferencias, ó en otros términos:

La relacion de la circunferencia al diámetro es un número constante.

Este número, que ordinariamente se representa por π, es inconmensurable (*); no es posible, por consiguiente, calcularlo con exactitud, pero sí con tanta aproximacion como se quiera, por los procedimientos que indicaremos. Hé aquí su valor, el de su inverso y el de su logaritmo:

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ \ldots,$$

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830\ 98861\ 83790\ 67153\ \ldots,$$

$$\log.\ \pi = 0{,}49714\ 98726\ 94133\ 85435\ \ldots$$

294. Dando á la fórmula R las dos formas

$$C = 2\pi R,\ R = \frac{C}{2\pi}$$

se ve: 1.° que *para calcular la longitud de una circunferencia hay que multiplicar por el número π, el doble de la longitud del radio:* 2.° que *para calcular el radio de una circunferencia hay que dividir por π, ó multiplicar por $\frac{1}{\pi}$ la mitad de la longitud de la circunferencia.*

Ejemplos:

1.° *¿Cuál es la circunferencia de una rueda cuyo radio es* de $0^m,65$?

Multiplicando el radio 0,65 por $6^m,28$, que es el valor de 2π en menos de una centésima, se halla para la circunferencia pedida $4^m,08$ en menos de un centímetro.

2.° *¿Cuál es el radio del meridiano de París?*

(*) Lambert fué el primero que demostró *(Memorias de Berlin,* 1761) que π es inconmensurable. Legendre demostró despues que el cuadrado de π tambien lo es.

Se sabe que la semicircunferencia de este meridiano es de 20.000.000 de metros; multiplicando este número por 0,3183099, que es el valor de $\frac{1}{\pi}$ en ménos de $\frac{1}{2}$ diezmillonésima, se halla para el radio pedido 6.366.196 metros en ménos de un metro.

295. La longitud del arco de 180 grados en la circunferencia de radio R, es decir, la semicircunferencia, es πR; luego la longitud del arco de 1 grado será $\frac{\pi R}{180}$, y por tanto, *la longitud* l *del arco de* n *grados en la circunferencia de radio* R *tiene por expresion*

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Esta fórmula y las dos siguientes

$$n = \frac{180.l}{\pi R}, \quad R = \frac{180.l}{\pi n},$$

que se deducen de ella, sirven para calcular una cualquiera de las tres cantidades l, n, R, cuando se conocen las otras dos.

Ejemplos:

1.° *Sobre una circunferencia cuyo radio es de* 0m,90, *¿cuál es la longitud del arco de 25° 45′?*

Se tiene aquí

$$n = 25 + \frac{45}{60} = 25 + \frac{3}{4} = \frac{103}{4},$$

y, por consiguiente,

$$l = \frac{\pi . 0{,}90 . \frac{103}{4}}{180} = \frac{103\pi}{800} = \frac{103 . 3{,}14}{800} = 0^{m},40 \ldots\ldots$$

2.° *¿Cuál es el arco cuya longitud es igual al radio?*

La segunda de las fórmulas que preceden da para el número de grados de este arco

$$n = \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ \times 0{,}31830988\ldots = 57^\circ 17'.44''80\ldots$$

3.° *¿Cuál es el radio del círculo en el cual el arco de 30 grados vale un metro?*

La tercera fórmula da

$$R = \frac{180}{\pi.30} = \frac{6}{\pi} = 6.0{,}3183 = 1^m{,}910.$$

TEOREMA.

296. *Dos arcos semejantes*, es decir, dos arcos que corresponden á ángulos iguales en los centros de dos círculos diferentes, *son proporcionales á sus radios.*

En efecto, sean l y l' las longitudes de los dos arcos, R y R′ sus radios, O y O′ los ángulos en el centro iguales que corresponden á esos arcos; se tiene

$$\frac{l}{2\pi R} = \frac{O}{4 \text{ rectos}}, \quad \frac{l'}{2\pi R'} = \frac{O'}{4 \text{ rectos}},$$

de donde, dividiendo miembro á miembro, y observando que $O = O'$,

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'}.$$

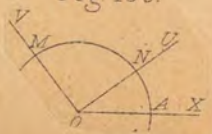
Escolio.

297. En la práctica se valúan los ángulos en partes alícuotas de la circunferencia; es decir, en grados, minutos y segundos. No sucede lo mismo en la teoría cuando se quiere introducir un ángulo en una fórmula.

Sean VOX un ángulo y ω el número que lo mide; es decir, la relacion de este ángulo al ángulo unidad UOX *(fig. 199)*. Describamos desde el vértice comun O, como centro, una circunferencia, y designemos respectivamente por r, l, l', los números de unidades lineales contenidas en el radio y en los arcos AM, AN, interceptados entre los lados de los dos ángulos VOX, UOX.

La proporcionalidad de los ángulos en el centro con los arcos interceptados **(134)**, da

Fig. 199.



$$\frac{\text{VOX}}{\text{UOX}} = \omega = \frac{l}{l'}.$$

Luego:

1.° *Si se dejan arbitrarias la unidad de longitud y la unidad angular, un ángulo cualquiera tiene por medida la relacion de los números de unidades lineales contenidas en los arcos que interceptan el ángulo que se considera y el ángulo unidad sobre una circunferencia cualquiera descrita desde su vértice comun como centro.*

2.° Si se hacen corresponder una á otra las dos unidades, aunque sin fijarlas, es decir, *si se toma por unidad de arco el arco interceptado por la unidad angular,* se tiene $l' = 1$, y $\omega = l$.

En tal caso, *un ángulo cualquiera tiene la misma medida que el arco comprendido entre sus lados y descrito desde su vértice como centro con un radio cualquiera;* este es el teorema del núm. **136.**

3.° A veces se deja indeterminada la unidad de longitud y se fija la unidad angular, sin establecer correspondencia entre las dos unidades; *se toma por unidad angular el ángulo que intercepta sobre una circunferencia cualquiera un arco igual al radio.* Se tiene entónces $l' = r$, y, por tanto,

$$\omega = \frac{l}{r} \text{ ó } l = \omega r.$$

En este caso, un ángulo cualquiera tiene por medida la relacion del arco que intercepta sobre una circunferencia cualquiera descrita desde su vértice como centro radio de esta circunferencia; é inversamente, *el arco es igual al ángulo multiplicado por el radio.*

Se puede comparar fácilmente esta medicion con la valuacion en grados, minutos y segundos, recordando (**295**, 2.°) que el ángulo unidad es entónces de 57° 17′ 44″ 80...

Digamos, finalmente, que, si despues de haber fijado de este modo la unidad angular se toma además el radio r por unidad de longitud, se establece así la correspondencia de las unidades lineal y angular, y se vuelve á tener la fórmula $\omega = l$. El ángulo recto está medido entónces por $\frac{\pi}{2} = 1{,}5707{,}...$; el de 45 grados por $\frac{\pi}{4}$,..., etc.

PROBLEMA.

298. *Calcular la relacion de la circunferencia al diámetro.* La fórmula

$$\pi = \frac{C}{2R} \tag{1}$$

muestra que para tener π se puede:

O escoger arbitrariamente el radio R y calcular la longitud de la circunferencia C; este es el *método de los perímetros;*

O escoger arbitrariamente la circunferencia C y calcular su radio R; este es el *método de los iso-perímetros.*

299. *Método de los perímetros.*—Para $R = 1$, la fórmula (1) da $\pi = \frac{1}{2} C$: el número π es, pues, igual á la longitud de la semicircunferencia de radio 1. Por consiguiente, el semiperímetro de todo polígono inscrito en esta circunferencia es un valor de π aproximado por defecto, y el semiperímetro de todo polígono circunscrito es un valor de π aproximado por exceso. Luego si se calculan como en el núm. **283**, partiendo del cuadrado inscrito, los semiperímetros de los polígonos regulares inscritos de 8, 16, 32... lados, los números que se obtengan serán valores por defecto más y más aproximados á π; y si análogamente, partiendo del cuadrado circunscrito, se calculan como en el núm. **285**, los semiperímetros de los polígonos regulares circunscritos de 8, 16, 32... lados, se tendrán valores por exceso más y más aproximados á π. Por ejemplo, se ha encontrado (**283, 285**) para los semiperímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 128 lados, 3,14127 y 3,14223; se deduce de lo dicho que π está comprendido entre estos dos números, y que 3,142 es su valor con un error menor que una milésima. Se podría partir tambien del exágono regular y calcular, como en los números **283** y **285**, los semiperímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 12, 24, 48... lados.

El método de los perímetros así presentado es muy sencillo en principio, pero es muy laborioso; fué el método seguido por Arquímedes (ilustre geómetra que vivía en Siracusa 250 años antes de J. C.), á quien corresponde la gloria de haber sido el primero que determinó el número π. Partiendo Arquímedes del exágono y deteniéndose en los polígonos inscrito y circunscrito de 96 lados, probó que π estaba comprendido entre $3 + \frac{10}{71}$ y $3 + \frac{10}{70}$. Este último número $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$,

que excede á π en menos de media centésima, basta para muchas aplicaciones.

Conviene indicar tambien el valor por exceso $\frac{355}{113}$ debido á Adriano Metio; su error es menor que media millonésima.

Vamos á ver que el método de los iso-perímetros conduce á cálculos mucho más sencillos; volveremos luego á considerar el método de los perímetros para hacer ver que puede ser considerado de un modo que conduzca á los mismos cálculos que el de los iso-perímetros.

300. *Método de los iso-perímetros.*—Tomemos la circunferencia C igual á 2: la fórmula $\pi = \frac{C}{2R}$ da entonces

$$\pi = \frac{1}{R} \text{ ó } \frac{1}{\pi} = R.$$

El número $\frac{1}{\pi}$ es, pues, el valor del radio de la circunferencia cuya longitud sea igual á 2. Por consiguiente, la apotema a y el radio r de todo polígono regular cuyo perímetro sea igual á 2, son dos valores aproximados de $\frac{1}{\pi}$, el uno por defecto y el otro por exceso; porque siendo las circunferencias inscrita y circunscrita á ese polígono respectivamente menor y mayor que 2, sus radios a y r deben comprender entre ellos al radio R de la circunferencia igual á 2 (**292**); es decir, el número $\frac{1}{\pi}$.

Consideremos el cuadrado cuyo lado es $\frac{1}{2}$; su perímetro es 2; su apotema $a_1 = \frac{1}{4}$, y su radio $r_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Despues, por medio de las fórmulas (**286**)

(1) $$a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + r_k), \quad r_{k+1} = \sqrt{a_{k+1} r_k},$$

calculemos sucesivamente las apotemas y los radios a_2 y r_2, a_3 y r_3, a_4 y r_4,... de los polígonos regulares iso-perímetros de 8, 16, 32,... lados. En la serie

$$a_1, r_1, a_2, r_2, a_3, r_3, \ldots a_n, r_n \ldots$$

cada término á partir del tercero es alternativamente medio aritmético y medio geométrico entre los dos que le preceden; los términos de lugar impar $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ van creciendo y son siempre menores que $\frac{1}{\pi}$, mientras que los de lugar par $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$, van decreciendo (**287**) y son siempre mayores que $\frac{1}{\pi}$. Se sabe tambien (**287**) que la diferencia $r_n - a_n$ llega á ser menor que cualquiera cantidad dada si n es bastante grande; luego los términos de la serie

$$a_1, r_1, a_2, r_2, a_3, r_3, \ldots,$$

alternativamente menores y mayores que $\frac{1}{\pi}$ tienen por límite este número

Si además se nota que $a_1 = \frac{1}{4}$ es la media aritmética entre 0 y $\frac{1}{2}$, y que $r_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ es la media geométrica entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, se puede establecer esta proposicion:

El número $\frac{1}{\pi}$ *es el límite hácia el cual tienden los números de la serie que se forma á partir de* 0 *y* $\frac{1}{2}$, *tomando alternativamente la media aritmética y la media geométrica entre los dos que preceden.*

Siguiendo el cálculo de estas medias hasta que dos térmi-

nos consecutivos tengan comunes $m + 1$ decimales, se tendrá $\frac{1}{\pi}$ en ménos de una unidad decimal del órden $m + 1$; y, por consiguiente, dividiendo 1 por el número así hallado, se tendrá π en ménos de una unidad decimal del órden m; porque si se designan respectivamente por ε' y ε los errores correspondientes de π y de $\frac{1}{\pi}$, se tiene (despreciando el producto $\pi\varepsilon\varepsilon'$),

$$\varepsilon' = \pi^2 \varepsilon; \text{ de donde } \varepsilon' < 10\varepsilon. \quad (1)$$

Hé aquí la tabla de los cálculos hasta el polígono de 128 lados:

Número de lados.	Apotemas.	Radios.
4	$a_1 = 0{,}2500000$	$r_1 = 0{,}3535534$
8	$a_2 = 0{,}3017767$	$r_2 = 0{,}3266407$
16	$a_3 = 0{,}3142087$	$r_3 = 0{,}3203645$
32	$a_4 = 0{,}3172866$	$r_4 = 0{,}3188218$
64	$a_5 = 0{,}3180542$	$r_5 = 0{,}3184377$
128	$a_6 = 0{,}3182459$	$r_6 = 0{,}3183418$

Se llega así para $\frac{1}{\pi}$ al valor 0,318 en ménos de una milésima, y áun 0,3183 en ménos de una diezmilésima; dividiendo, pues, la unidad por este último número, se obtiene para π el valor 3,142 en ménos de una milésima.

301. Hé aquí algunas nuevas consideraciones que permiten abreviar mucho los cálculos.

Si se designa por ε_k el error cometido al sustituir la media geométrica de las dos cantidades a_{k+1} y r_k por su media aritmética, la segunda de las dos fórmulas (1) se convierte en

$$r_{k+1} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + r_k) + \varepsilon_k.$$

Se pueden, por consiguiente, escribir estas dos fórmulas:

$$a_{k+1} - r_k = \frac{1}{2}(a_k - r_k),$$

$$r_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(r_k - a_{k+1}) + \varepsilon_k.$$

Del mismo modo se tiene:

$$a_{k+2} - r_{k+1} = \frac{1}{2}(a_{k+1} - r_{k+1}),$$

$$r_{k+2} - a_{k+2} = \frac{1}{2}(r_{k+1} - a_{k+2}) + \varepsilon_{k+1},$$

. . . . . .

Continuando así hasta

$$a_{k+\mu} - r_{k+\mu-1} = \frac{1}{2}(a_{k+\mu-1} - r_{k+\mu-1});$$

y sumando miembro á miembro todas las igualdades escritas, se obtiene

$$a_{k+\mu} - r_k = \frac{1}{2}(a_k - r_{k+\mu-1}) + (\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \cdots + \varepsilon_{k+\mu-2}).$$

Dejando k fijo y haciendo crecer μ indefinidamente, $a_{k+\mu}$ y $r_{k+\mu-1}$ tendrán por límite comun $\frac{1}{\pi}$, y la fórmula precedente se convertirá en

$$\frac{1}{\pi} = \frac{a_k + 2r_k}{3} + \frac{2}{3}(\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k+2} + \cdots).$$

Pero, segun el núm. **251**, ε_k es menor que $\frac{1}{8a_{k+1}}(r_k - a_{k+1})^2$.

Se tiene, pues, *à fortiori*

$$\varepsilon_k < \frac{(r_k - a_k)^2}{8a_k}.$$

Por consiguiente, ε_{k+1} es menor que $\frac{(r_{k+1}-a_{k+1})^2}{8a_{k+1}}$ y se tiene *à fortiori* (**287**)

$$\varepsilon_{k+1} < \frac{1}{16}\frac{(r_k - a_k)^2}{8a_k}.$$

Del mismo modo se puede escribir

$$\varepsilon_{k+2} < \frac{1}{16^2}\frac{(r_k - a_k)^2}{8a_k}, \text{ etc.}$$

El error que se comete tomando $\frac{1}{\pi} = \frac{a_k + 2r_k}{3}$ es, por tanto, menor que

$$\frac{2}{3}\frac{(r_k - a_k)^2}{8a_k}\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \ldots\right) \text{ ó que } \frac{4}{45}\frac{(r_k - a_k)^2}{a_k}.$$

Supongamos que k sea bastante grande para que esta última cantidad sea menor que $\frac{1}{2.10^m}$, y designemos por α y ρ dos valores aproximados de a_k y de r_k en ménos de $\frac{1}{2.10^m}$; difiriendo $\frac{1}{\pi}$ de $\frac{1}{3}(a_k + 2r_k)$ en ménos de $\frac{1}{2.10^m}$, y difiriendo á su vez esta última cantidad de $\frac{1}{3}(\alpha + 2\rho)$ en ménos de $\frac{1}{2.10^m}$, se tiene en ménos de $\frac{1}{10^m}$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3}(\alpha + 2\rho).$$

De aquí este teorema:

Si se toma el valor de k *suficientemente grande para que la cantidad*

$$\frac{4\,(r_k - a_k)^2}{45 a_k}$$

sea menor que $\frac{1}{2.10^m}$, *y si* α *y* ρ *son valores aproximados de* a_k *y de* r_k *en ménos de* $\frac{1}{2.10^m}$, *la expresion*

$$\frac{1}{3}(\alpha + 2\rho)$$

es un valor aproximado de $\frac{1}{\pi}$ *en ménos de* $\frac{1}{10^m}$ (*).

Por ejemplo, deteniéndose en el polígono de 64 lados, se tiene, segun la tabla precedente (**300**),

$$\frac{4\,(r_5 - a_5)^2}{45 . a_5} < \frac{1}{2.10^7}, \quad \begin{matrix}\alpha = 0{,}3180542, \\ \rho = 0{,}3184377,\end{matrix}$$

se deduce, pues, que

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3}(\alpha + 2\rho) = 0{,}3183099,$$

en ménos de $\frac{1}{10^7}$, y, por consiguiente,

$$\pi = 3{,}141593$$

en ménos de $\frac{1}{10^6}$.

302. *Nota.*—Hemos dicho (**299**) que el método de los perímetros (de cierto modo desenvuelto) conduce á cálculos idénticos á los que preceden.

En efecto, siendo p y P los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, uno inscrito y otro circunscrito, y p' y P' los perímetros de los dos polígonos regulares, inscrito y circunscrito, de doble número de lados, se tiene (**288**)

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{p}\right), \quad \frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{P'} \cdot \frac{1}{p}}.$$

(*) NOTA 19.

Los números

$$\frac{1}{P}, \frac{1}{p}, \frac{1}{P'}, \frac{1}{p'}, \ldots,$$

son, pues, á partir del tercero, alternativamente medios aritméticos y medios geométricos entre los dos que preceden. Si se toma, por otra parte, el radio del círculo igual á $\frac{1}{2}$, se tiene

$$\pi = C \text{ ó } \frac{1}{\pi} = \frac{1}{C};$$

y, por consiguiente, $\frac{1}{\pi}$ es el límite de los números de una serie formada por los inversos de los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos, cuyo número de lados va duplicando. Finalmente, si se parte de los cuadrados circunscrito é inscrito, los dos primeros términos de la serie son

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{4}, \frac{1}{p} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

y se cae de nuevo sobre el teorema de Schwab enunciado en el número **300.**

§ IX.—Apéndice.

303. Nos proponemos completar en este Apéndice algunas de las teorías precedentes, y tambien exponer varias teorías nuevas que dan orígen á métodos de investigacion muy fecundos.

Conviene ante todo indicar el uso de los signos + y — para expresar el sentido de los segmentos.

PRINCIPIO DE LOS SIGNOS.

304. Cuando dos puntos A y B están situados sobre una recta indefinida X'X *(fig. 200)*, el intervalo que los separa puede ser recorrido en el sentido de la flecha ó en sentido contrario; de aquí dos segmentos AB y BA de la misma longitud, de orígenes distintos A y B y de sentidos opuestos. Para determinar de un modo preciso un segmento, hay que dar su *longitud*, su *orígen* y el *sentido* en el cual debe llevarse su longitud á partir del orígen. Se indica este sentido afectando con el signo + los números que miden las longitudes de los segmentos recorridos en un sentido convenido, y con el signo — los números que miden las longitudes de los segmentos recorridos en el sentido opuesto al anterior. Así, suponiendo que se ha convenido en mirar el sentido

de la flecha como *sentido positivo de la recta* X'X, y que la longitud comprendida entre A y B sea igual á 5 unidades, se tendrá

$$AB = +5,\ BA = -5,$$

y, por consiguiente,

$$AB = -BA,\ \text{ó}\ AB + BA = 0.$$

305. De esta convencion resulta inmediatamente que *cualesquiera que sean las posiciones de los tres puntos* O, A, B *sobre la recta indefinida* X'X, *se tiene siempre en magnitud y en signo la igualdad*

(1) $$AB = OB - OA.$$

En efecto, si el punto está situado entre A y B, se tiene

$$AB = AO + OB;\ \text{de donde}\ AB = OB - OA.$$

Si el punto deja A y B á un mismo lado, puede estar más próximo ó más distante de A que de B. En el primer caso se tiene

$$OB = OA + AB;\ \text{de donde}\ AB = OB - OA,$$

y en el segundo,

$$OA = OB + BA;\ \text{de donde}\ AB = OB - OA.$$

De la fórmula (1) que se emplea incesantemente en el estudio de las relaciones entre segmentos, se deducen las dos siguientes:

$$OA + OB = 2OI, \qquad OA.OB = \overline{OI}^2 - \overline{AI}^2,$$

en las cuales I es el punto medio del intervalo AB. Estas fórmulas (de un uso muy frecuente) se obtienen sumando y multiplicando las dos igualdades

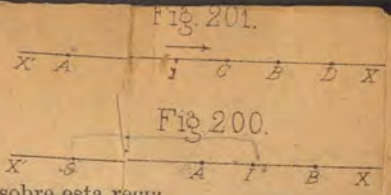
$$OA = IA - IO = OI - AI$$
$$OB = IB - IO = OI + AI$$

que se tienen aplicando la fórmula (1) á los dos sistemas de tres puntos (O, A, I) y (O, B, I).

306. Por lo que precede, ya se ve cómo por medio de los signos se pueden reducir á una fórmula única las que corresponden á los diversos casos de una misma cuestion.

Todo teorema relativo á segmentos situados de un modo cualquiera en un plano, admite la regla de los signos si se enuncia de un modo completo. El empleo de los signos permite razonar con carácter de generalidad, desembarazándose de ciertas condiciones de situacion que hacen penosas las demostraciones y oscuros los enunciados.

Por ejemplo. hemos probado en el núm. **187** que, siendo A y B dos



puntos de una recta indefinida X'X *(fig. 201)*, existen sobre esta recta dos puntos C y D, situados entre A y B el uno, y fuera de AB el otro, tales que las relaciones $\frac{CA}{CB}, \frac{DA}{DB}$ son iguales. Esta conclusion no es exacta sino respecto á los valores absolutos de los segmentos. En realidad, las dos relaciones son iguales y de signos contrarios; la primera es negativa y la segunda positiva, y se tiene

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB} \text{ ó } \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1.$$

Esta es la expresion correcta de la relacion hallada en el núm. **187**, que recibe el nombre de *proporcion armónica.*

Por consiguiente, si se atiende á los valores absolutos y á los signos de los segmentos, *no existe sobre la recta indefinida* X'X *más que un solo punto que divida á* AB *en una relacion dada; punto situado entre* A *y* B *ó en la prolongacion de* AB, *segun que la relacion dada sea negativa ó positiva.*

El lector verá sin esfuerzo que el lema así enunciado permite simplificar las demostraciones de los números **190** y **220**.

TRANSVERSALES.

307. Cuando una transversal *abc (figuras 202 y 203)* corta á los tres lados de un triángulo ABC considerados como indefinidos, cada uno de los puntos de interseccion *a, b, c,* es orígen comun de dos segmentos que tienen por extremos los vértices del lado en que se halla situado. Así, en AB se tienen los dos segmentos *c*A y *c*B; sobre BC los segmentos *a*B y *a*C, y sobre CA los segmentos *b*C y *b*A; los dos segmentos relativos á un mismo lado son de signos contrarios ó del mismo signo (**306**), segun que la transversal corta al lado mismo ó á su prolongacion.

TEOREMA.

308. *Cuando un triángulo* ABC *es cortado por una transversal* abc *(figuras 202 y 203), los segmentos que esta transversal determina sobre sus lados satisfacen á la igualdad*

$$(1) \qquad \frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = +1.$$

En efecto, trazando CD paralela á AB, se tiene en los triángulos semejantes *a*CD, *a*B*c*,

$$\frac{aB}{aC} = \frac{cB}{DC};$$

y en los triángulos semejantes, *b*CD y *b*c A,

$$\frac{bC}{bA} = \frac{DC}{cA}.$$

Multiplicando miembro á miembro estas dos igualdades, queda demostrada la igualdad (1) en cuanto al valor absoluto. Falta probar que el signo del segundo miembro es siempre +. En efecto, sólo dos casos pueden presentarse; ó la transversal corta á dos de los lados del triángulo y á la prolongacion del tercero *(fig. 202)*, ó corta á las prolongaciones de los tres lados *(fig. 203)*; en el primer caso, dos de las relaciones que entran como factores en el primer miembro de la igualdad (1) son negativas y la tercera positiva; y en el segundo caso, las tres relaciones son positivas. El producto tiene siempre el signo +.

309. Recíprocamente, *si sobre los tres lados de un triángulo* ABC, *considerados como indefinidos, se marcan tres puntos* a, b, c, *tales que se cumpla la igualdad* (1) *estos tres puntos estarán en línea recta.*

En efecto, designando por c' el punto en que la recta ab corta á AB, se tiene por el teorema directo

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{c'A}{c'B} = +1;$$

pero, comparando esta igualdad con la (1) que por hipótesis está satisfecha, se tiene

$$\frac{c'A}{c'B} = \frac{cA}{cB}.$$

Luégo (**306**) c' coincide con c, ó bien los tres puntos a, b, c, están en línea recta.

Observemos que la igualdad (1), que en este recíproco se toma como hipótesis, exige que el número de las relaciones negativas del primer miembro sea par; es decir, que haya un número par de los puntos a, b, c, que estén situados sobre los lados mismos, y, por consiguiente, estén en las prolongaciones un número impar de ellos.

Se puede tambien hacer notar que los numeradores de las tres relaciones son tres segmentos que no tienen comun ninguno de sus extremos, y que en el mismo caso se hallan los denominadores.

Escolio.

310. El teorema que precede (atribuido á Menelao, geómetra griego anterior á Ptolomeo casi en un siglo) sirve para probar que tres puntos de una figura están en línea recta, y tambien es útil á veces como intermediario en ciertas demostraciones.

Los únicos signos que intervienen en este teorema, son los de las tres relaciones formadas por los pares de segmentos relativas á cada lado

del triángulo; no hay que ocuparse de los signos de los segmentos mismos. Así, por ejemplo, en la *fig. 202* basta dar á bC y á bA signos contrarios, y nada importa que el sentido positivo de estos segmentos sea AC ó CA.

Es, sin embargo, cómodo en las aplicaciones fijar el sentido positivo para cada lado del triángulo ABC. Supongamos, por ejemplo, que se adopte sobre cada lado como sentido positivo aquel en el cual es recorrido cuando se describe el perímetro en el órden alfabético ABC; así en la *fig. 202* los segmentos cB y bA serán los únicos positivos, y en la *fig. 203* todos los segmentos serán negativos; en los dos casos el número de segmentos negativos es par, como debe ser, para que corresponda el signo + al primer miembro de la igualdad (1).

Como aplicacion, deduzcamos del teorema de Menelao la proposicion del núm. **191**, relativa al caso en que la transversal es la bisectriz de uno de los ángulos del triángulo.

Si la transversal que se considera *(fig. 202)* es paralela á la bisectriz interior del ángulo C, el triángulo Cba es isósceles, y los lados aC y bC son iguales en valor absoluto, tienen el mismo signo, segun el convenio hecho anteriormente, y la igualdad (1) se convierte en

$$(\alpha) \qquad \frac{cA}{cB} = \frac{bA}{aB}; \quad \text{ó} \quad \frac{cA}{cB} = \frac{CA}{CB},$$

si se considera como transversal la bisectriz misma.

Un razonamiento análogo en la *fig. 203* da

$$(\beta) \qquad \frac{cA}{cB} = -\frac{CA}{CB}$$

cuando la transversal es la bisectriz exterior del ángulo C.

Como se ve, hemos hallado de nuevo la doble proposicion del número **191**. Pero aquí los segmentos cA, cB, CA, CB, tienen signos. Así, CA designa la longitud del lado tomada con el signo +, y CB la longitud del lado CB tomada con el signo —; de suerte que el segundo miembro de la igualdad (α) es negativo, mientras que el segundo miembro de la igualdad (β) es positivo, como sucede á los primeros miembros.

TEOREMA.

311. *Las rectas trazadas desde un mismo punto* O *(figuras 204 y 205) á los tres vértices de un triángulo* ABC, *cortan á los lados opuestos, considerados como indefinidos en tres puntos* a, b, c, *que satisfacen la igualdad*

$$(2) \qquad \frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = +1.$$

En efecto, el triángulo A C a, cortado por la transversal B b, da

$$\frac{B\,a}{B\,C} \cdot \frac{O\,A}{O\,a} \cdot \frac{b\,C}{b\,A} = 1.$$

El triángulo A B a, cortado por la transversal C c, da á su vez

$$\frac{C\,B}{C\,a} \cdot \frac{O\,a}{O\,A} \cdot \frac{c\,A}{c\,B} = 1.$$

Multiplicando miembro á miembro estas dos igualdades, se obtiene la igualdad

$$\frac{a\,B}{a\,C} \cdot \frac{b\,C}{b\,A} \cdot \frac{c\,A}{c\,B} \cdot \frac{C\,B}{B\,C} = 1$$

que conduce á la (2), puesto $\frac{C\,B}{B\,C} = -1$.

312. Recíprocamente, *si por los vértices de un triángulo* A B C *se trazan tres rectas* A a, B b, C c, *tales que se cumpla la igualdad* (2), *estas rectas pasan por un mismo punto.*

En efecto, designando por O el punto de interseccion de A a y de B b, y por c' el punto en que C O corta al lado A B, se tiene, segun lo que precede,

$$\frac{a\,B}{a\,C} \cdot \frac{b\,C}{b\,A} \cdot \frac{c'\,A}{c'\,B} = -1.$$

Pero, por hipótesis, la igualdad (2) está satisfecha; luego

$$\frac{c\,A}{c\,B} = \frac{c'\,A}{c'\,B}.$$

Y por consiguiente, los puntos c y c' coinciden **(306)**, ó en otros términos, la recta C c pasa por el punto O de interseccion del A a y B b.

Escolio.

313. El teorema que precede (debido á Juan de Ceva, geómetra italiano del siglo XVI) sirve para probar que tres rectas de una figura concurren en un punto, y tambien puede intervenir como auxiliar en ciertas demostraciones.

Hé aquí algunos ejemplos:

1.° *En todo triángulo* A B C, *las tres medianas* A a, B b, C c, *pasan por un mismo punto;* porque cada una de las relaciones que figuran en el primer miembro de la igualdad (2) es en este caso igual á -1.

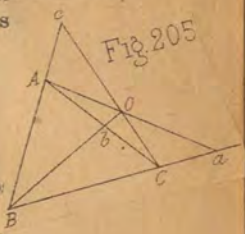
2.° *En todo triángulo* A B C, *las bisectrices* A a, B b, C c *de los tres ángulos pasan por un mismo punto.*

En efecto, en virtud del núm. **310**, las relaciones que figuran en el primer miembro de la igualdad (2) son respectivamente iguales á las relaciones

$$\frac{AB}{AC}, \frac{BC}{AB}, \frac{AC}{BC},$$

cuyo producto es igual á -1.

Análogamente se vería que *las bisectrices de los suplementos de dos ángulos y la bisectriz del tercero pasan por un mismo punto.*



3.° *En todo triángulo* ABC, *las tres alturas* Aa, Bb, Cc *pasan por un mismo punto.*

En efecto, los triángulos semejantes B A b, C A c, dan

$$\frac{cA}{bA} = \frac{AC}{AB},$$

y por los otros triángulos semejantes se tiene tambien

$$\frac{aB}{cB} = \frac{AB}{BC}, \quad \frac{bC}{aC} = \frac{BC}{AC}.$$

Multiplicando miembro á miembro, se ve que el valor absoluto del producto $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB}$ es igual á 1. Pero cada una de estas relaciones es negativa; luego su producto es -1.

CUADRILÁTERO COMPLETO.

314. Llámase *cuadrilátero completo* la figura formada por el sistema de cuatro rectas, ó en otros términos, la que se forma prolongando hasta sus puntos de encuentro en E y F los lados opuestos de un cuadrilátero ordinario ABCD. Un cuadrilátero completo ABCDEF *(figura 206)* tiene seis vértices y tres diagonales; los vértices son los puntos de interseccion A, B, C, D, E, F, de las cuatro rectas que se consideran y las diagonales AC, BD, EF, son las rectas que unen los tres pares de vértices opuestos.

Como aplicacion de los teoremas sobre transversales, vamos á demostrar dos propiedades fundamentales del cuadrilátero completo.

TEOREMA.

315. *En todo cuadrilátero completo, cada diagonal está dividida armónicamente por las otras dos* (Pappus, *Math. col.*, lib. III, propositio 129).

Sea, por ejemplo, la diagonal EF *(fig. 206)*, que es cortada en P y en Q por las diagonales AC y BD; se trata de probar que **(306)**

$$\frac{PE}{PF} : \frac{QE}{QF} = -1.$$

Basta para ello dividir miembro á miembro las dos igualdades

$$\frac{QE}{QF} \cdot \frac{DF}{DA} \cdot \frac{BA}{BE} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{PE}{PF} \cdot \frac{DF}{DA} \cdot \frac{BA}{BE} = -1,$$

que se obtienen: la primera aplicando el teorema de Menelao al triángulo AEF cortado por la transversal BD, y la segunda aplicando el teorema de Ceva al mismo triángulo AEF y á las tres rectas CA, CE, CF.

COROLARIO.

316. Este teorema ofrece un procedimiento muy sencillo para hallar el punto conjugado armónico Q de un punto P con relacion á una recta EF, con el uso de la regla solamente. Trácese por P una recta cualquiera PCA; únanse dos puntos cualesquiera A y C de ella con los E y F dados; la diagonal BD del cuadrilátero completo que así se obtiene, cortará á EF en el punto pedido Q.

TEOREMA.

317. *En todo cuadrilátero completo, los puntos medios de las tres diagonales están en línea recta.*

En efecto, sean *(fig. 207)* ABCDEF un cuadrilátero completo, y L, M, N los puntos medios de sus diagonales AC, BD, EF.

Los puntos medios G, H, K, de los lados del triángulo BCE son los vértices de un nuevo triángulo, cuyos lados pasan respectivamente por L, M, N, y basta, por consiguiente, demostrar la igualdad **(309)**

$$\frac{MG}{MK} \cdot \frac{LK}{LH} \cdot \frac{NH}{NG} = 1.$$

Pero esta igualdad se verifica, puesto que las seis longitudes que entran en su primer miembro son las mitades respectivas de los segmentos que la transversal ADF determina sobre los lados del triángulo BCE.

RELACION ANARMÓNICA.

318. Llámase *relacion anarmónica* de cuatro puntos A, B, C, D, situados en línea recta, el cociente de las relaciones de las distancias de dos cualesquiera de estos puntos á los otros dos. Tales son, por ejemplo *(fig. 201)*, los cocientes

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}, \frac{DA}{DC} : \frac{BA}{BC}, \ldots,$$

que designaremos respectivamente por (ABCD), (ACDB), ...

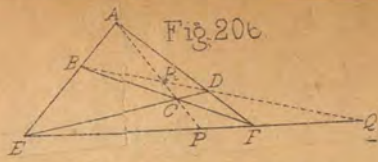


Fig. 206

Conviene familiarizarse con esta notacion. Llamando *primer punto* aquel cuya letra ocupa el primer lugar de la izquierda en el paréntesis, y *segundo punto* el que corresponde á la segunda letra, etc., se toma siempre la relacion de las distancias del tercero al primero y segundo, y se la divide por la relacion de las distancias del cuarto al primero y segundo.

319. Dados tres puntos A, B, C, de un modo cualquiera en una recta indefinida, se puede determinar sobre esta recta un cuarto punto D tal que la relacion anarmónica de los cuatro puntos A, B, C, D tenga un valor λ dado en magnitud y en signo. Porque la igualdad

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \lambda, \text{ ó } \frac{DA}{DB} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{CA}{CB},$$

cuyo segundo miembro es conocido, determina (**306**) el punto D. Sin embargo, para que este punto D sea distinto de los tres primeros, es necesario que λ no tenga ninguno de los valores 0, ∞ ó $+1$. Porque, en efecto, si λ fuese nulo, se tendria, en virtud de la igualdad anterior, $DB = 0$, y D coincidiria con B, si $\lambda = \infty$, se tendria $DA = 0$, y D coincidiria con A; finalmente, si λ fuese igual á $+1$, se tendria $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}$, y D coincidiria con C. Así, *la relacion anarmónica de cuatro puntos distintos puede tener un valor cualquiera positivo ó negativo, excepto los valores* 0, ∞ y $+1$.

320. La relacion anarmónica de cuatro puntos A, B, C, D, no se altera cuando se cambian entre sí dos de estos puntos con tal que se cambien entre sí al mismo tiempo los otros dos. Así se tiene

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA.DB}{CB.DA}$$

$$(CDAB) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC.BD}{AD.BC},$$

y, por consiguiente,

$$(ABCD) = (CDAB).$$

Con los mismos cuatro puntos A, B, C, D, se pueden formar veinticuatro relaciones anarmónicas, siendo verdaderamente distintas seis de ellas. Cuando hablemos en un teorema de la relacion anarmónica de cuatro puntos sin indicar especialmente cuál sea, entenderemos que el teorema es aplicable á cualquiera de ellas.

321. Se da el nombre de *haz* á un sistema cualquiera *(fig. 208)* de

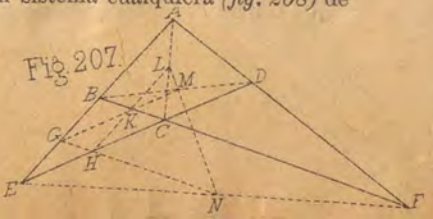


Fig. 207

rectas OM, ON, OP, OQ, que parten de un mismo punto O. El punto O se llama *centro* del haz, y las rectas OM, ON, OP, OQ, se llaman sus radios.

TEOREMA.

322. *Cuando un haz de cuatro rectas* OM, ON, OP, OQ, *es cortado por dos transversales* L, L', *la relacion anarmónica de los cuatro puntos* A, B, C, D, *determinados sobre la primera transversal, es igual á la relacion anarmónica de los cuatro puntos* A', B', C', D', *determinados sobre la segunda (fig. 208).*

Vamos á demostrar, por ejemplo, la igualdad (ABCD) = (A'B'C'D').

Las relaciones $\frac{CA}{CB}, \frac{C'A'}{C'B'}$ tienen el mismo signo, lo mismo que las relaciones $\frac{DA}{DB}, \frac{D'A'}{D'B'}$; por consiguiente, los signos de los cocientes $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ y $\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}$ serán los mismos; falta, pues, probar la igualdad de los valores absolutos de estos cocientes.

En efecto, trazando por el punto B la paralela $B\gamma\delta$ á OA, por los triángulos semejantes CAO y CBγ, DAO y DBδ, se tienen las proporciones

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{\gamma B}, \qquad \frac{DA}{DB} = \frac{OA}{\delta B},$$

que, divididas miembro á miembro, dan

$$(ABCD) = \frac{\delta B}{\gamma B}.$$

Pero trazando por B' la paralela $B'\gamma'\delta'$ á OA, se obtendria análogamente

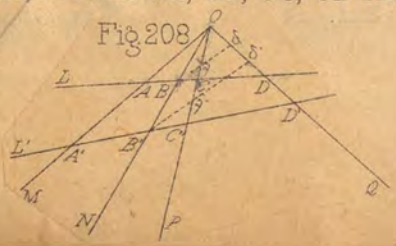
$$(A'B'C'D') = \frac{\delta' B'}{\gamma' B'}.$$

La igualdad evidente de los segundos miembros prueba la de los primeros.

Puede considerarse la figura rectilínea A'B'C'D' como la *perspectiva* ó *proyeccion concurrente* de la figura rectilínea ABCD, proyeccion hecha desde el centro O segun los radios proyectantes OA, OB, OC, OD. De aquí otro enunciado muy cómodo del teorema de que se trata: *la relacion anarmónica de cuatro puntos en línea recta es proyectiva.*

Si el centro O está en el infinito, los radios OA, OB, OC, OD son paralelos y el teorema subsiste.

Fig. 208



Escolios.

323. Llámanse *relaciones anarmónicas de un haz* de cuatro rectas las relaciones anarmónicas de los cuatro puntos que este haz determina sobre una transversal cualquiera. Así (ABCD) (ACBD), ... (**318**) son relaciones anarmónicas del haz formado por las rectas OM, ON, OP, OQ *(fig. 208)*. Estas relaciones anarmónicas del haz se designan por las notaciones (O.ABCD) (O.ACBD)...

Resulta del número **320** que la relacion anarmónica de un haz no cambia de valor cuando se cambian dos radios cualesquiera, con tal que se cambien al mismo tiempo los otros dos; así, por ejemplo, se tiene (O.ABCD) = (O.CDAB).

Se llaman ángulos de un haz los seis ángulos formados por sus cuatro radios considerados dos á dos. Refiriéndonos á la demostracion del número **322**, se ve que *la relacion anarmónica de un haz no se modifica cuando algunos de sus ángulos se reemplazan por sus suplementos.*

324. Es evidente que dos haces que tienen respectivamente los mismos ángulos tienen las mismas relaciones anarmónicas. Hé aquí dos ejemplos importantes de haces de esta naturaleza:

1.° *Si se une un punto cualquiera* O *de una circunferencia con cuatro puntos fijos* A, B, C, D *de esta circunferencia, la relacion anarmónica del haz así formado es constante, cualquiera que sea la posicion del punto* O *sobre la circunferencia.* En efecto, de las propiedades de los ángulos inscritos resulta que, estando fijos en la circunferencia los puntos A, B, C, D, y variando sobre ella el punto O, el haz conserva los mismos ángulos. Esta relacion constante es lo que se llama *la relacion anarmónica de los cuatro puntos* A, B, C, D *de la circunferencia.*

2.° *Si se une el centro de un círculo con los puntos en que cuatro tangentes fijas son cortadas por una quinta tangente, la relacion anarmónica del haz así obtenido es constante, cualquiera que sea la quinta tangente.*

En efecto, el ángulo bajo el cual se ve desde el centro la porcion de una tangente móvil comprendida entre dos de las fijas, es evidentemente igual á la mitad del ángulo formado por los dos radios que terminan en los puntos de contacto de las fijas. Este ángulo es, pues, constante, y el haz considerado conserva, por consiguiente, los mismos ángulos, cualquiera que sea la posicion de la quinta tangente.

Se ve, pues, que *la relacion anarmónica de los puntos segun los cuales una tangente móvil es cortada por cuatro tangentes fijas, es constante.* Esta relacion es lo que se llama *relacion anarmónica de las cuatro tangentes fijas.*

La relacion anarmónica de cuatro tangentes á una circunferencia, es igual á la relacion anarmónica de sus cuatro puntos de contacto; porque el haz que parte del centro del círculo, y cuyos radios pasan por los

puntos de interseccion de estas cuatro tangentes con una quinta, tiene sus radios respectivamente perpendiculares á los del haz que parte del punto de contacto de esta quinta tangente, y tiene sus radios pasando por los puntos de contacto de las cuatro tangentes que se consideran (**323**).

TEOREMA.

325. *Cuando dos haces de cuatro rectas* OA, OB, OC, OD *y* O′A′, O′B′, O′C′, O′D′, *tienen una relacion anarmónica igual y un radio homólogo comun* OO′, *los tres puntos* $\mathfrak{C}$, γ, δ, *de interseccion de los otros radios homólogos tomados dos á dos, están en línea recta (fig. 209).*

En efecto, designemos respectivamente por α, δ y δ' los puntos en que la recta $\mathfrak{C}\gamma$ corta á OO′, OD, O′D′; se tendrá, segun la hipotesis (**323**),

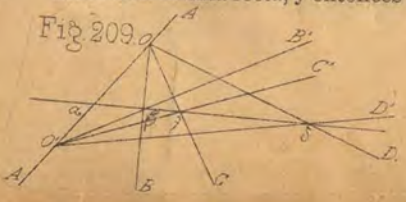
$$(\alpha\mathfrak{C}\gamma\delta) = (\alpha\mathfrak{C}\gamma\delta');$$

luégo δ y δ' coinciden (**319**), y los tres puntos $\mathfrak{C}$, γ, δ están en línea recta.

COROLARIO.

326. *Cuando dos haces de cuatro rectas que se corresponden tienen una relacion anarmónica igual, las otras relaciones anarmónicas de uno y otro haz son tambien iguales.*

Colocando, en efecto, los dos haces de manera que dos radios homólogos estén sobre la misma recta, la igualdad de una de las relaciones anarmónicas exigirá que los otros radios homólogos se corten sobre una misma recta, y entónces



TEOREMA.

327. *Cuando dos figuras rectilíneas de cuatro puntos* A, B, C, D *y* A′, B′, C′, D′, *tienen una relacion anarmónica igual y un punto homólogo comun* A, *las tres rectas* BB′, CC′, DD′ *que unen los otros puntos homólogos tomados dos á dos, concurren en un mismo punto* O *(fig. 210).*

En efecto, sea O el punto de encuentro de BB′ y CC′, y designemos por δ el punto en que OD′ corta á la recta ABC; se tendrá (**322**)

$$(A'B'C'D') = (ABC\delta).$$

Pero se tiene, por hipótesis,

$$(A'B'C'D') = (ABCD);$$

luégo $(ABC\delta) = (ABCD)$.

Por consiguiente (**319**), δ coincide con D y la recta DD′ pasa por O.

COROLARIO.

328. *Cuando dos figuras rectilíneas de cuatro puntos que se corresponden tienen una relacion anarmónica igual, las otras relaciones anarmónicas de una y otra figura son tambien iguales.*

Colocando en efecto las dos rectas en que están situados los puntos de manera que dos puntos homólogos coincidan, la igualdad de una de las relaciones anarmónicas exigirá que las dos figuras sean la una perspectiva de la otra, y, por

los dos haces tendrán necesariamente iguales todas sus relaciones anarmónicas, puesto que estas relaciones serán las mismas (**323**) que las de los cuatro puntos determinados por los dos haces sobre una transversal comun.

consiguiente (**322**), toda relacion anarmónica de la una será igual á la relacion anarmónica análoga de la otra.

APLICACIONES.

329. El *Tratado de Geometría superior* de M. Chasles muestra todo el partido que se puede sacar de la sencilla teoría de la relacion anarmónica. Los teoremas que preceden (**322, 325, 327**) son de importancia, como se verá cuando tratemos de la homografía y de la involucion. Nos limitaremos por ahora á algunos ejemplos; en el curso de este Apéndice encontraremos otras aplicaciones.

330. *Cuando dos triángulos* ABC, A′B′C′ *tienen sus vértices situados dos á dos en tres rectas* OA′A, OB′B, OC′C *que concurran en un mismo punto* O, *sus lados se cortan dos á dos* (BC *y* B′C′; AC *y* A′C′; AB *y* A′B′) *en tres puntos* α, β, γ, *situados en línea recta (fig. 211).*

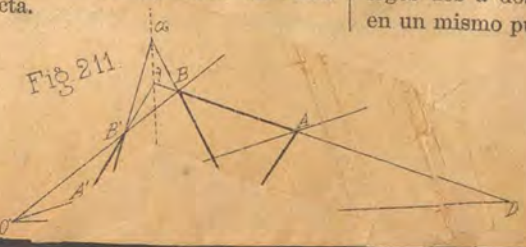
Sean, en efecto, D y D′ los puntos en que la recta OC′C corta respectivamente á los lados AB y A′B′. El haz de las cuatro rectas Oγ, OB, OA, OC es cortado por las dos transversales AB y A′B′, y se tiene (**322**)

$$(\gamma BAD) = (\gamma B'A'D'),$$

y, por consiguiente (**323**),

$$(C.\gamma BAD) = (C'.\gamma B'A'D').$$

Pero estos dos haces tienen un radio homólogo comun DD′; luégo los puntos de interseccion γ, α, β de los otros tres pares de radios homólogos (**325**) están en línea recta.



331. *Cuando dos triángulos* ABC, A′B′C′ *son tales que sus lados se cortan dos á dos* (BC *y* B′C′; AC *y* A′C′; AB *y* A′B′) *en tres puntos* α, β, γ, *situados en línea recta, sus vértices están situados dos á dos en tres rectas* OA′A, OB′B, OC′C, *que concurren en un mismo punto* O *(fig. 211).*

Sea, en efecto, I la interseccion de la recta $\alpha\gamma\beta$ y de CC′; se tendrá (**323**)

$$(C.\alpha\gamma I\beta) = (C'.\alpha\gamma I\beta).$$

Luégo cortando el primer haz por AB y el segundo por A′B′, y llamando D y D′ los puntos en que estas rectas cortan á CC′, se tendrá (**322, 326**)

$$(B\gamma DA) = (B'\gamma D'A').$$

Pero estas dos figuras rectilíneas tienen un punto homólogo comun γ; luégo las rectas BB′, DD′, AA′ que unen los otros puntos homólogos dos á dos, concurren (**327**) en un mismo punto O.

Estos dos teoremas atribuidos á Desargues, geómetra del siglo XVII, han sido nuevamente considerados por Poncelet (*Tratado de las propiedades proyectivas*), que se ha servido de ellos como base de su *Teoría de las figuras homológicas*. Los dos triángulos ABC, A'B'C', que satisfacen á las condiciones precedentes, se llaman *homológicos;* el punto O y la recta $\alpha\beta\gamma$, se llaman respectivamente *el centro y el eje de homología.*

332. *En todo exágono* ABCDEF *inscrito en una circunferencia, los puntos de interseccion* L, M, N *de los tres pares de lados opuestos* AB *y* DE, BC *y* EF, CD *y* AF, *están en línea recta.*

En efecto *(fig. 212)*, se tiene (**324**, 1.º)

$$(A.BFED) = (C.BFED).$$

Por consiguiente (**322**), cortando el primer haz por la recta DE, y el segundo por la recta FE, y siendo G el punto de interseccion de AF y de DE, é I la interseccion de EF y de CD, se tendrá

$$(LGED) = (MFEI)$$

Pero estas dos figuras rectilíneas tienen un punto homólogo comun E; luégo (**327**) las rectas LM, GF, DI que unen los otros puntos homólogos dos á dos, se cortan en un mismo punto N; ó en otros términos, los tres puntos L, M, N están en línea recta.

Este teorema, debido á Pascal, subsiste áun cuando el exágono deje de ser convexo; la sencilla demostracion que precede puede tambien aplicarse.

333. *En todo exágono* ABCDEF *circunscrito á un círculo, las tres diagonales* AD, BE, CF, *que unen los tres pares de vértices opuestos, concurren en un mismo punto* O.

En efecto *(fig. 213)*, sean I y M los puntos en que el lado AB corta á FE y DE; L y N los puntos en que CD corta á AF y FE; se tendrá (**324**, 2.º), considerando los dos lados no contiguos AB y CD cortados por los otros cuatro,

$$(BAIM) = (CLND).$$

Por consiguiente,

$$(E.BAIM) = (F.CLND).$$

Pero estos dos haces tienen un radio homólogo comun IN; luégo (**325**) los puntos de encuentro O, A, D de los otros tres pares EB y FC EA y FL, EM y FD de radios homólogos están en línea recta. Las tres rectas AD, BE y CF pasan, pues, por un mismo punto O.

Este teorema es debido á Brianchon *(Journal de l'Ecole Polytechnique,* cuaderno 13), que lo ha deducido del teorema de Pascal por la consideracion de las polares, como veremos.

334. Si por una parte se consideran los teoremas de los números **325, 330, 332,** y por otra los de los números **327, 331, 333,** se ve que en los primeros se trata de *puntos en línea recta,* y en los segundos de *rectas que concurren en un mismo punto.* En la ciencia de la extension

se distinguen, en efecto, dos géneros de proposiciones: unas que se refieren á *puntos* y otras á *rectas*, y unas y otras se corresponden en virtud de lo que se ha llamado el principio de *dualidad*. Una de las grandes ventajas de la relacion anarmónica, es la de prestarse indiferentemente á estos dos géneros de proposiciones *correlativas*, y ofrecer demostraciones directas y correlativas á su vez. Se puede ver, en efecto, que en las proposiciones que hemos apareado y en sus demostraciones se pasa de las unas á las otras sustituyendo ciertos haces de rectas concurrentes á ciertas series rectilíneas de cuatro puntos, y recíprocamente.

335. El teorema fundamental del núm. **322** fué conocido de los antiguos. Se le encuentra en las *Colecciones matemáticas* de Pappus, que vivía en Alejandría á fines del siglo IV. «Ninguna otra proposicion, dice M. Chasles en el prefacio de su *Tratado de Geometría superior*, me parece tan adecuada para *descubrir* relaciones ó *demostrar* propiedades en una figura. La proposicion que con más frecuencia se usa, es la de la proporcionalidad entre los lados de triángulos semejantes; pues bien, casi siempre hay que formar por líneas auxiliares esos triángulos, que rara vez aparecen en los datos mismos de la cuestion, miéntras que las relaciones anarmónicas se presentan casi siempre en la figura misma ó pueden formarse muy fácilmente.»

De la verdad de esto nos persuadiremos comparando la demostracion dada (**332**) del teorema de Pascal con la que resultaria, por ejemplo, del empleo de la *teoría de las transversales*.

Para demostrar por las transversales el teorema de Pascal, se considera el triángulo formado por tres lados no consecutivos del exágono inscrito. Este triángulo es cortado por cada uno de los otros tres lados y aplicando sucesivamente á cada una de estas transversales el teorema del núm. **308**, se obtienen tres igualdades, cuyo producto, miembro á miembro, se reduce á una nueva igualdad de la misma forma entre los segmentos que determinan sobre los lados del mismo triángulo los puntos de interseccion de los lados opuestos del exágono. La recíproca del núm. **309** prueba, aplicada á este caso, que esos tres puntos de encuentro están en línea recta. Haciendo esta demostracion, se ve que es mucho ménos sencilla que la del núm. **332**.

PROPORCION ARMÓNICA.

336. Se dice que cuatro puntos en línea recta A, B, C, D *(fig. 201)* forman un *sistema armónico* cuando su relacion anarmónica (ABCD) es igual á — 1; es decir, cuando se tiene (**306**)

$$(1) \qquad \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1.$$

Se dice además que los puntos C y D son *conjugados armónicos* con relacion á los puntos A y B, ó que *dividen armónicamente* al segmento AB; del mismo modo se dice que los puntos A y B son *conjugados armónicos* con relacion á los puntos C y D, ó que *dividen armónicamente* al segmento CD. En fin, la relacion (1) se llama *proporcion armónica*. Este calificativo de armónica, debido á los geómetras griegos, proviene de que la proporcion precedente desempeñaba cierto papel en su teoría de los tonos musicales. El calificativo de *anarmónico*, de que ántes hemos hablado, ha sido dado por M. Chasles.

De los razonamientos hechos en el núm. **187**, resulta: 1.°, *que los puntos conjugados* C *y* D *están siempre situados á un mismo lado del punto medio* I *del segmento* AB; 2.°, *que si* C *se confunde con* I, *su conjugado* D *está en el infinito; é inversamente, que el conjugado del punto en el infinito es el punto* I. Estas mismas consecuencias podrian deducirse de la relacion (1), la cual muestra además: 1.°, *que si* A *y* B *coinciden en un punto* M *diferente de* C, D *coincide con* M, porque se tiene entónces

$$\frac{DM}{DM} = -1;$$

de donde

$$DM = -DM,\ 2DM = 0,\ DM = 0;$$

2.°, *que si* C *coincide con uno de los puntos* A *y* B, *siendo estos distintos,* D *coincidirá con el mismo punto;* porque si $CA = 0$, se tiene $DA = 0$; y si $CB = 0$, será $DB = 0$. La proporcion armónica determina siempre el cuarto punto cuando se conocen los otros tres, á ménos que estos tres coincidan en uno solo, en cuyo caso el cuarto queda indeterminado.

TEOREMA.

337. *Cuando un segmento* AB *está dividido armónicamente por dos puntos* C *y* D, *la mitad de este segmento es media proporcional entre las distancias de su punto medio* I *á los conjugados* C *y* D, *y recíprocamente (fig. 214).*

En otros términos: las relaciones

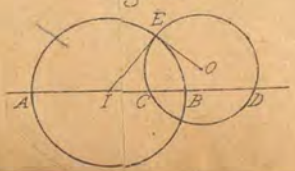
$$(1) \qquad \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1,$$

$$(2) \qquad \overline{IA}^2 = IC.ID,$$

se equivalen. Y en efecto, se pasa de una á otra por medio de las igualdades siguientes:

$$CA = CI + IA, \qquad DA = DI + IA,$$
$$CB = CI - IA, \qquad DB = DI - IA.$$

Fig. 214



COROLARIOS.

338. *Toda circunferencia que pase por* C *y* D, *corta ortogonalmente á la circunferencia descrita sobre* AB *como diámetro (fig. 214).* Porque siendo E uno de los dos puntos comunes á las circunferencias, la igualdad $IC.ID = \overline{IA}^2 = \overline{IE}^2$, que se supone satisfecha, prueba que la circunferencia O es tangente en E al radio IE; es decir, que el ángulo IEO es recto.

Inversamente, *cuando dos circunferencias* I *y* O *se cortan ortogonalmente, dividen armónicamente á toda recta que pase por el centro de una de ellas;* porque siendo el ángulo IEO recto por hipótesis, el radio IE es tangente á la circunferencia O, y se tiene $\overline{IE}^2$ ó $\overline{IA}^2 = IC.ID$.

339. La relación (2) muestra que IC aumenta cuando ID disminuye; de suerte que si C′ y D′ son dos nuevos puntos conjugados armónicos con respecto á A y B, y situados como C y D á la derecha de I, los segmentos CD y C′D′ estarán comprendidos el uno en el otro. Serían exteriores uno á otro si C′ y D′ estuviesen á la izquierda de I. Luego *cuando dos segmentos* CD, C′D′ *son conjugados armónicos con relación á un tercero* AB, *está uno de ellos comprendido en el otro ó no tienen ninguna parte comun.* Y, por consiguiente, *cuando dos segmentos tienen una parte comun, no puede haber dos puntos conjugados armónicamente con respecto á uno y otro segmento.*

De estas propiedades y las del número anterior se deduce que, *cuando dos circunferencias no tienen ningun punto comun, existe una circunferencia que corta á ambas ortogonalmente, y cuyo centro está en la línea de los centros de las dos circunferencias; esta circunferencia no existe cuando las dos dadas se cortan.*

TEOREMA.

340. *Cuando un segmento* AB *está dividido armónicamente por dos puntos* C *y* D, *el valor inverso de este segmento es medio aritmético entre los valores inversos de las distancias de su orígen* A *á los dos puntos conjugados* C *y* D, *y recíprocamente.*

En otros términos, las igualdades

$$(1) \qquad \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1,$$

$$(2) \qquad \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD},$$

son equivalentes. Se pasa, en efecto, de una á otra por medio de las igualdades siguientes:

$$CB = AB - AC, \qquad DB = AB - AD. \quad (1)$$

Escolio.

341. Cuando se tienen n puntos A_1, A_2, ..., A_n, en línea recta, si despues de haber escogido arbitrariamente un punto O de esta recta como orígen, se determina sobre la misma línea un punto M tal que se tenga en magnitud y signo

$$\frac{n}{OM} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \ldots + \frac{1}{OA_n}$$

el segmento OM recibe, segun el geómetra inglés Maclaurin *(De linearum curvarum proprietatibus,* etc., 750), el nombre de *media armónica* de los segmentos OA_1, OA_2, ..., OA_n.

Poncelet ha llamado al punto M *centro de las medias armónicas* de los puntos A_1, A_2, ..., A_n, con relacion al orígen O *(Journal de Crelle,* tomo III).

Segun esto, se puede enunciar el teorema precedente como sigue:

En todo sistema armónico de cuatro puntos, la distancia de uno de ellos á su conjugado es la media armónica de las distancias del mismo punto á los otros dos.

O bien:

En todo sistema armónico de cuatro puntos, uno de ellos es, respecto á su conjugado, el centro de las medias armónicas de los otros dos.

HACES ARMÓNICOS.

342. Llámase *haz armónico* todo haz de cuatro rectas OA, OB, OC, OD, cuya relacion anarmónica (O.ABCD) es igual á — 1; es decir (**323**), todo haz que determina sobre una transversal cualquiera un sistema de cuatro puntos armónicos *(fig. 215).* Se dice entónces que *los radios* OC *y* OD *son conjugados armónicos* con relacion á *los radios* OA y OB, ó que *dividen armónicamente al ángulo* AOB. Del mismo modo se dice que los radios OA y OB son *conjugados armónicos* con relacion á *los radios* OC *y* OD, ó que *dividen armónicamente al ángulo* COD.

Segun lo que precede, es claro que: *si por un punto* C, *tomado de un modo cualquiera en el plano de un ángulo* AOB, *se trazan diversas secantes, tales como* ACB, *y sobre cada una de ellas se marca el punto* D, *conjugado armónico del punto* C *con relación al segmento* AB *interceptado entre los lados del ángulo, el lugar geométrico de los puntos* D *será el radio* OD, *conjugado armónico de* OC *con respecto al ángulo* AOB. Así, miéntras gira la secante alrededor del punto C, el conjugado D de este punto describe una recta fija OD. Esta recta recibe el nombre de *polar* del punto C *con respecto al ángulo* AOB, y el punto C se llama *polo* de la recta OD con respecto al mismo ángulo AOB.

Steiner ha deducido de este principio una demostracion muy ele-

Fig. 215.

gante de la propiedad fundamental (**315**) del cuadrilátero completo. Volviendo á la *fig. 206*, sean P' el conjugado armónico de P con respecto á EF, y R' el conjugado armónico de R con respecto á BD: P' y R' deberán estar situados en la recta conjugada armónica de AC con respecto al ángulo EAF, y tambien en la conjugada armónica de AC con respecto al ángulo ECF. Por consiguiente, los dos puntos P' y R' coinciden en uno solo, que ha de ser el punto Q de interseccion de BD y EF. Los sistemas EPFQ y BRDQ son, pues, armónicos, y de un modo análogo se demostraria que tambien lo es el sistema ARCP.

Se ve tambien que, *si por un punto* Q *en el plano de un ángulo* EAF *se trazan dos transversales* QDB *y* QFE, *el lugar de los puntos* C *de interseccion de las rectas* BF *y* ED *es la polar del punto* Q *con respecto al ángulo* EAF; de aquí un procedimiento muy sencillo para construir con sólo la regla la polar de un punto con respecto á un ángulo.

TEOREMA.

343. *En un haz armónico* OA, OB, OC, OD, *toda transversal* A'B'C'D' *paralela á uno de los radios* OD, *es cortada por los otros tres en dos partes iguales (fig. 215).*

En efecto, en el sistema armónico A'B'C'D', estando el punto D' en el infinito (puesto que A'D' es la paralela á OD), su conjugado C' debe ser el punto medio del segmento A'B' (**336**).

344. Recíprocamente, *un haz de cuatro rectas,* OA, OB, OC, OD, *es armónico si una paralela* A'B'C'D' *á una de ellas queda dividida en dos partes iguales por las otras tres.*

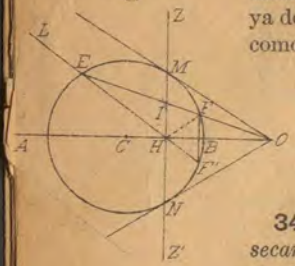
En efecto, siendo C' el punto medio de A'B', este segmento está dividido armónicamente por el punto C' y por el D' situado en el infinito sobre A'B'; es decir, por el punto C' y por el de interseccion de A'B' con OD. El haz que se considera divide, pues, armónicamente á la transversal particular A'B'C'D', y, por consiguiente (**322**), divide tambien armónicamente á cualquiera otra transversal ABCD. Es, por tanto, un haz armónico.

Corolarios.

345. *Cuando en un haz armónico dos radios conjugados* OC *y* OD *son rectangulares, estos radios son las bisectrices de los dos ángulos suplementarios formados por los otros dos radios* OA *y* OB; porque una transversal A'C'B' perpendicular á OC es paralela á OD, y, por tanto, A'C' = C'B'; y ya se ve que, siendo iguales los triángulos rectángulos OC'A' y OC'B', OC es la bisectriz del ángulo AOB.

La recíproca: *Un ángulo cualquiera* AOB *queda dividido armónica-*

Fig. 216.



mente por su bisectriz OC, *y la bisectriz* OD *de su suplementario* ha sido ya demostrada directamente en el núm. **193**, y se demostraria tambien como la directa, basándose en la recíproca del núm. **344**.

POLO Y POLAR EN EL CÍRCULO.

TEOREMA.

346. *Si por un punto* O *en el plano de un círculo* C *se traza una secante cualquiera* OFE, *y se determina el conjugado armónico* I *del punto* O *con relacion á* EF, *el lugar geométrico de los puntos* I, *cuando la secante gira alrededor del punto* O, *es una recta perpendicular al diámetro* AB, *que pasa por el punto* O *(figuras 216 y 217).*

Determinemos, en efecto, el punto del lugar que está en el diámetro AB; es decir, el punto H, conjugado armónico de O con respecto á AB. Para esto basta (**193**) unir el punto E con el F′ simétrico de F con relacion á AB. Pero la recta HO es evidentemente bisectriz del ángulo FHF′, y, por consiguiente, la perpendicular HZ es bisectriz del ángulo suplementario FHL. Además, en los triángulos HEF, las bisectrices HZ y HO del ángulo en el vértice y su suplemento dividen armónicamente (**198**) á la base EF. Luego los puntos I están situados en la perpendicular HZ al diámetro AB.

Corolarios.

347. Se dice que el punto O es el *polo* de la recta HZ, y que la recta HZ es la *polar* del punto O con relacion al círculo C.

El diámetro AB que pasa por el polo queda dividido armónicamente por el polo O y el pié H de la polar, y se tiene, por consiguiente (**337**), en magnitud y en signo la relacion

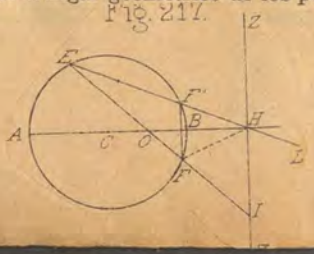
$$CH.CO = R^2,$$

en la cual R designa el radio del círculo C. Luego *el radio del círculo es medio proporcional entre las distancias del centro al polo y á la polar.*

De esta relacion, ó bien de lo dicho en el núm. **336** sobre las posiciones relativas de los dos puntos que dividen armónicamente un segmento dado, resultan las siguientes propiedades:

1.ª El polo y la polar están situados á un mismo lado del centro C: la polar es exterior al círculo si el polo es interior; corta al círculo si el polo es exterior. En este último caso *la polar coincide con la cuerda* MN *de los contactos de las tangentes trazadas á la circunferencia desde el polo* O *(fig. 216);* porque cuando E y F se confunden en M, el punto I, que está siempre situado entre ellos, se halla tambien en M; de suerte que este punto de contacto pertenece al lugar geométrico de los puntos I, es decir, á la polar del punto O.

Fig. 217.



2.ª *La polar del centro está en el infinito, y la polar de un punto que se ha alejado al infinito en una direccion dada es el diámetro perpendicular á esta direccion.* Inversamente, *el polo de una recta situada en el infinito es el centro, y el polo de un diámetro está en el infinito sobre la perpendicular á este diámetro.*

3.ª *La polar de un punto de la circunferencia, es la tangente en ese mismo punto;* é inversamente, *el polo de una tangente es su punto de contacto.*

TEOREMA.

348. *Las polares de todos los puntos de una recta pasan por el polo de esta recta;* é inversamente, *los polos de todas las rectas que pasan por un mismo punto están situados en la polar de este punto (fig. 218).*

En efecto, sean XY una recta cualquiera, I su polo con relacion al círculo C, y O uno cualquiera de sus puntos. Si desde el punto I se baja una perpendicular IH sobre CO, se tendrá (**196**), por ser antiparalelas las dos rectas IH y OO′,

$$CH.CO = CI.CO',$$

y, por consiguiente,

$$CH.CO = R^2.$$

Luego la recta IH es la polar del punto O. De aquí resulta: 1.° que la polar IH de un punto cualquiera O de la recta XY pasa por el polo I de esta recta; 2.°, que el polo de una recta cualquiera XY que pasa por un punto O, está situado sobre la polar IH de este punto.

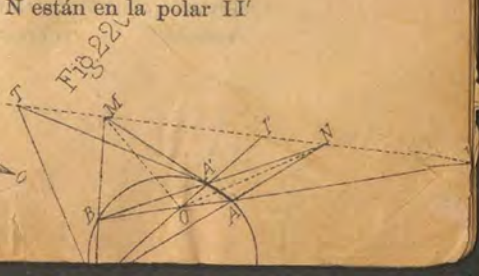
COROLARIO.

349. *Toda recta tiene por polo la interseccion de las polares de dos de sus puntos. Todo punto tiene por polar la recta que une los polos de dos rectas que pasen por el punto.*

TEOREMA.

350. *Si por un punto* O *en el plano de un círculo se trazan dos transversales* OAB, OA′B′, *y se unen los puntos* A *y* A′, B *y* B′ *por las rectas* AA′ *y* BB′, *que se cortan en* M, *y* AB′ *y* BA′ *que se cortan en* N, *el lugar geométrico de los puntos* M *y* N, *cuando se hacen variar las secantes* OAB, OA′B′, *es la polar del punto* O *(figuras 219 y 220).*

En efecto, si se traza la recta MN y son I é I′ los puntos en que esta recta corta á AB y á A′B′, considerando el cuadrilátero completo MB′NA′BA, se ve que los sistemas OA′I′B′, OAIB, son armónicos (**342**), y, por consiguiente, los puntos M y N están en la polar II′ del punto O.



COROLARIOS.

351. Este teorema ofrece un medio sencillo de construir la polar MN de un punto O con relacion á un círculo, usando solamente la regla.

352. En el triángulo MNO, cada lado es evidentemente la polar del vértice opuesto. Luégo *en todo cuadrilátero inscrito en un círculo, el punto de interseccion de las diagonales y los puntos de concurso de los lados opuestos forman un triángulo tal que cada vértice es el polo del lado opuesto.*

353. Si la transversal OAB, girando alrededor del punto O, tiende hácia OA′B′, las rectas AA′ y BB′ tienden hácia las tangentes al círculo en los puntos A′ y B′. Luégo, *si por un punto* O *en el plano de un círculo, se traza una secante* OA′B′ *y las tangentes* A′T, B′T, *en los puntos* A′, B′, *en que dicha secante corta á la circunferencia, el lugar geométrico de los puntos de encuentro* T *de estas tangentes, cuando la transversal gira alrededor del punto* O, *es la polar de este punto.*

Por consiguiente, si se trazan tangentes al círculo por los vértices del cuadrilátero inscrito ABB′A′, se forma un cuadrilátero circunscrito que, despues de completado, tiene por diagonales los tres lados del triángulo MNO, prolongados indefinidamente. Luégo *en todo cuadrilátero circunscrito á un círculo, las tres diagonales forman un triángulo tal que cada vértice es el polo del lado opuesto.*

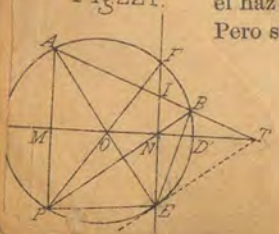
Fig. 222.

Finalmente, reuniendo esta última propiedad con la del núm. **352,** y teniendo presente el teorema del núm. **342,** se llega á este enunciado general: *Si se inscribe en un círculo un cuadrilátero cualquiera y se le circunscribe otro cuyos lados sean tangentes en los vértices del primero:* 1.°, *las diagonales interiores de los dos cuadriláteros se cortan en un mismo punto y forman un haz armónico;* 2.°, *las terceras diagonales están situadas en la misma recta, y sus extremidades forman una serie de cuatro puntos armónicos;* 3.°, *la interseccion de dos diagonales cualesquiera, es el polo de una de las otras tres.*

PROBLEMA.

354. *Dados dos puntos* A y B *sobre una circunferencia cuyo centro es* O, *hallar sobre ella un punto* P *tal que las rectas* PA *y* PB *determinen sobre un diámetro fijo* DD′ *los segmentos* OM *y* ON, *iguales entre sí (fig. 221).*

Fig. 221.



Sea FIE la polar del punto en que se encuentran AB y DD′ con relacion al círculo O. Siendo armónicos los cuatro puntos T, B, I, A, el haz E.TBFA es armónico; por consiguiente (**324, 1.°**), lo es tambien el haz P.EBFA, que tiene por centro la extremidad P del diámetro FO. Pero siendo recto el ángulo inscrito FEP, la recta DD′ es paralela al

radio PE del haz, y por tanto, queda dividida en dos partes iguales OM y ON por los otros radios del haz.

Se ve que hay dos puntos que satisfacen á la cuestion: son los diametralmente opuestos á los puntos en que la polar del punto T corta á la circunferencia.

MÉTODO DE LAS POLARES RECÍPROCAS.

355. Dado un polígono cualquiera ABCDE, si se trazan con relacion á un círculo O trazado en su plano las polares A'B', B'C', C'D', D'E', E'A' de sus vértices, se obtiene un segundo polígono A'B'C'D'E', cuyos vértices A', B', C', D', E' son los polos de los lados EA, AB, BC, CD, DE del primero. En efecto, el vértice del ángulo C' por ejemplo, tiene por polar (**349**) la recta BC, que une los polos B y C de los dos lados C'B' y C'D' de este ángulo. Así, se puede considerar el segundo polígono A'B'C'D'E' como formado por rectas que son las polares de los vértices del primer polígono, ó formado teniendo por vértices los polos de los lados de éste. É inversamente, si se determinasen los polos de los lados de la segunda figura, ó las polares de sus vértices se tendria de nuevo la primera.

Estos dos polígonos se llaman *polares recíprocos* con relacion al círculo O, que recibe el nombre de *círculo director*. Tales son, por ejemplo, un polígono cualquiera inscrito en un círculo, y el circunscrito que se forma trazando tangentes por los vértices del inscrito *(fig. 222)*.

356. Consideremos en segundo lugar una curva cualquiera ABC *(fig. 223)*. Marcando, con respecto á un círculo cualquiera O situado en su plano, los polos A', B', ..., de las diversas tangentes MA, MB, ..., se obtiene una nueva curva A'B', ..., cuyas tangentes N'A', N'B', ..., son las polares de los puntos A, B, ..., de la primera. En efecto, el punto de interseccion de las tangentes MA y MB tiene por polar (**349**) la cuerda A'B'; y cuando B tiende hácia A, la cuerda A'B' y el punto M, que son siempre polar y polo, tienden respectivamente hácia la tangente A'N' y el punto A. Así, se puede considerar la segunda curva A'B'C' como obtenida tomando los polos de las tangentes á la primera curva ABC, ó tomando las polares de sus diversos puntos. En la segunda manera de operar, la curva A'B'C', ..., está *determinada por sus tangentes sucesivas*, de las cuales se dice que es la *envolvente*. Inversamente, si se tomasen los polos de las tangentes á la segunda curva ó las polares de sus puntos, se obtendria nuevamente la primera.

Fig. 223.

Estas dos curvas se llaman *polares recíprocas*, con relacion al círculo director O. *El radio del círculo director es* (**347**) *medio proporcional entre las distancias de su centro á un punto cualquiera de una de las curvas y á la tangente correspondiente de la otra curva.* Así, la polar recí-

proca de una circunferencia concéntrica á la del círculo director es otra circunferencia concéntrica con ellas, y el radio del círculo director es medio proporcional entre los radios de los otros dos círculos.

En particular, la circunferencia del círculo director es polar recíproca de sí misma. Cuando la circunferencia que se considera no es concéntrica con la del círculo director, su polar recíproca no es ya un círculo, como demostraremos más adelante.

357. Veamos ahora en qué consiste el método de las polares recíprocas:

Dada una figura cualquiera, si se forma su polar recíproca con respecto á un círculo director, se obtendrá una nueva figura correlativa de la primera; es decir, tal que sus puntos y sus rectas estarán respectivamente reemplazados por rectas y puntos. Así, á una serie rectilínea de puntos de una de las figuras corresponderá un haz de rectas en la otra, y recíprocamente. A cierto número de puntos de una curva situados en línea recta, corresponderán en la curva correspondiente otras tantas tangentes, que parten de un mismo punto. Al punto de interseccion de varias curvas, corresponderá una tangente comun á sus curvas correspondientes, etc., etc. Toda propiedad *descriptiva*, es decir, que no se refiera más que á la situacion de las líneas con independencia de toda condicion de magnitud, conducirá á otra propiedad de la figura polar recíproca que se podrá enunciar inmediatamente, segun lo que precede, y que por esto sólo quedará demostrada. No es necesario siquiera construir la figura; basta para pasar de un enunciado á otro cambiar las palabras *puntos* y *líneas* en las palabras *líneas* y *puntos*.

Así, uno de los teoremas (**330, 331**) sobre los triángulos homológicos resulta del otro; así tambien, la propiedad del exágono circunscrito, debida á Brianchon, resulta del teorema de Pascal, sobre el exágono inscrito (**332, 333**). etc., etc. Toda consecuencia de uno de estos dos últimos teoremas, debe tambien conducir á una consecuencia correlativa del otro. Hé aquí algunos ejemplos:

En todo pentágono inscrito en un círculo, el punto de concurso de la tangente trazada por un vértice y del lado opuesto, y los puntos de concurso de los otros lados no consecutivos, son tres puntos en línea recta.

En todo cuadrilátero inscrito en un círculo, si se trazan tangentes en dos vértices extremos de un lado, el

En todo pentágono circunscrito á un círculo, la recta que une un vértice con el punto de contacto del lado opuesto, y las diagonales que unen los otros vértices no consecutivos, son tres rectas que concurren en un mismo punto.

En todo cuadrilátero circunscrito á un círculo, si se toman los puntos de contacto de dos lados que se cor-

punto de interseccion de éste con su opuesto, y los puntos de interseccion de cada una de las tangentes con el lado que pasa por el punto de contacto de la otra, son tres puntos en línea recta.

En todo cuadrilátero inscrito en un círculo, los puntos de interseccion de los lados opuestos y los de interseccion de las tangentes en vértices opuestos son cuatro puntos en línea recta.

En todo triángulo inscrito en un círculo, los puntos de interseccion de los lados con las tangentes trazadas en los vértices opuestos son tres puntos en línea recta.

tan en un vértice la recta de union de éste con su opuesto, y las de union de los puntos de contacto con los otros dos vértices, son tres rectas que concurren en un mismo punto.

En todo cuadrilátero circunscrito á un círculo, las dos diagonales y las rectas que unen los puntos de contacto de lados opuestos son cuatro rectas que concurren en un mismo punto.

En todo triángulo circunscrito á un círculo, las rectas que unen los vértices con los puntos de contacto de los lados opuestos son tres rectas que concurren en un punto.

Los teoremas enunciados en la columna de la izquierda, son corolarios del de Pascal; porque siendo éste independiente de la longitud de los lados del exágono inscrito, subsiste cuando se reemplazan algunos de estos lados por tangentes á la circunferencia. Los teoremas de la derecha resultan de sus correspondientes de la izquierda por la teoría de las polares recíprocas.

Tambien pueden considerarse los teoremas de la derecha como corolarios del de Brianchon, si se suponen ciertos ángulos iguales á dos rectos. De ellos resultan entónces los teoremas de la izquierda por la teoría de las polares recíprocas.

En el estudio de las cónicas se aprecia la fecundidad de este elegante método de las polares recíprocas, debido á Poncelet. Hagamos notar que este método tan útil como *método de invencion*, puesto que permite (según la graciosa expresion de Gergonne) *hacer en cierto modo Geometría por partida doble*, tiene, sin embargo, como todos los procedimientos de transformacion, el inconveniente de no enseñar nada sobre el enlace de la proposición descubierta con alguna teoría determinada, y no indicar tampoco nada que pueda conducir á su demostracion directa. «En general, como dice M. Chasles, no basta que una proposicion sea cierta para que se pueda usar útilmente en Matemáticas; es preciso conocer tambien sus relaciones con las diversas proposiciones que se refieren al mismo asunto.

358. Terminaremos esta reseña de la teoría de figuras polares recíprocas por algunas indicaciones sobre la transformacion de las propiedades *métricas;* es decir, de las propiedades en los cuales se atiende

no sólo á la situacion de las líneas, sino tambien á ciertas relaciones numéricas entre los ángulos ó los segmentos de las diversas líneas de la figura.

Ante todo, las *propiedades métricas angulares* se transforman sencillamente por la teoría de las polares recíprocas con el auxilio del siguiente principio.

El ángulo de dos rectas es igual al ángulo de las rectas que unen sus polos con el centro del círculo director, porque estos dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares.

Transformemos, por ejemplo, la siguiente proposición: *En todo triángulo* ABC, *las alturas* Aa, Bb, Cc *concurren en un punto* I.

Sean O el centro del círculo director, y A′B′C′ el triángulo polar recíproco de ABC, siendo A′ el polo de BC, B′ el de AC y C′ el de AB. Las tres alturas Aa, Bb, Cc, se cortan en un mismo punto I; por consiguiente, sus polos α, β, γ, deben estar sobre una misma recta, que es la polar de I. Pero el polo α de Aa debe estar situado, por una parte en B′ C′, polar de A, y por otra en la perpendicular levantada en O á la recta OA′, puesto que, en virtud del principio enunciado ántes, el ángulo αOA′ debe ser recto como igual al ángulo AaB de las polares Aa y BC correspondientes á los puntos α y A′. Se tiene, pues el siguiente teorema:

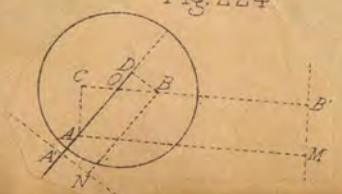
Si se une un punto fijo O *tomado arbitrariamente en el plano de un triángulo* A′B′C′ *con los tres vértices* A′, B′, C′, *las perpendiculares levantadas en ese punto* O *á las rectas* OA′, OB′, OC′, *así obtenidas van á cortar respectivamente á los lados opuestos* B′C′, A′B′, A′C′ *en tres puntos* α, β, γ, *situados en línea recta.*

359. Gran número de *relaciones segmentarias* se transforman tambien con el auxilio de los dos principios siguientes:

1.° *La relación anarmónica de cuatro puntos de una figura situados en línea recta, es igual á la relacion anarmónica del haz de las cuatro rectas correspondientes de la figura polar recíproca*, porque este haz y el que se obtiene uniendo los cuatro puntos con el centro del círculo director tienen sus ángulos respectivamente iguales, segun el principio del núm. **358.**

2.° *La relacion* $\frac{AO}{BO}$ *de las distancias de dos puntos cualesquiera* A *y* B *al centro del círculo director, es igual á la relación* $\frac{AM}{BN}$ de las *distancias de cada uno de dichos puntos á la polar del otro* (fig. 224). Porque siendo A′N la polar del punto A, y B′M la de B, si trazamos AC perpendicular á OB, y BD perpendicular á OA, tendremos, designando por R el radio del círculo director.

Fig. 224



$$R^2 = OA.OA' = OB.OB'; \text{ de donde } \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}.$$

Pero siendo BD y AC antiparalelas con relacion al ángulo O, se tiene

$$OA.OD = OC.OB; \text{ de donde } \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD};$$

por consiguiente,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB' + OC}{OA' + OD} = \frac{CB'}{DA'} = \frac{AM}{BN}.$$

360. Con el auxilio del principio primero se puede deducir muy sencillamente el siguiente teorema: *la relacion anarmónica de cuatro tangentes á un círculo, es igual á la relacion anarmónica de sus cuatro puntos de contacto.* Nos limitamos á esta aplicacion, pero se siente el alcance de este primer principio, notando que se puede por medio de él transformar la relacion $\frac{CA}{CB}$ de los dos segmentos comprendidos entre tres puntos cualesquiera A, B, C, en línea recta. En efecto la introduccion del punto situado en el infinito sobre esta recta, permite considerar esta relacion como igual á la relacion anarmónica $(ABC\infty)$; luego si designamos por A', B', C', las polares de los puntos A, B, C; por D' la polar del punto en el infinito, y por α, β, γ, δ, los puntos en que una transversal cualquiera corta al haz de estas cuatro rectas, se tendrá

$$\frac{CA}{CB} = (ABC\infty) = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta}.$$

361. El segundo principio es debido á Mr. Salmon. Hé aquí una de sus aplicaciones.

Siendo ABCD un cuadrilátero inscrito en un círculo de centro O y de radio R, y siendo M un punto cualquiera de la circunferencia, se tiene la identidad

$$(MA.MB)(MC.MD) = (MA.MD)(MB.MC).$$

Si por otra parte son ME, MF, MG, MH las perpendiculares bajadas desde M sobre los lados AB, BC, CD, DA del cuadrilátero, los productos encerrados entre paréntesis son respectivamente (**239**) proporcionales á ME, MG, MH, MF; se tiene, pues,

$$(1) \qquad ME.MG = MH.MF;$$

es decir, que *en todo cuadrilátero inscrito en un círculo, el producto de las distancias de un punto cualquiera de la circunferencia á dos lados opuestos es igual al producto de las distancias del mismo punto á los otros dos.* Transformemos este teorema por el método de las polares recíprocas: tomando el círculo O por círculo director, el cuadrilátero inscrito ABCD tendrá por correspondiente el cuadrilátero circunscrito A'B'C'D', y al punto M corresponderá la tangente MT en este punto. Sean A'L,

B'N, C'P, D'Q, las distancias de los vértices A', B', C', D', á la tangente MT. Puesto que A' es el polo de AB y M es el polo de MT, se tendrá, por el principio de Mr. Salmon,

$$\frac{ME}{A'L} = \frac{MO}{A'O}; \text{ de donde } ME = \frac{MO}{A'O}. A'L.$$

Así, las líneas ME, MG, MH, MF, son respectivamente proporcionales á las distancias A'L, C'P, D'Q, B'N, y la relacion (1) se convierte en

$$A'L.C'P = \frac{A'O.C'O}{D'O.B'O}. D'Q.B'N;$$

es decir, que *en todo cuadrilátero circunscrito á un círculo el producto de las distancias de dos vértices opuestos á una tangente cualquiera está en una relacion constante con el producto de las distancias de los otros dos vértices á la misma tangente.*

El teorema sobre el cuadrilátero inscrito puede aplicarse á un polígono cualquiera de un número par de lados. En efecto, si P es un polígono inscrito de $2n$ lados y P' el inscrito de $2n - 2$, que se obtiene separando de P un cuadrilátero por medio de una diagonal, se ve inmediatamente que si el teorema es cierto para el polígono P' de $2n - 2$. lados, lo será tambien para el polígono P de $2n$ lados.

Tambien se puede hacer aplicable el teorema á un polígono cualquiera, imaginando que el polígono inscrito tiene un lado infinitamente pequeño dirigido segun la tangente en uno de sus vértices.

De aquí resultan las dos proposiciones siguientes, enfrente de las cuales presentamos las dos correlativas, que de ellas se forman por el método de las polares recíprocas:

Cuando un polígono de un número par de lados está inscrito en un círculo, el producto de las distancias de un punto cualquiera de la circunferencia á los lados de lugar par es igual al producto de las distancias del mismo punto á los lados de lugar impar.

Cuando un polígono está inscrito en un círculo, el producto de las distancias de un punto cualquiera de la circunferencia á los diversos lados es igual al producto de las distancias del mismo punto á las tangentes trazadas por los vértices del polígono.

Cuando un polígono de un número par de lados está circunscrito á un círculo, el producto de las distancias de los vértices de lugar par á una tangente cualquiera está en una relacion constante con el producto de las distancias de los vértices de lugar impar á la misma tangente.

Cuando un polígono está circunscrito á un círculo, el producto de las distancias de sus vértices á una tangente cualquiera está en una relacion constante con el producto de las distancias de los puntos de contacto de los lados á la misma tangente.

FIGURAS HOMOTÉTICAS.

362. Dado un sistema cualquiera A, B, C,... de puntos situados en un plano *(figuras 225 y 226)*, si se toman á partir de un punto cualquiera S del plano y sobre los radios SA, SB, SC,..., los segmentos SA', SB', SC',..., tales que se tenga

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \dots = K,$$

siendo K un número cualquiera, se dice que el nuevo sistema de puntos A', B', C',... es homotético del sistema primitivo ABC...

El punto S se llama *centro de homotecia*, y el número K *relacion de homotecia*. Si K es positivo, los dos segmentos SA' y SA están en el mismo sentido, y los puntos A y A' se hallan á un mismo lado del centro S *(fig. 225)*. Si K es negativo, los segmentos SA y SA' son de sentidos contrarios, y los puntos A y A' se hallan á distinto lado del punto S *(fig. 226)*; en el primer caso *(fig. 225)*, los dos sistemas se llaman *homotéticos directos;* en el segundo *(fig. 226)* son *homotéticos inversos.* Cuando dos sistemas son homotéticos inversos, bastaria para hacerlos directos el giro de uno de ellos 180° alrededor del centro S. Se obtienen, pues, todos los sistemas homotéticos del dado haciendo variar la posicion del centro S y dando á K todos los valores positivos de 0 á ∞.

363. Segun que los puntos del primer sistema ABC... estén aislados ó formen líneas continuas, los puntos del sistema homotético estarán á su vez aislados ó formando líneas continuas.

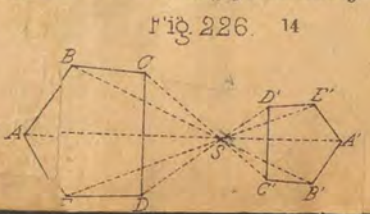
Supongamos, por ejemplo, que la figura primitiva sea una circunferencia OA, cuyo centro es O *(fig. 227)*, y busquemos su homotética; es decir, una figura de puntos A' tales que $\frac{SA'}{SA} = K$. Si se toma sobre SO una longitud SO' tal que $\frac{SO'}{SO} = K$, los dos triángulos semejantes (206) SOA, SO'A' dan $\frac{O'A'}{OA} = K$; por consiguiente, O'A' es constante como OA; y el lugar geométrico pedido es una circunferencia, cuyo centro es el punto O'. Así, *la figura homotética de una circunferencia es una circunferencia.*

TEOREMA.

364. *En dos sistemas homotéticos, la recta* AB *que une dos puntos cualesquiera del primer sistema, y la recta* A'B' *que une los homólogos en el segundo sistema son paralelas y su relacion es* K *(figuras 225 y 226).*

Fig. 225.

Fig. 226.



14

En efecto, las rectas AB y A'B' dividen á los radios SA y SB en la misma relacion K, y son, por tanto, paralelas; además se tiene (**204**)

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{S'A'}{SA} = K.$$

COROLARIO.

365. Si tres puntos del primer sistema están en línea recta, sus homólogos en el segundo sistema tambien lo estarán; ó en otros términos: *la figura homotética de una línea recta es una línea recta paralela á la primera;* estas dos rectas se llaman *homólogas.* Si una recta pasa por el centro de homotecia, su homóloga pasa tambien por dicho centro y coincide, por consiguiente, con ella misma. Recíprocamente, si dos rectas homólogas coinciden, pasan por el centro de homotecia.

366. *El ángulo de dos rectas es igual al de sus homólogas.* Por consiguiente, *la figura homotética de un polígono es un polígono semejante al primero.* Los lados del nuevo polígono son paralelos á sus homólogos en el primero, y su relación de semejanza es K.

367. *Las tangentes en dos puntos homólogos de dos curvas homólogas, son paralelas* como límites de secantes paralelas.

TEOREMA.

368. *Dos sistemas son homotéticos si existen en su plano dos puntos* O *y* O', *tales que las rectas que unen al punto* O *con los diversos puntos del primero son paralelas á las rectas que unen el punto* O' *con los diversos del segundo, y la relacion entre unas y otras es la misma* K *(fig. 227).*

En efecto, si las rectas OA y O'A' son paralelas y en el mismo sentido, la recta AA' cortará á la prolongacion de OO' en un punto S, tal que

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA} = K = \frac{SA'}{SA}.$$

El punto S es, pues, el mismo, cualquiera que sea el par de puntos homólogos A y A' que se considere, y por consiguiente, los dos sistemas son homotéticos directos, y tienen el punto S por centro y el número K por relación de homotecia.

Si las rectas OA' y O'A_1 son paralelas, y en sentido contrario, la recta AA_1 corta á OO' en un punto S_1 tal que

$$\frac{S_1O'}{S_1O} = \frac{O'A_1}{OA} = K = \frac{S_1A_1}{S_1A},$$

y los dos sistemas son entónces homotéticos inversos, tienen por centro el punto S_1 y por relación de homotecia el número K.

COROLARIOS.

369. *Dos polígonos semejantes* A B C D E *y* A′ B′ C′ D′ E′ *que tienen sus lados paralelos, son homotéticos.* En efecto (**214**), si se toma en el plano un punto cualquiera O como ligado al primer polígono, y se determina, con respecto al segundo, el punto O′ homólogo de O, las rectas O A y O′ A′, O B y O′ B′, O C y O′ C′, etc., serán paralelas y en la relacion constante K. Luego los polígonos son homotéticos.

La homotecia es directa *(fig. 225)* ó inversa *(fig. 226)*, segun que los dos polígonos tengan en el mismo sentido ó en sentidos contrarios sus lados paralelos.

370. *Dos circunferencias cualesquiera son homotéticas directas y homotéticas inversas (fig. 227).*

En efecto la relacion $\frac{O'A'}{OA}$ de dos radios paralelos y en el mismo sentido, es constante; luégo las dos circunferencias son homotéticas directas, y su *centro de homotecia directa* S está situado en la recta que une los centros, dejando á estos á un mismo lado y en una posicion tal que se tiene

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{R'}{R},$$

siendo R′ y R los radios de las dos circunferencias.

Análogamente, la relación $\frac{O'A_1}{OA}$ de dos radios paralelos y en sentidos contrarios es constante; luégo las dos circunferencias son tambien homotéticas inversas, estando situado su *centro de homotecia inversa* S_1 en la línea de los centros, entre ellos y de tal modo que se tiene

$$\frac{S_1O'}{S_1O} = -\frac{R'}{R}.$$

La comparación de las dos relaciones precedentes da

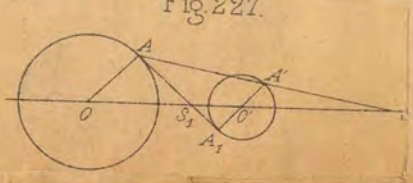
$$\frac{SO'}{SO} : \frac{S_1O'}{S_1O} = -1.$$

Luégo *los dos centros de homotecia dividen armónicamente la línea de los centros* O O′ *de las dos circunferencias.*

Las tangentes comunes exteriores pasan por el centro de homotecia directa, y las interiores por el centro de homotecia inversa. En esta propiedad está fundada la construcción del núm. **252.**

Cuando los dos círculos son tangentes, su punto de contacto es un centro de homotecia: *directa* si el contacto es *interior*, *inversa* si el contacto es *exterior.*

Fig. 227.



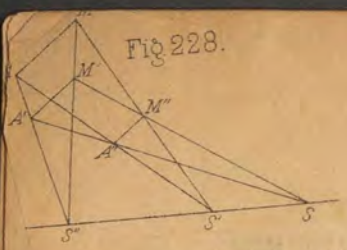


Fig. 228.

TEOREMA.

371. *Dos sistemas* P′ *y* P″ *homotéticos de un tercero* P, *son homotéticos entre sí (figuras 228 y 229).*

Sean A un primer punto del sistema P, y A′ y A″ sus homólogos en los sistemas P′ y P″. Unamos el punto A con uno cualquiera M del sistema P, y unamos respectivamente A′ y A″ con los puntos M′ y M″, homólogos de M en los sistemas P′ y P″. Siendo los sistemas P′ y P homotéticos, las rectas A′M′ y AM serán paralelas y estarán en una relacion K″; del mismo modo las rectas A″M″ y AM serán paralelas, y su relacion será K′, relacion de homotecia de los sistemas P″ y P. Luego las rectas A′M′, y A″M″ serán paralelas y su relación $\frac{K''}{K'}$ será constante. Luégo (**368**) los sistemas P′ y P″ son homotéticos.

Corolarios.

372. Si K″ = K′, la relación de homotecia de los sistemas P′ y P″ es la unidad, y son, por tanto, superponibles. De aquí resulta que, para tener todos los sistemas homotéticos de un sistema dado, no es preciso hacer variar el centro (**362**); basta hacer variar K de cero á infinito, conservando el mismo centro.

373. Si P es homotético directo de cada uno de los sistemas P′ y P″, AM y A′M′ estarán en el mismo sentido, así como AM y A″M″. y tambien, por consiguiente, A′M′ y A″M″; de suerte que P′ y P″ son homotéticos directos *(fig. 228).*

Del mismo modo se vería que si P″ es homotético inverso de cada uno de los sistemas P y P′, éstos son entre sí homotéticos directos *(fig. 229).*

Si P es homotético directo de uno de los sistemas P′ y P″, é inverso del otro, P′ y P″ son entre sí homotéticos inversos *(fig. 229).*

Entre los tres sistemas homotéticos así formados hay, pues, siempre un número impar (1 ó 3), cuya homotecia es directa.

En todos los casos, *los tres centros de homotecia* S, S′, S″ *están en línea recta (figuras 228 y 229).*

En efecto, considerando la recta S′S″ como perteneciente al sistema P, su homóloga en el sistema P′, es ella misma, puesto que (**365**) pasa por el centro S′ de P y P′; tambien es en el sistema P″ homóloga de ella misma, como perteneciente al P, por pasar por el centro S″ de P y P″. Luégo esta recta S′S″ (**365**) habrá de pasar por el centro S de homotecia de P′ y P″.

374. Tres circunferencias consideradas dos á dos, tienen tres cen-

Fig. 229

tros de homotecia directa y tres de homotecia inversa (**370**). Los tres centros de homotecia directa están en línea recta (**373**), y esta recta se llama *eje de homotecia directa*. Del mismo modo dos centros de homotecia inversa y el directo, que corresponde al tercer centro inverso están en línea recta; esta se llama *eje de homotecia inversa*. Hay tres ejes de homotecia inversa.

DEFINICION GENERAL DE LA SEMEJANZA.—MÉTODO DE LAS FIGURAS SEMEJANTES.

375. Para hacer aplicable á las figuras curvilíneas la nocion de la semejanza, hay que tomar como punto de partida una propiedad *esencial* de los polígonos semejantes que sea inmediatamente aplicable á las curvas.

Hé aquí como se hace esta generalizacion:

1.º *Dados dos polígonos semejantes* P *y* P′ *en un plano, se puede siempre llevar el polígono* P′ *á tener sus lados paralelos á sus homólogos de* P.

Sea, en efecto, ABCDE el polígono P. Supongamos que, partiendo un móvil del punto A, recorra el contorno ABCDE siguiendo el orden alfabético. Un observador colocado en el interior del polígono y de pié sobre su plano, verá el movimiento del punto de su izquierda á su derecha, ó viceversa; para fijar las ideas, supongamos que el observador vea el movimiento de izquierda á derecha *(fig. 230)*.

Siendo así, el polígono P′, semejante á P y situado en su plano, puede presentar dos disposiciones distintas, á saber: 1.ª, que un observador colocado en su interior vea tambien de izquierda á derecha el movimiento que, partiendo de A′, recorriese su perímetro en órden alfabético, como A′B′C′D′E′; 2.ª, que el observador, colocado en su interior, vea de derecha á izquierda el movimiento del punto que recorra el perímetro en órden alfabético, como $A_1B_1C_1D_1E_1$.

En el primer caso se ve sin dificultad que dos lados homólogos cualesquiera de los polígonos ABCDE y A′B′C′D′E′ forman siempre el mismo ángulo α; de suerte que, haciendo girar el polígono A′B′C′D′E′ alrededor de A′, la cantidad angular α se llevará este polígono á tener sus lados paralelos y en el mismo sentido que sus homólogos del ABCDE. Una rotacion de $180^\circ - \alpha$ llevaria el polígono A′B′C′D′E′ á tener sus lados paralelos á los homólogos de ABCDE, pero en sentido contrario.

En el segundo caso, tomando el simétrico de $A_1B_1C_1D_1E_1$ con relacion á uñ eje cualquiera XY, es decir, rebatiendo este polígono $A_1B_1C_1D_1E_1$ alrededor de ese eje, se obtendrá un segundo polígono A′B′C′D′E′, que presentará evidentemente, respecto al polígono ABCDE, la misma disposicion que en el primer caso. Un rebatimiento primero, y luégo una rotacion, llevarian, pues, el polígono $A_1B_1C_1D_1E_1$ á tener sus lados respectivamente paralelos á los del ABCDE.

Fig. 230

2.° Se ha visto que dos polígonos semejantes que tienen sus lados paralelos son homotéticos (**369**). Luégo dos polígonos semejantes pueden siempre hacerse homotéticos; y recíprocamente, la figura homotética de un polígono es otro polígono semejante á él (**366**).

Por consiguiente, la condicion necesaria y suficiente para que un polígono sea semejante á otro P, es que el primero sea igual á uno de los homotéticos de P.

Esta es, pues, una propiedad *característica* de los polígonos semejantes. Y siendo la definicion de la homotecia inmediatamente aplicable á las figuras curvilíneas (**362**), se llega á esta definicion general:

Se dice que *una figura es semejante á otra, cuando es igual á una de las figuras homotéticas de esta otra.*

Se comprende, pues, por qué se dan en general los nombres de centros de semejanza, ejes de semejanza y relacion de semejanza á los centros, ejes y relacion de homotecia.

376. Hemos puesto ya de manifiesto con numerosos ejemplos (§ III y siguientes) los recursos que ofrece la teoría de las figuras semejantes. El teorema de Thales sobre la proporcionalidad de los lados homólogos de triángulos equiángulos, y el de Pitágoras sobre el cuadrado de la hipotenusa, son, en Geometría, dos proposiciones fundamentales que se emplean con muchísima frecuencia en las demostraciones; pero además de estas aplicaciones generales de la teoría de la semejanza, ofrece esta teoría un procedimiento especial de resolucion de problemas llamado *método de las figuras semejantes*, que consiste en construir por medio de los datos una figura semejante á la que se busca. Fácilmente se pasa luégo á ésta comparando ciertos elementos de las dos figuras.

Hé aquí dos ejemplos:

1.° *Construir un triángulo* ABC, *conociendo sus tres alturas* α, $\mathfrak{C}$, γ *(fig. 231).*

Siendo a, b, c los lados del triángulo pedido, y BD y AE las alturas $\mathfrak{C}$ y α, los triángulos semejantes CBD, CAE dan

$$\frac{a}{\mathfrak{C}} = \frac{b}{\alpha}.$$

Análogamente se tendría

$$\frac{a}{\gamma} = \frac{c}{\alpha}.$$

Luégo se puede escribir

$$\frac{a}{\mathfrak{C}} = \frac{b}{\alpha} = \frac{c}{\frac{\alpha\mathfrak{C}}{\gamma}}.$$

Fig. 231

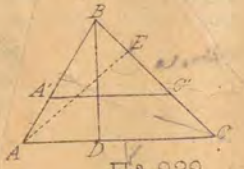
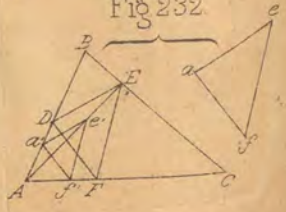


Fig. 232



Si se construye un triángulo A'BC', cuyos tres lados sean

$$BC' = \mathfrak{C},\ C'A' = \alpha,\ A'B = \frac{\alpha\mathfrak{C}}{\gamma},$$

este triángulo será semejante al triángulo ABC, y para tener éste bastará tomar sobre la altura que parte del vértice B una longitud $BD = \mathfrak{C}$ y trazar por el punto D una paralela AC á A'C'.

2.° *Inscribir en un triángulo dado* ABC *otro cuyos lados sean paralelos á los de un triángulo dado* def *(fig. 232).*

Si se traza en el ángulo ABC una paralela $d'f'$ á df, y por los puntos d' y f' paralelas $d'e'$ y $f'e'$ á de y fe, se formará un triángulo $d'e'f'$ homotético del que se busca, y el punto A será para estos triángulos un centro de semejanza directa (**369**). La recta Ae' cortará, pues, á BC en un punto E, que será uno de los vértices del triángulo pedido, y no faltará más que trazar por el punto E paralelas ED y EF á ed y ef, y unir los puntos D y F.

377. Este método se relaciona con otro indirecto en que se opera *por inversion;* es decir, en que se invierte el problema tomando los datos como incógnitas, y recíprocamente; al tratar este nuevo problema se obtiene una figura igual ó semejante á la que se busca, y para tener ésta en su posicion bastará conocer una línea de ella.

Hé aquí un ejemplo de este método indirecto:

Inscribir en un cuadrilátero dado ABCD *otro* a'b'c'd' *semejante á un cuadrilátero dado* A'B'C'D' *(fig. 233).*

El método inverso será aquí evidentemente preferible al directo; porque si se tratase de circunscribir una figura semejante en vez de inscribirla, los arcos capaces descritos sobre los lados del polígono dado ofrecerían desde luego lugares geométricos de los vértices del polígono que se quiera construir.

Invirtamos, pues, la cuestion, y propongámonos circunscribir á un cuadrilátero dado A'B'C'D' otro *abcd* semejante á un cuadrilátero dado ABCD.

Siendo conocidos los ángulos del cuadrilátero *abcd,* sus vértices *a, b, d* habrán de estar situados en los arcos capaces de estos ángulos sobre los lados A'B', B'C', A'D'.

Además, habiendo de ser el cuadrilátero *abcd* semejante al ABCD, el triángulo *abd* habrá de ser tambien semejante al ABD, y se conocen los ángulos *abd* y *adb;* pero como estos ángulos tendrán por medidas, el primero la mitad del arco $B'b'$, y el segundo la mitad del arco $A'd'$, se podrán marcar sobre los arcos B'C' y A'D' los puntos b' y d', con lo cual quedará determinada la recta $b'd'$, y sus puntos de interseccion con los segmentos B'C' y A'D' serán los puntos b y d; el problema inverso

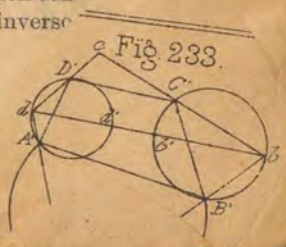


Fig. 233.

queda resuelto con tener ya dos vértices opuestos del cuadrilátero *abcd*.

Para volver al problema directo basta dividir los lados del cuadrilátero ABCD en segmentos proporcionales á los que determinan los puntos A', B', C', D' en los lados del cuadrilátero *abcd*, y unir los puntos de division.

El problema propuesto tiene *ocho* soluciones en el caso general. Se ve, en efecto, que en el problema inverso el ángulo *a* puede apoyarse sobre uno cualquiera de los lados del cuadrilátero A'B'C'D', lo cual da cuatro soluciones. Pero además cada una de estas da orígen á dos distintas, puesto que los ángulos *b* y *d* pueden respectivamente apoyarse sobre los lados B'C' y A'D', ó al contrario, sobre los A'D' y B'C'. Estas dos soluciones quedarian reducidas á una sola si los ángulos *b* y *d* fueran iguales, y tambien lo fueran los lados B'C' y A'D'.

EJES RADICALES.

378. Hemos visto (**199**) que, si por un punto M *(fig. 234)* situado de cualquier modo en el plano de un círculo O se traza una secante arbitraria MAB á este círculo, el producto MA.MB de sus distancias á los puntos de interseccion A y B de la secante con la circunferencia es constante, esto es, independiente de la direccion de esta secante. Este producto constante MA.MB, que es evidentemente positivo cuando el punto M es exterior al círculo, y negativo cuando es interior, recibe, segun Steiner *(Journal de Crelle*, t. 1), el nombre de *potencia del punto* M *con relacion al círculo* O.

Consideremos en particular la secante que pasa por el centro O, y designemos por *d* la distancia MO y por *r* el radio del círculo. Si el punto M es exterior, los dos segmentos MA y MB contados sobre esta secante son del mismo signo; y como sus valores absolutos son $d-r$ y $d+r$, la potencia del punto M tiene por expresion $(d+r)(d-r)=(d^2-r^2)$. Si el punto M es interior, los dos segmentos MA y MB, contados sobre la secante que pasa por el centro, tienen respectivamente por valores absolutos $r-d$ y $r+d$; pero como son de sentidos opuestos, la potencia tiene por expresion $-(r-d)(r+d)=-(r^2-d^2)$; es decir (d^2-r^2), como en el caso de ser el punto exterior. Así, en todos los casos *la potencia de un punto con respecto á un círculo es igual en magnitud y signo al exceso del cuadrado de su distancia al centro sobre el cuadrado del radio.*

Cuando el punto M *es exterior al círculo, su potencia es igual al cuadrado de la tangente* MT *trazada al círculo por dicho punto* (*).

(*) *Si el punto* M *es interior al círculo* O, *su potencia es igual en valor numérico al cuadrado de la mitad de la cuerda perpendicular á* OM *en el punto* M.

Fig. 234.

Si el punto M está sobre la circunferencia, su potencia es evidentemente nula.

379. Hemos demostrado que dos circunferencias ortogonales dividen armónicamente á la recta que pasa por sus centros (**338**). Por consiguiente (**337**), cuando dos círculos *se cortan ortogonalmente, el cuadrado del radio de uno cualquiera de ellos es igual á la potencia de su centro con respecto al otro.*

TEOREMA.

380. *El lugar geométrico de los puntos* M *de igual potencia con respecto á dos círculos* O *y* O′, *es una recta perpendicular á la línea de los centros* OO′.

En efecto, siendo r y r' los radios de los dos círculos, se tiene (**378**)

$$\overline{MO}^2 - r^2 = \overline{MO'}^2 - r'^2;$$

de donde

$$\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = r^2 - r'^2,$$

suponiendo $r > r'$. El lugar pedido es, pues, el lugar geométrico de los puntos, tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á los centros O y O′ es igual á la diferencia de los cuadrados de los radios; es por tanto (**235**), una recta perpendicular á OO′, más próxima al centro O′ del círculo menor que al centro O del mayor, y cuya distancia al punto medio de la línea de los centros OO′ es igual á

$$\frac{r^2 - r'^2}{2.OO'}.$$

Siguiendo á Gaultier (de Tours) [*Journal de l'Ecole Polytechnique* tomo IX], daremos á esta recta el nombre de *eje radical* de los dos círculos.

De la fórmula precedente resulta: 1.° *que el eje radical de dos círculos iguales pasa por el punto medio de la línea de los centros;* 2.°, *que el eje radical de dos círculos concéntricos está en el infinito;* 3.°, *que si dos círculos no tienen ningun punto comun, su eje radical no corta ni á uno ni á otro.*

Cuando dos círculos se cortan, su eje radical es su cuerda comun indefinidamente prolongada; porque cada punto comun á los dos círculos tiene una potencia nula con respecto á cada uno de los círculos (**378**).

Se ve fácilmente que el cuadrado de la distancia del *polo* á su *polar* respecto de un círculo, es igual á la suma de *las potencias* del *polo* y del pié de su distancia á la *polar*.

(N. de los T.)

Si dos círculos se tocan interior ó exteriormente, su eje radical es la tangente en el punto comun.

COROLARIOS.

381. Cuando un punto está fuera de un círculo, su potencia con respecto á este círculo es igual al cuadrado de la tangente que parte de dicho punto (**378**); luégo *el eje radical de dos círculos es el lugar de los puntos desde los cuales se pueden trazar tangentes iguales.* Por consiguiente, *los puntos medios de todas las tangentes que se puedan trazar á los dos círculos están situados en el eje radical,* y de aquí un procedimiento para construir el eje radical de dos círculos exteriores uno á otro.

382. Cuando un círculo M corta ortogonalmente á dos dados O y O', el cuadrado de su radio (**379**) es igual á la potencia de su centro con relacion á cada uno de los dos; luego *el eje radical de dos círculos es el lugar geométrico de los centros de los círculos que cortan ortogonalmente á los dos que se consideran.*

Sea M, M', M'', ... la serie de los círculos que cortan ortogonalmente á los dos lados O y O', y cuyos centros están en el eje radical de los círculos O y O'. Dos cualesquiera M y M' de estos círculos son cortados ortogonalmente por los O y O'; por consiguiente, los centros O y O' están en el eje radical de los círculos M y M'. Luego *los círculos* M, M', M'',..., *que cortan ortogonalmente á dos círculos dados* O *y* O', *tienen por eje radical comun la línea* OO' *de los centros de estos dos círculos.* Si los círculos O y O' no tienen ningun punto comun, uno de los círculos M, M', M'', ... tiene su centro en OO' (**339**), y los dos puntos en que corta á OO' son comunes á todos los círculos M, M', M'', ...

TEOREMA.

383. *Los ejes radicales de tres círculos considerados dos á dos, concurren en un mismo punto.*

En efecto, sean O, O', O'' los centros de los tres círculos, y L, L', L'' los ejes radicales de los círculos O' y O'', O y O'' O y O'. Suponiendo que los tres puntos O, O', O'' no estén en línea recta, se ve que L y L', perpendiculares á dos rectas que se cortan, se cortarán tambien en un punto C, que será de igual potencia con respecto á los círculos O' y O'', y tambien con relacion á los O'' y O. Este punto C tendrá, pues, la misma potencia con respecto á los círculos O y O', y pertenecerá, por consiguiente, al eje radical L''.

El punto C comun á los tres ejes radicales, recibe el nombre de *centro radical* del sistema de los tres círculos O, O', O''.

Cuando los puntos O, O', O'' están en línea recta, los ejes L, L', L'' son paralelos y el punto C está en el infinito.

Fig. 235.

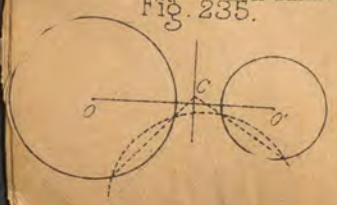


Fig. 236

COROLARIOS.

384. Este teorema permite construir sencillamente el eje radical de dos círculos O y O′ exteriores, ó interior uno á otro. Basta cortarlos por un tercer círculo cualquiera O″. Las cuerdas comunes á los círculos O y O″ y á los O′ y O″ se cortarán en el centro radical C de los tres círculos O, O′, O″; bajando desde este punto C la perpendicular á OO′, se tendrá el eje radical pedido *(figuras 235 y 236)*.

385. Cuando el centro radical de tres círculos es interior á uno de ellos, lo es tambien á los otros dos. Del mismo modo, cuando es exterior á uno de ellos, lo es tambien á los otros dos; éste es entónces el único punto del plano desde el cual se pueden trazar tangentes iguales á los tres círculos, y es tambien el centro del único círculo que puede cortar ortogonalmente á los tres.

386. Si existen en el plano de tres círculos, varios puntos distintos que tengan la misma potencia con respecto á tres círculos, se puede afirmar que estos puntos estarán sobre una misma recta, que es eje radical comun de los tres círculos.

De esta indicacion puede sacarse partido para una nueva demostracion de la propiedad del cuadrilátero completo (**317**).

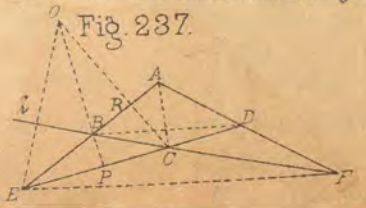
Sea ABCDEF *(fig. 237)* un cuadrilátero completo. Consideremos uno de los triángulos BCE formado por tres lados del cuadrilátero; sean BP, CR, EQ las tres alturas de este triángulo, y O su punto de concurso. Las circunferencias descritas sobre las diagonales BD, AC, EF como diámetros pasan respectivamente por los puntos P, R, Q. Las potencias del punto O con relacion á estos círculos son, pues,

$$OB.OP, \quad OR.OC, \quad OQ.OE,$$

y los cuadriláteros inscriptibles BRCP, BQEP muestran que estas potencias son iguales. El punto O tiene, pues, la misma potencia con respecto á los tres círculos, y en el mismo caso estarian los otros tres puntos análogos O_1, O_2, O_3 relativos á los otros tres triángulos que se pueden formar con los lados del cuadrilátero. En vista de la observacion hecha antes, los tres círculos que hemos considerado tienen un eje radical comun que pasa por los puntos O, O_1, O_2, O_3, estando además los centros de los tres círculos; es decir, los puntos medios de las tres diagonales en una línea recta perpendicular al eje radical comun.

Por esta demostracion se ve que: *los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero completo están en línea recta;* y tambien que: *las circunferencias descritas sobre las tres diagonales como diámetros tienen el mismo eje radical;* y que: *este eje radical es perpendicular á la recta que pasa por los puntos medios de las diagonales, conteniendo dicho eje radical*

Fig. 237.



los puntos de concurso de las alturas de los cuatro triángulos formados por los lados del cuadrilátero combinados tres á tres.

TEOREMA.

387. 1.° *El producto de las distancias de uno cualquiera de los centros de semejanza de dos círculos á dos puntos anti-homólogos es constante;* 2.°, *dos pares de puntos anti-homólogos están en una misma circunferencia;* 3.°, *dos cuerdas anti-homólogas se cortan en un punto del eje radical.*

Sean dos círculos O y O′ *(fig. 238);* uno de sus centros de semejanza, por ejemplo el de semejanza externa, S. Una secante SM que parte del punto S corta á los círculos O y O′ en cuatro puntos M, N, M′, N′. Los puntos M y M′ son homólogos con relacion al centro S, porque los radios correspondientes OM, O′M′, son paralelos; del mismo modo N y N′ son homólogos.

Los puntos M y N′ se llaman *anti-homólogos*, lo mismo que los puntos N y M′. Una cuerda cualquiera Mn del primer círculo y la cuerda N′m' del segundo que une los puntos anti-homólogos de los extremos de la primera, reciben el nombre de cuerdas *anti-homólogas*. Establecidas estas definiciones, hé aquí la demostracion del teorema enunciado:

1.° Designando por r y r' los radios de los dos círculos, y por p la potencia del punto S con respecto al círculo O, se tiene

$$SM \cdot SN = p \qquad y \frac{SM}{SM'} = \frac{r}{r'}.$$

Dividiendo la primera igualdad por la segunda, se obtiene

$$SN \cdot SM' = p\frac{r'}{r};$$

y análogamente se obtendria

$$SM \cdot SN' = p\frac{r'}{r}.$$

2.° Segun esto, si Sm es otra secante que parte del punto S, se tendrá

$$SM \cdot SN' = Sn \cdot Sm';$$

luego (**200**) los puntos M y N′, n y m' están en una misma circunferencia O″.

3.° Finalmente, siendo la cuerda Mn el eje radical de los círculos O y O′, y la cuerda N′m' el eje radical de los círculos O′ y O″, el punto C de interseccion de las dos cuerdas es el centro radical (**383**) de los tres círculos O, O′, O″; es decir, un punto del eje radical de los círculos O y O′. Esta última propiedad, aplicada al caso límite, prueba tambien que *las tangentes en dos puntos anti-homólogos de dos circunferencias se cortan en un punto del eje radical.*

ESCOLIO.

388. *El eje radical de dos círculos está equidistante de las polares con respecto á ellos de uno cualquiera de los centros de semejanza.*

Este teorema es evidente cuando se puede trazar por el centro de semejanza que se considera una tangente comun á los dos círculos; porque el eje radical, que es paralelo á las dos polares, pasa por el punto medio de la tangente comun, cuyos puntos de contacto están en las dos polares.

En todos los casos la proposicion resultaria fácilmente de las fórmulas que dan las posiciones del centro de semejanza, de las polares y del eje radical (**370, 347, 380**).

Dejamos al lector este cálculo, que no ofrece dificultad.

CÍRCULO TANGENTE Á TRES CÍRCULOS DADOS.

389. Designemos por A, B, C los centros de los tres círculos á los cuales se quiere trazar un círculo tangente.

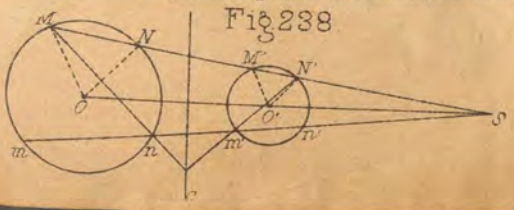
Se puede tener: 1.° Un círculo ω que envuelva á A, B, C, y otro ω' envuelto por ellos. 2.° Un círculo α que sea tangente exteriormente al círculo A é interiormente á los B y C, y otro A′ que lo sea interiormente al A y exteriormente á los B y C. 3.° Un círculo β tangente exterior á B é interior á los otros dos A y C, y otro β' tangente interior á B y exterior á A y C. 4.° y último. Un círculo γ tangente exterior á C é interior á A y B, y otro γ' tangente interior á C y exterior á A y B. Así pueden existir en el caso general *ocho* soluciones en *cuatro* grupos de dos, como acabamos de indicar

Pues bien, tratemos de determinar las dos circunferencias de un mismo grupo, ω y ω' por ejemplo *(fig. 239)*.

Supongamos resuelto el problema: sean a y a' los puntos de contacto de los círculos ω y ω' con A; b y b' sus puntos de contacto con B; c y c' sus puntos de contacto con C. El problema queda reducido evidentemente á hallar las cuerdas aa', bb', cc'. Pero estas cuerdas están determinadas por las dos propiedades siguientes:

1.ª *Cada una de las cuerdas* a a′, b b′, c c′ *pasa por el centro radical de las tres circunferencias dadas* A, B, C. En efecto, siendo a el centro de semejanza directa de los círculos ω y A, y a' el centro de semejanza inversa de los círculos ω' y A, la cuerda aa' debe pasar por el centro S de semejanza inversa de los círculos ω y ω' (**374**). Del mismo modo se veria que este punto S pertenece tambien á las rectas bb' y cc'. Por un razonamiento análogo se demuestra que ab y $a'b'$ concurren en el centro C′ de semejanza directa de los círculos A y B; luego las cuerdas aa' y bb' de los círculos A y B son anti-homólogas (**387**), y su punto de interseccion S pertenece al eje radical de los círculos A y B. Del mismo modo se veria que este punto de concurso S de aa', bb', cc' pertenece al

Fig. 238



eje radical de los círculos B y C; es, pues el centro radical de los tres círculos A, B, C.

2.° *Cada una de las cuerdas* aa′, bb′, cc′, *pasa por el polo relativo á su círculo del eje* A′B′C′ *de semejanza directa de las tres circunferencias dadas* A, B, C. En efecto, pues que S es un centro de semejanza de los círculos ω y ω′, las dos cuerdas *ab*, *a′b′* son anti-homólogas y su punto de encuentro C′ debe estar situado en el eje radical de los dos círculos ω y ω′. Se veria del mismo modo que este eje radical pasa por el centro A′ de semejanza directa de los círculos B y C, y por el centro B′ de semejanza directa de los A y C. Luégo el eje radical de los círculos ω y ω′ coincide con el eje A′B′C′ de semejanza directa de los tres círculos A, B, C. Segun esto, la recta A′B′C′ debe contener á la interseccion A, de las dos tangentes anti-homólogas aA_1 y $a'A_1$ (**387**, 3.°); es decir, al polo de la cuerda *aa′* con relacion al círculo A; luégo, recíprocamente (**349**), la cuerda *aa′* debe contener al polo *p* de la recta A′B′C′ con respecto al círculo A.

De aquí la siguiente regla: *Determínense el centro radical* S *y el eje de semejanza directa de los tres círculos dados* A, B, C; *tómense, con relacion á cada uno de ellos, los polos* p, q, r *de este eje, y trácense las rectas* Sp, Sq, Sr, *que cortarán respectivamente á los círculos* A, B, C *en los puntos de contacto* a *y* a′, b *y* b′, c *y* c′. *Sólo faltará hacer pasar luego una circunferencia* ω *por los tres puntos* a, b, c, *y otra* ω′ *por los puntos* a′, b′, c′.

Reemplazando el eje de semejanza directa por cada uno de los otros tres ejes de semejanza, y operando de un modo análogo, se obtendrian los otros tres pares de círculos tangentes.

Esta elegante solucion, debida á M. Gergonne (*Anales de Matemáticas*, t. IV), es notable por su sencillez, y sobre todo por la facilidad con que se aplica á los casos particulares que se obtienen de suponer que uno ó varios de los círculos A, B, C se reducen á puntos ó á rectas.

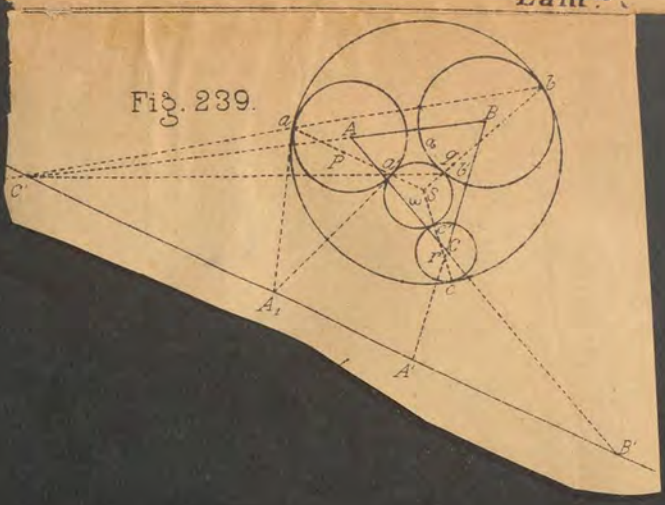
CASOS PARTICULARES DEL PROBLEMA PRECEDENTE.

390. Para poder aplicar la solucion que precede á los casos particulares que admite el enunciado del problema, es preciso saber en qué se convierten los elementos que hemos designado con los nombres de polo, polar, eje radical y centro de semejanza cuando uno ó varios de los círculos de una figura se reducen á puntos ó á rectas porque sus radios se hacen nulos ó infinitos. El conocimiento de estos resultados, que vamos á exponer muy rápidamente, es además indispensable para la discusion de muchos problemas.

1.° *La polar* L *de un punto* P *con relacion á un punto* O *(círculo de radio nulo), es la perpendicular á* OP *levantada en* O.

2.° *El polo* P *de una recta* L *con relacion á un punto* O, *es el mismo punto* O.

Lám.ª



Estos dos principios provienen de que el producto de las distancias del punto O al polo P y á la polar L debe ser cero (**347**).

3.° *La polar* L *de un punto* P *con relacion á una recta* ω *(círculo de radio infinito), es la paralela á* ω *trazada por el punto simétrico de* P *con relacion á la recta* ω.

Porque el círculo degenera realmente en dos rectas paralelas, que son la recta ω y otra en el infinito. Pero si se traza por P una secante cualquiera que corte en *o* y en *l* á las rectas ω y L, el sistema P, *o*, *l*, ∞, será armónico, lo cual exige que el punto *o* sea el punto medio de *l*P; luego la polar L es el lugar de los puntos obtenidos, prolongando las secantes trazadas desde P á ω en longitudes iguales á sí mismas.

4.° *El polo* P *de una recta* L *con relacion á una recta* ω, *es el punto en el infinito sobre* ω.

Porque las polares de todos los puntos de L son (3.°) paralelas á ω; su punto de concurso, es decir, el polo de L, está, pues, en el infinito sobre ω (*).

5.° *Los centros de semejanza* O *y* O′ *de un círculo* C *y de un punto* C′, *se confunden con el mismo punto* C′.

Esto resulta de las fórmulas del núm. **252**, en las cuales se hace R′ = 0; así, se encuentra

$$CO = CO' = CC'.$$

6.° *Los centros de semejanza* O *y* O′ *de dos puntos* C *y* C′ *no tienen posiciones determinadas sino cuando se da la ley, segun la cual los radios* R *y* R′ *de los dos círculos correspondientes tienden hácia cero.* Por ejemplo, si cuando R y R′ tienden hácia cero, la relacion de R′ á R es igual á un número dado *m*, las fórmulas del núm. **252** dan

$$CO = \frac{CC'}{1 - m} \qquad \text{y} \qquad CO' = \frac{CC'}{1 + m}.$$

7.° *Los centros de semejanza de un círculo y de una recta, son las extremidades del diámetro perpendicular á la recta.*

En efecto, supongamos que en la *fig. 176* el punto de interseccion de la izquierda E′ de la circunferencia C′ con CC′ permanezca fijo, y que el centro C′ de esta circunferencia se aleje indefinidamente en la direccion CC′, de modo que esta circunferencia se convierta en la perpendicular levantada á CE′ por E′. Las fórmulas

---

(*) Este polo P *no tiene posicion determinada* cuando la recta L es paralela á la reta ω, puesto que son polos de L con relacion á ω *todos* los puntos de la recta simétrica de C con respecto á ω.

(Nota de los T.)

$$CO = \frac{CE' + R'}{R - R'} R \quad y \quad CO' = \frac{CE' + R'}{R + R'} R$$

darán, para $R' = \infty$

$$CO = -R \quad y \quad CO' = R.$$

El centro externo de semejanza está, pues, en la extremidad de la izquierda del diámetro del círculo C, perpendicular á la recta dada, y el centro interno de semejanza está en la extremidad de la derecha de este diámetro.

8.° *Los centros de semejanza de un punto y una recta, se confunden con el punto.*

Porque si en las fórmulas últimas se hace $R = 0$ al mismo tiempo que $R' = \infty$, se tiene

$$CO = 0 \quad y \quad CO' = 0.$$

9.° *Los centros de semejanza de dos rectas* D *y* D' *son los puntos en el infinito situados sobre las bisectrices del ángulo de las dos rectas y de su suplemento.*

Esto resulta de la siguiente propiedad que caracteriza á los centros de semejanza de dos círculos: *Toda recta trazada por un centro de semejanza, corta á los dos círculos bajo un mismo ángulo* (*).

10.° *El eje radical de un círculo y un punto está equidistante de este punto y de su polar con respecto al círculo.*

Esto resulta del núm. **388** y de las observaciones precedentes (1.° y 5.°)

11.° *El eje radical de dos puntos es la perpendicular levantada en el punto medio á la recta que los une.*

12.° *El eje radical de un círculo y una recta, es esta misma recta.*

Esto es una consecuencia inmediata del núm. **388** y de las observaciones precedentes (3.° y 7.°)

13.° *El eje radical de un punto y una recta es esta misma recta.*

14.° *El eje radical de dos rectas es indeterminado.*

391. El problema del círculo tangente á tres círculos dados admite *diez* casos, comprendiendo entre ellos el caso general. Si se representa un círculo por C, una recta por D y un punto por P, se pueden indicar estos diez problemas por los símbolos PPP, PPD, PPC, PDD, PDC, PCC, DDD, DDC, DCC, CCC.

Los cuatro casos PPP, PPD, PDD, DDD, en los cuales no figura

(*) Si las dos rectas D y D' son paralelas, son *absolutamente indeterminados* de posicion sus centros de semejanza.

(Nota de los T.)

entre los datos ningun círculo, no se resuelven por el método general; pero su resolucion directa no ofrece dificultad, como lo hemos visto para tres de ellos en los números **165, 172** y **262.** Los demás casos se deducen fácilmente de la solucion general por medio de los resultados indicados en el número precedente. Nos limitaremos á las indicaciones siguientes:

DCC.—Hay 6 centros de semejanza: por consiguiente, 4 ejes de semejanza y 8 soluciones.

DDC.—Hay tambien 4 ejes de semejanza, y por consiguiente, 8 soluciones.

PCC.—No hay más que 2 ejes de semejanza, y por consiguiente, 4 soluciones.

PDC.—No hay más que 2 ejes de semejanza y 4 soluciones.

PPC.—No hay más que un eje de semejanza, y por consiguiente, 2 soluciones.—Además, este problema ha sido tratado directamente en el núm. **262.**

FIGURAS INVERSAS.

392. Dados en un plano un sistema cualquiera de puntos A, B, C, ... aislados ó formando líneas continuas; si sobre los radios vectores SA, SB, SC, ... que parten de un punto cualquiera S del plano se toman, á partir de este punto S, segmentos SA', SB', SC', ... tales que

$$SA.SA' = SB.SB' = SC.SC' = \ldots = \mu,$$

siendo μ una cantidad constante positiva ó negativa, se dice que el sistema A'B'C', ..., es *inverso* del sistema ABC, ... El punto fijo S toma el nombre de *orígen*, y la constante μ se llama *potencia*. Si esta potencia es positiva, los radios vectores correspondientes SA y SA' son del mismo sentido, y los puntos correspondientes A y A' están situados á un mismo lado con respecto al orígen S; si μ es negativo, los radios vectores SA y SA' son de sentidos contrarios, y los puntos correspondientes A y A' están situados á uno y otro lado del orígen S.

TEOREMA.

393. *Dos figuras* F' *y* F'', *inversas de una misma figura* F *con relacion á un mismo orígen* S, *y que corresponden á valores diferentes* μ' *y* μ'' *de la constante* μ, *son homotéticas* (su centro de semejanza es el punto S y su relacion de semejanza es igual á $\frac{\mu'}{\mu''}$).

En efecto, si se designa por M un punto cualquiera de la figura primitiva F, y por M' y M'' sus correspondientes en las figuras F' y F'', los cuales están situados sobre la recta indefinida SM, se tiene

BIBLIOTECA DEL CONGRESO

$$SM.SM' = \mu', \; SM.SM'' = \mu'';$$

de donde

$$\frac{SM'}{SM''} = \frac{\mu'}{\mu''}.$$

TEOREMA.

394. *Siendo* M *y* N *dos puntos cualesquiera de una figura, y* M′ *y* N′ *los correspondientes de sus inversas con respecto á un orígen* S *y á una potencia* μ, *la distancia* M′N′ *será igual al producto de la distancia* MN *por la relacion de la potencia* μ *al producto* SM.SN *de los dos radios vectores de la figura primitiva.*

En efecto, la relacion *(fig. 240)*

$$SM.SM' = SN.SN' = \mu$$

prueba que *las rectas* MN, M′N′ *son antiparalelas con relacion al ángulo* MSN, y por consiguiente, que los triángulos SMN, S′M′N′ son semejantes. Se tiene pues,

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{SN'}{SM} = \frac{\mu}{SM.SN};$$

de donde

$$M'N' = \frac{MN}{SM.SN}.\mu.$$

TEOREMA.

395. *El ángulo de dos líneas cualesquiera que se cortan, es igual al ángulo de sus dos líneas inversas.*

Consideremos primeramente una sola línea cualquiera MN *(fig. 240)* y su inversa M′N′; es fácil ver que los ángulos TMM′ y TM′M, que forman sus tangentes MT y M′T con el radio vector SMM′, son iguales; porque si se considera un radio vector siguiente SNN′, las cuerdas MN y M′N′ son antiparalelas con relacion al ángulo MSN, como lo hemos hecho observar ántes; luego los ángulos SM′N′ y SNM son iguales; pero en el límite, el primero es el ángulo SM′T y el segundo se convierte en el SMT_1, opuesto por el vértice del TMM′; luégo $MM'T = TMM'$. Para evitar ambigüedades en la manera de considerar los ángulos, nótese que las dos tangentes correspondientes forman los dos lados de un triángulo isósceles TMM′, cuya base es la porcion MM′ del radio vector comprendido entre los dos puntos de contacto.

Consideremos ahora dos curvas MA y M*a* *(fig. 241)* que se cortan en M, y sus inversas M′A′ y M′*a*′; hay que probar que el ángulo de las dos primeras, esto es, el ángulo *t*MT de sus tangentes es igual al ángulo *t*M′T de las otras dos. Pero, segun lo dicho primeramente, se tiene

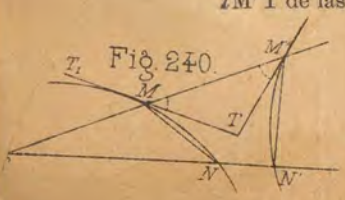


Fig. 240.

Fig. 242.

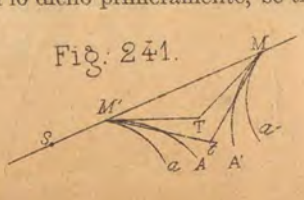


Fig. 241.

$$tMM' = tM'M,\ TMM' = TM'M,$$

y restando

$$tMM' - TMM' \text{ ó } tMT = tM'M - TM'M \text{ ó } tM'T.$$

Esta propiedad de conservar los ángulos, da mucha importancia á este modo de transformacion: lleva consigo la semejanza de los triángulos infinitamente pequeños correspondientes; de suerte que dos figuras inversas una de otra son dos figuras semejantes, cuya relacion de semejanza *varía* de un lugar á otro.

Los tres teoremas precedentes son generales, es decir, relativos á figuras cualesquiera; los tres siguientes son particulares, y solo se refiere á la recta y al círculo.

TEOREMA.

396. *La figura inversa de una línea recta, es una circunferencia que pasa por el orígen.*

Dejemos á un lado el caso de que la recta dada pasa por el orígen. En tal caso, la recta es evidentemente la inversa de sí misma.

Sea, pues, una recta AB *(figuras 242 y 243)* que no pasa por el orígen S. Tracemos desde el punto S la SP perpendicular á AB, y la oblícua cualquiera SM, y tomemos respectivamente sobre ellas los puntos P' y M', inversos de P y M. Las rectas MP y M'P' son antiparalelas (**394**), y, por consiguiente, el ángulo SM'P' debe ser recto como el SPM. El lugar geométrico de los puntos M' será, pues, la circunferencia descrita sobre SP', como diámetro.

Recíprocamente, *la figura inversa de una circunferencia que pasa por el orígen, es una recta perpendicular al diámetro que pasa por dicho orígen.*

Sean, en efecto *(figuras 242 y 243)*, P el punto inverso del extremo P' del diámetro SP', y M el inverso de un punto cualquiera M' de la circunferencia. Las rectas MP y M'P' son antiparalelas, y, por tanto, el ángulo SPM debe ser recto como su igual SM'P'. El lugar de los puntos M es, pues, la perpendicular levantada en P á SP'.

Escolio.

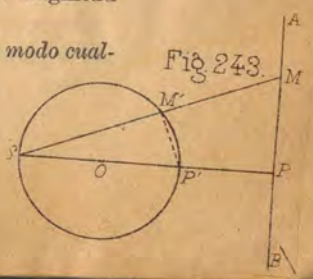
397. Las distancios SP y SO del orígen á la recta y al centro del círculo, están ligadas por la fórmula

$$2SO.SP = \mu,$$

en la cual μ es la potencia dada. Esta relacion tiene lugar en magnitud y signo.

Aquí se ve que *una recta* AB *y un círculo* O, *situados de un modo cual-*

Fig. 243.



quiera en un plano (figuras 242 y 243), pueden siempre ser considerados como figuras inversas una de otra. Basta adoptar como orígen una de las extremidades del diámetro perpendicular á la recta, es decir (**390**), uno de los centros de semejanza del sistema formado por la recta y el círculo, y por potencia μ el valor en magnitud y signo del doble producto de las distancias del orígen á la recta y al centro del círculo.

TEOREMA.

398. *La figura inversa de una circunferencia cuando el orígen es interior ó exterior á ella, es una circunferencia.*

Sean S y μ el orígen y la potencia dados, y p la potencia del orígen S con relacion al círculo propuesto O *(fig. 244)*.

La figura inversa del círculo O con relacion al orígen S y á la potencia p es evidentemente el círculo mismo O, puesto que, siendo

$$SM.SN = p,$$

todo punto M de esta circunferencia tiene por inverso el punto N, en que el radio vector correspondiente corta otra vez á la circunferencia.

Por consiguiente (**393**), la figura inversa del círculo O con relacion al orígen S y á la potencia μ es tambien un círculo, puesto que tal figura debe ser homotética á la inversa, que hemos dicho que es el mismo círculo O, siendo S el centro de semejanza y $\frac{\mu}{p}$ la relacion de semejanza.

Escolios.

399. Siendo O y R el centro y el radio del círculo dado, O′ y R′ el centro y el radio de su inverso, se tendrá, pues,

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{\mu}{p} = \pm \frac{R'}{R}.$$

El signo + se refiere al caso en que, siendo μ y p del mismo signo, la homotecia es directa, y el signo — al caso en que, siendo μ y p de signos contrarios, es la homotecia inversa.

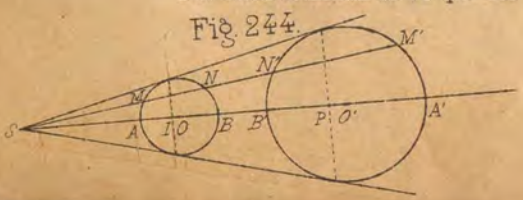
Por lo demás, si p' es la potencia del orígen S con relacion al círculo O, se tiene, segun las relaciones precedentes,

$$\frac{SO'^2 - R'^2}{SO^2 - R'^2} \text{ ó } \frac{p'}{p} = \frac{\mu^2}{p^2};$$

de donde

$$\mu^2 = pp'.$$

Por estas fórmulas se ve que *dos círculos* O *y* O′, *situados de un modo*



cualquiera en un plano, pueden siempre ser miradas como inversos uno de otro. Basta tomar por orígen S uno cualquiera de los dos centros de semejanza, y por potencia la media geométrica entre las potencias p y p' del punto S con relacion á los dos círculos, dando á esta media el signo de p ó el contrario, segun que sea S un centro de semejanza externo ó interno.

Se hubieran podido deducir todos estos resultados del núm. **387.** Los puntos inversos uno de otro son los que hemos llamado *anti-homólogos.* Se puede, pues, decir que *las tangentes en los puntos correspondientes de dos círculos inversos se cortan en un punto del eje radical de los dos círculos.*

400. Los centros O y O′ de dos círculos inversos, no son puntos correspondientes. ¿Cuáles son, pues, los inversos de estos centros?

Para averiguarlo, designemos por I′ *(fig. 244)* el punto inverso del centro O, y por A, B, A′, B′ los puntos en que la línea de los centros SOO′ corta á los dos círculos.

Tendremos:

$$SO.SI' = \mu;$$

de donde

$$\frac{1}{SI'} = \frac{SO}{\mu} = \frac{p.SO'}{\mu^2} = \frac{SO'}{p'} = \frac{{}^1/_2\,(SA' + SB')}{SA'.SB'};$$

es decir,

$$\frac{2}{SI'} = \frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'}.$$

El punto I′ es, pues (**340**), el conjugado armónico de S con relacion al diámetro del círculo O′. Así, *el inverso del centro de uno cualquiera de los dos círculos es el pié de la polar del orígen con relacion al otro círculo.*

Aquí se ve que, *para que dos círculos tengan por inversos dos círculos concéntricos, es necesario y suficiente que el orígen tenga la misma polar con relacion á estos dos círculos.*

TEOREMA.

401. *Si se consideran dos círculos cualesquiera y sus inversos, designando por* d, r, r′ *la distancia de los centros y los radios de los dos primeros círculos, y por* δ, ρ, ρ' *los elementos análogos para los otros dos círculos, se tiene*

$$(1) \qquad \frac{d^2 - r^2 - r'^2}{rr'} = \pm \frac{\delta^2 - \rho^2 - \rho'^2}{\rho\rho'}.$$

Hay que tomar el signo + ó el signo — segun que las potencias del

orígen, con relacion á los dos círculos primitivos, son del mismo signo ó de signos contrarios.

Sean, en efecto, S el orígen, O y O′ los centros de los primeros círculos, ω y ω′ los centros de sus inversos, A y α las proyecciones de O y de ω sobre la recta SO′ ω′ *(fig. 245)*. Designemos por μ la constante de inversion, y por p, p', ν y ν' las potencias del orígen S con relacion á los círculos O, O′, ω y ω′.

El triángulo SOO′ da

$$d^2 = \overline{SO}^2 + \overline{SO'}^2 - 2SA.SO',$$

ó (**378**)

$$d^2 - r^2 - r'^2 = p + p' - 2SA.SO';$$

y análogamente, se tendria

$$\delta^2 - \rho^2 - \rho'^2 = \nu + \nu' - 2S\alpha.S\omega'.$$

Por otra parte (**398, 399**),

$$\mu^2 = p\nu = p'\nu',$$

$$\frac{S\omega'}{SO'} = \frac{\mu}{p'}, \quad \frac{S\alpha}{SA} = \frac{S\omega}{SO} = \frac{\mu}{p}.$$

Por consiguiente,

$$\delta^2 - \rho^2 - \rho'^2 = \frac{\mu^2}{p} + \frac{\mu^2}{p'} - 2\frac{\mu^2}{pp'}SA.SO' = \frac{\mu^2}{pp'}(p + p' - 2SA.SO')$$

es decir,

$$\delta^2 - \rho^2 - \rho'^2 = \frac{\mu^2}{pp'}(d^2 - r - r').$$

Pero esta relacion es la misma (1), puesto que se tiene (**399**)

$$\frac{\mu}{p} = \pm\frac{\rho}{r}, \quad \frac{\mu}{p'} = \pm\frac{\rho'}{r'};$$

de donde

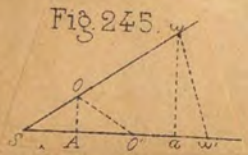
$$\frac{\mu^2}{pp'} = \pm\frac{\rho\rho'}{rr'},$$

correspondiendo el signo + al caso en que p y p' son del mismo signo y el — al caso en que p y p' son de signos contrarios.

Escolio.

402. Supongamos que se toma por orígen un punto cuyas potencias con relacion á los dos círculos primitivos sean del mismo signo; es de-

Fig. 245.



cir, un punto que sea á la vez exterior ó interior á los dos círculos. Entónces el signo + será el que convenga, y si se aumentan ó disminuyen dos unidades á los dos miembros de la relacion (1), se tendrá

$$\frac{d^2-(r-r')^2}{rr'}=\frac{\delta^2-(\rho-\rho')^2}{\rho\rho'} \text{ y } \frac{d^2-(r+r')^2}{rr'}=\frac{\delta^2-(\rho+\rho')^2}{\rho\rho'}.$$

La expresion $d^2-(r-r')^2$ representa el cuadro de la longitud de la tangente comun exterior á los dos círculos O y O'. Es cierto que esta tangente comun no existe ya cuando los dos círculos son interior uno á otro; pero siempre es permitido para la comodidad del lenguaje llamar *longitud de la tangente comun exterior* á la raíz cuadrada del valor absoluto de $d^2-(r-r')^2$. Si del mismo modo se llama *longitud de la tangente comun interior* á la raíz cuadrada del valor absoluto de $d^2-(r+r')^2$, se podrá enunciar este teorema:

Si se consideran dos círculos cualesquiera y sus inversos, la relacion de la tangente comun á la media geométrica de los radios es la misma para los dos pares.

Se sobreentiende que el orígen es á la vez interior ó exterior á los dos círculos primitivos, y que se deben tomar entónces tangentes comunes *de la misma especie* en uno y otro par.

Del mismo modo se veria que si el orígen es interior á uno de los círculos primitivos y exterior al otro, el teorema subsiste á condicion de tomar tangentes comunes *de especies diferentes* en uno y otro par.

MÉTODO DE TRANSFORMACION POR RADIOS VECTORES RECÍPROCOS.

403. La figura inversa de una figura dada, recibe tambien el nombre de *transformada por radios vectores recíprocos*. Este modo de transformacion es uno de los más poderosos medios de investigacion en el estado actual de la Geometría, construyendo la figura inversa de la que corresponde á un teorema conocido, se obtienen proposiciones nuevas, que son más ó ménos interesantes, segun la eleccion que se hace del orígen y la naturaleza de la figura primitiva.

Hé aquí algunos ejemplos:

1.° En todo triángulo rectilíneo, la suma de los ángulos es igual á dos rectos. Formando la figura inversa (**392**) se obtiene un triángulo formado por tres arcos de círculo, que se cortan todos en el orígen; y como la transformacion no altera los ángulos, se tiene este teorema: *La suma de los ángulos de un triángulo curvilíneo, cuyos lados son arcos de círculo que se cortan en un mismo punto, es igual á dos rectos.*

Se tendría un teorema análogo transformando la proposicion relativa (**85**) á la suma de los ángulos de un polígono.

2.° Es evidente que si en un ángulo fijo se inscriben pares de círculos tangentes entre sí, el lugar geométrico de sus puntos de contacto es la bisectriz del ángulo. Formando la figura inversa, se deduce, que, *si en el espacio comprendido entre dos círculos que se cortan se inscriben pares de circunferencias tangentes entre sí, el lugar geométrico de sus puntos de contacto es otra circunferencia.*

404. Si se quiere demostrar directamente un teorema enunciado en vez de buscar nuevas proposiciones partiendo de un teorema cuya demostracion conocemos, se construye la figura inversa de la que corresponde al teorema propuesto, eligiendo el orígen de modo que la nueva figura sea más sencilla que la primera, y que la propiedad correspondiente se vea inmediatamente, ó al ménos sea de más fácil demostracion que la del teorema propuesto.

Por ejemplo, se quiere demostrar que *las circunferencias que pasan por un punto fijo* S *y que cortan á otra dada* O, *formando con ésta un ángulo* α, *son todas tangentes á una misma circunferencia.*

Sea C una de las circunferencias que pasan por S y que cortan á la O con la inclinacion α. Determinemos la figura inversa, tomando por orígen el punto S y por potencia la potencia de S con relacion al círculo O. Este coincidirá con su inverso, y la circunferencia C dará lugar á una recta que cortará la circunferencia O bajo el ángulo α. Pero todas las rectas que cortan á una circunferencia O bajo un ángulo dado α envuelven evidentemente á otra circunferencia a, que tiene el mismo centro ω que la O. Luego en la figura primitiva todas las circunferencias C son tangentes á una misma circunferencia A, que es la inversa de a.

Veamos cómo puede construirse este círculo A *(fig. 246)*. El punto S tiene la misma polar L, con relacion á los dos círculos A y O, puesto que estos dos círculos tienen por inversos dos concéntricos y se puede construir esta polar, puesto que son dados el punto S y el círculo O. Por otra parte, el centro desconocido I del círculo A está sobre Sω. Finalmente, el círculo A debe ser tangente á la recta SC trazada desde el punto S y que corta al círculo O bajo el ángulo α. Basta, pues, tomar la interseccion G de las rectas L y SG, y levantar por el punto G la perpendicular GI á SG. El punto I, en que esta perpendicular corta á Sω es el centro del círculo pedido A, cuyo radio es IG.

Nótese que si el ángulo α fuese recto, el círculo A se reduciria al punto P, pié de la polar L.

Del teorema precedente resulta la solucion de este problema:

Trazar por un punto dado S *una circunferencia que corte respectivamente á dos dadas* O *y* O′ *bajo ángulos conocidos* α *y* α'.

Toda circunferencia que pase por S y corte á la O bajo el ángulo α, es tangente á un cierto círculo A, que sabemos construir; del mismo

Fig. 246.

modo, toda circunferencia que pase por S y corte á la O' bajo el ángulo α', toca á un cierto círculo A', que sabemos construir. Se tendrá, pues, la circunferencia pedida trazando por S una que sea tangente á las A y A' (**391**). El problema admite, pues, cuatro soluciones.

405. Los ejemplos que preceden se refieren á propiedades descriptivas ó á propiedades métricas angulares. Igualmente se presta el método á la transformacion de las propiedades métricas de segmentos. Se emplea para ello la fórmula del núm. **394**, en la cual se puede hacer $\mu = 1$. Por consiguiente, para transformar una relacion entre diversos segmentos, AB, BC,..., de la figura primitiva, basta reemplazar cada distancia tal como AB por $\frac{AB}{SA.SB}$, siendo S el punto tomado por orígen.

Hé aquí un ejemplo:

Dada una serie de puntos que se suceden en el órden A, B, C,..., H, K, sobre una recta, se tiene evidentemente

$$AK = AB + BC + \ldots + HK.$$

La figura inversa nos presentará una serie de puntos que se suceden con el órden S, A, B, C,..., H, K, sobre una circunferencia que pasa por el orígen S, y entre las distancias de estos puntos se tiene la relacion

$$\frac{AK}{SA.SK} = \frac{AB}{SA.SB} + \frac{BC}{SB.SC} + \ldots + \frac{HK}{SH.SK}.$$

Si los puntos no son más que tres A, B, C, se tiene

$$\frac{AC}{SA.SC} = \frac{AB}{SA.SB} + \frac{BC}{SB.SC}$$

ó

$$AC.SB = AB.SC + BC.SA,$$

y venimos á parar al teorema de Ptolomeo (**240**) relativo al producto de las diagonales del cuadrilátero inscrito.

El método de transformacion por radios vectores recíprocos, propuesto por Mr. Stubbs *(Philosophical Magazine,* 1843), y aplicado más tarde por Mr. William Thomson con el nombre de *principio de las imágenes*, ha sido objeto de una Memoria de M. Liouville, que ha dado acerca de él una teoría analítica completa *(Journal de Mathématiques,* 1.ª série, tomo XII).

CÍRCULO DE LOS NUEVE PUNTOS.

406. *Si en el plano de un triángulo cualquiera* ABC *(fig. [illegible]) se des-*

cribe el círculo M *que tenga por radio la mitad del radio del círculo circunscrito, y por centro el punto medio* M *de la recta que une el centro* O *del círculo circunscrito con el punto de concurso* H *de las alturas, esta circunferencia* M *pasará por los puntos medios* a, b, c, *de los lados, por los piés* α, β, γ *de las alturas, y por los puntos* p, q, r, *medios de las distancias del punto de concurso* H *de las alturas á los tres vértices* A, B, C.

(EULER)

En efecto:

1.° La recta Mp que une los puntos medios M y p de los lados HO y HA del triángulo OHA, es paralela á la base OA é igual á la mitad de esta base; es decir, á la mitad del radio del círculo circunscrito. El círculo (M) pasa, pues, por p, y análogamente se veria que pasa por q y por r.

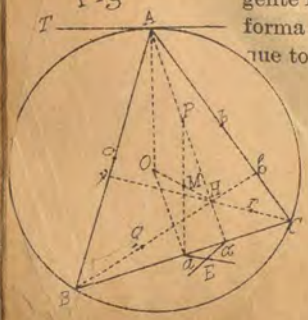
2.° Se ha visto (**117**) que las alturas del triángulo ABC eran las perpendiculares levantadas en sus puntos medios á los lados de otro triángulo A'B'C' que se obtiene trazando por cada uno de los vértices del primero la paralela al lado opuesto. Siendo semejantes los triángulos A'B'C' y ABC, y siendo de 2 á 1 su relacion de semejanza, si se considera la recta AH ligada al triángulo A'B'C' será doble de la recta Oa, que es su homóloga en el triángulo ABC. Las rectas Oa y Ap son, pues, iguales, y como son paralelas, pa será tambien igual y paralela á OA. Por consiguiente, pa es la misma recta que pM prolongada en una longitud Ma igual á pM, y la circunferencia (M) pasa por a. Análogamente se veria que pasa por b y c.

3.° Finalmente, puesto que pa es un diámetro del círculo (M) y el ángulo $p\alpha a$ es recto, la circunferencia (M) pasará por α. Lo mismo se veria que pasa por β y γ.

ESCOLIO.

407. El círculo (M) ha recibido el nombre de *círculo de los nueve puntos*. La tangente aE en el punto a es perpendicular al radio Ma ó á su paralela OA; es pues, paralela á la tangente AT al círculo circunscrito; pero esta tangente es antiparalela á BC con relacion al ángulo BAC, puesto que los ángulos TAB, ACB tienen la misma medida. Por consiguiente, *la tangente* a E *al círculo de los nueve puntos en el punto* a *es antiparalela á* BC *con relacion al ángulo* BAC.

Fig. 241.



En el punto p la tangente es paralela á aE, y en el punto α la tangente forma con la direccion CB un ángulo EαB igual al ángulo EaC que forma la tangente en a con la direccion BC. Se conocen así las rectas que tocan al círculo (M) en los nueve puntos a, b, c, p, q, r, α, β, γ.

TEOREMA.

408. *El círculo de los nueve puntos es tangente al inscrito y á cada uno de los ex-inscritos en el triángulo* ABC.

(FEUERBACH.)

En efecto, sea I el centro del círculo inscrito *(fig. 248)*, é I′ el centro de uno de los ex-inscritos; por ejemplo, el comprendido en el ángulo CAB.

El lado BC es una tangente comun interior á los dos círculos I é I′, y su punto medio a es tambien punto medio del intervalo FF′ entre sus dos puntos de contacto, porque designando por a, b, c los lados del triángulo ABC y por p su semi-perímetro, se tiene (**173**)

$$BF = p - b, \qquad BF' = p - c;$$

y por consiguiente,

$$\frac{1}{2}(BF + BF') = \frac{1}{2}(2p - b - c) = \frac{1}{2}a = Ba.$$

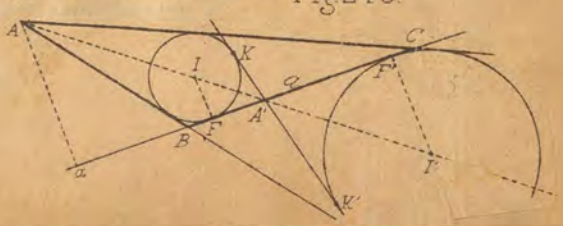
La segunda tangente comun interior KK′ pasa por el punto A′, en que la primera corta á la bisectriz AII′ del ángulo BAC; es, además, simétrica de BC con relacion á esta bisectriz; es decir, antiparalela á BC con relacion al ángulo BAC.

Observemos, finalmente, que los cuatro puntos I, I′, A, A′ son armónicos, y por tanto, sus proyecciones sobre BC forman tambien un sistema armónico FF′αA′, de suerte que

$$(1) \qquad \overline{aF}^2 = \overline{aF'}^2 = a\alpha . aA'.$$

Pues bien, formemos la figura inversa de los círculos I, I′, y del círculo de los nueve puntos, tomando por orígen el punto a y por constante de inversion la cantidad $\overline{aF}^2$. Siendo esta cantidad igual á la potencia del punto a con relacion á uno ú otro de los círculos I é I′, cada uno de éstos coincidirá con su inverso. En cuanto al círculo de los nueve puntos, tendrá por inverso una recta, puesto que pasa por el orígen a. Esa recta pasará por A′, puesto que, en virtud de la igualdad (1), el punto A′ es el inverso de α; deberá formar además con la direccion BC un ángulo igual al que forma con esta misma direccion la tangente en α al círculo de los nueve puntos. En otros términos (**407**), la recta inversa del círculo de los nueve puntos será la trazada por A′ antiparalelamente á BC con relacion al ángulo BAC; es decir, la segunda tangente comun interior KK′ á los dos círculos I é I′. En la figura primitiva el círculo de los nueve puntos es, pues, tangente á los dos círculos I é I′, y se veria del mismo modo que este círculo es tangente á los otros dos ex-inscritos.

Fig. 248.



CONDICION PARA QUE CUATRO CÍRCULOS SEAN TANGENTES Á UN QUINTO CÍRCULO.

409. Un geómetra inglés, Mr. Casey, ha obtenido en forma elegante la relacion que expresa que cuatro círculos son tangentes á un quinto.

Siendo A y B dos círculos cualesquiera, convengamos en designar por (AB) la longitud de su tangente comun. Segun las circunstancias, será ésta la tangente exterior ó interior; pero en todos los casos se deberá atribuir á esta locucion el sentido indicado en el núm. **402**. Convenido esto, el teorema de Mr. Casey se enuncia del siguiente modo:

Cuando cuatro círculos A, B, C, D *son tangentes á un quinto círculo* E, *las longitudes de sus tangentes comunes satisfacen á la igualdad.*

$$(1) \qquad (AB)(CD) \pm (AC)(BD) \pm (AD)(BC) = 0.$$

Para demostrar esta proposicion, supongamos, por ejemplo, que de los cuatro círculos A, B, C, D tocados por el círculo E, el primero A está contenido en E, y que los otros tres sean exteriores á este círculo. Convengamos, además, en completar, la notacion (AB) afectando el paréntesis con el índice 0 ó 1, segun se quiera designar, la tangente comun exterior ó interior. Así $(AB)_0$ será la tangente comun exterior á los círculos A y B, y $(AB)_1$ será la tangente comun interior.

Construyamos la figura inversa del sistema tomando por orígen un punto cualquiera S de la circunferencia E *(fig. 249)*. Al círculo E corresponderá una recta ε tangente á los círculos α, $\mathfrak{G}$, γ, δ, inversos de los propuestos A, B, C, D, y dicha recta dejará á un mismo lado los círculos $\mathfrak{G}$, γ, δ, y en el opuesto lado al círculo α. Pero designando por α, $\mathfrak{G}$, γ, δ los puntos de contacto de la recta ε con estos mismos círculos se tiene evidentemente entre los segmentos comprendidos por los cuatro puntos la igualdad siguiente:

$$\alpha\mathfrak{G}.\gamma\delta - \alpha\gamma.\mathfrak{G}\delta + \alpha\delta.\mathfrak{G}\gamma = 0.$$

Dividiéndola por el producto $\rho\,\rho'\,\rho''\,\rho'''$ de los radios de los cuatro círculos α, $\mathfrak{G}$, γ, δ, y adoptando la notacion indicada anteriormente, se deduce:

$$\frac{(\alpha\mathfrak{G})_1}{\rho\rho'} \cdot \frac{(\gamma\delta)_0}{\rho''\rho'''} - \frac{(\alpha\gamma)_1}{\rho\rho''} \cdot \frac{(\mathfrak{G}\delta)_0}{\rho'\rho'''} + \frac{(\alpha\delta)_1}{\rho\rho'''} \cdot \frac{(\mathfrak{G}\gamma)_0}{\rho'\rho''} = 0.$$

Esta igualdad, en virtud del principio establecido en el núm. **402**, equivale á

$$\frac{(AB)_1}{RR'} \cdot \frac{(CD)_0}{R''R'''} - \frac{(AC)_1}{RR''} \cdot \frac{(BD)_0}{R'R'''} + \frac{(AD)_1}{RR'''} \cdot \frac{(BC)_0}{R'R''} = 0,$$

siendo R, R′, R″, R‴ los radios de los círculos A, B, C, D.

La supresion del factor comun RR′ R″ R‴ da finalmente la igualdad

$$(AB)_1 (CD)_0 - (AC)_1 (BD)_0 + (AD)_1 (BC)_0 = 0,$$

que es una de las formas posibles de la igualdad (1).

Corolarios.

410. El teorema de Mr. Casey ofrece muchos corolarios. Citaremos algunos:

1.° Suponiendo que los círculos A, B, C, D se reduzcan á puntos, se halla de nuevo el teorema de Ptolomeo (**240**) sobre el cuadrilátero inscriptible

2.° Suponiendo que el círculo D se reduzca á su punto de contacto, y designando por l, l', l'' las longitudes de las tangentes trazadas desde este punto á los tres círculos A, B, C, se ve que *si un círculo* E *es tangente á tres círculos dados* A, B, C, *las tangentes trazadas desde un punto cualquiera de la primera circunferencia á las tres dadas satisfacen á la igualdad*

$$l'' (AB) \pm l' (AC) \pm l (BC) = 0.$$

3.° Finalmente, si nos referimos á la figura formada por un triángulo cualquiera, su círculo inscrito D y los tres ex-inscritos A, B, C, y si se aplica el teorema de Mr. Casey á estos cuatro círculos, se obtienen las tres igualdades

$$\begin{aligned} -(AB)_1 (CD)_0 + (AC)_1 (BD)_0 - (AD)_1 (BC)_0 &= 0, \\ (AB)_1 (CD)_0 + (AC)_0 (BD)_1 - (AD)_0 (BC)_1 &= 0, \\ -(AB)_0 (CD)_1 - (AC)_1 (BD)_0 + (AD)_0 (BC)_1 &= 0, \end{aligned}$$

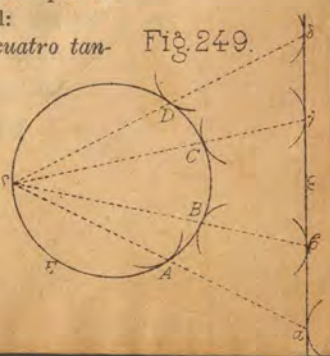
que sumadas miembro á miembro, dan

$$(AB)_0 (CD)_1 - (AC)_0 (BD)_1 + (AD)_1 (BC)_0 = 0.$$

El círculo inscrito y los tres ex-inscritos á un triángulo cualquiera son, pues, tangentes á un quinto círculo que deja el inscrito á un lado y á los tres ex-inscritos al otro lado. Este es el teorema de Feuerbach relativo al círculo de los nueve puntos (**408**), y fácilmente se ve que el mismo procedimiento conduciria á este teorema más general:

Los círculos tangentes á tres círculos dados, son cuatro á cuatro tangentes á un mismo círculo.

Fig. 249.



LIBRO IV.

ÁREAS.

§ I.—Medida de las áreas de los polígonos.

DEFINICIONES.

411. Llámese *área* la extension de una porcion limitada de superficie. Hay entre las palabras *área* y *superficie* una diferencia análoga á la que existe entre *longitud* y *línea*. Las palabras *línea* y *superficie* se refiere á la *forma*, miéntras que las palabras *longitud* y *área* se refieren á la *extension*.

Cuando dos figuras pueden coincidir, son *iguales;* cuando dos figuras no superponibles tienen áreas iguales, se dice que son *equivalentes*.

412. Tomando por *base* un lado cualquiera de un triángulo se llama *altura* la perpendicular bajada sobre la base desde el vértice opuesto.

Tomando por *base* un lado cualquiera de un paralelógramo, su *altura* es la distancia constante (**69**) que existe entre la base y el lado opuesto.

Segun esto, los dos lados adyacentes de un rectángulo constituyen indiferentemente su *base* y su *altura*, y reciben el nombre de *dimensiones* de la figura.

Las *bases* de un trapecio son sus dos lados paralelos, y su *altura* es la distancia constante entre estas bases.

413. Se dice que una magnitud M es proporcional á la vez á otras varias magnitudes A, B, C cuando permaneciendo constantes estas últimas, á excepcion de una, la magnitud M es proporcional á ésta, que varía (**131**).

414. *Cuando una magnitud* M *es proporcional á otras varias* A, B, C, *la relacion de dos valores cualesquiera de* M *es igual al producto de las relaciones de los valores correspondientes de las otras.*

Así, sean

$$\begin{matrix} M, & A, & B, & C, \\ m, & a, & b, & c, \\ m', & a', & b', & c', \end{matrix}$$

dos series de valores correspondientes de las magnitudes M, A, B, C, obtenidos refiriendo cada una de estas á una mitad de su especie. Se tendrá

$$\frac{m}{m'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}.$$

Sean, en efecto, m_1 el valor de M, que corresponde á los valores a', b, c, de A, B, C, y m_2 el correspondiente á a', b', c; segun la definicion del núm. **413**, se tiene

$$\frac{m}{m_1} = \frac{a}{a'}; \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{b}{b'}; \quad \frac{m_2}{m'} = \frac{c}{c'};$$

y multiplicando miembro á miembro estas igualdades, se tiene

$$\frac{m}{m'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}.$$

TEOREMA.

415. 1.° *Si dos rectángulos de la misma base tienen alturas iguales, son iguales.*

2.° *Si tres rectángulos de la misma base son tales que la altura*

del primero sea igual á la suma de las alturas de los otros dos, el primer rectángulo es igual á la suma de los otros dos.

En efecto:

1.° Sean *(fig. 250)* los dos rectángulos ABCD, A'B'C'D', cuyas bases AB, A'B', son iguales, como tambien lo son sus alturas AD y A'D'. Estos dos rectángulos son evidentemente superponibles.

2.° Sean *(fig. 250)* los tres rectángulos ABGH, A'B'C'D', E'F'G'H' cuyas bases AB, A'B', E'F' son iguales, y cuyas alturas AH, A'D', E'H', satisfacen á la condicion

$$AH = A'D' + E'H':$$

será el rectángulo ABGH suma de los otros dos, porque si se toma sobre AH una longitud AD igual á A'D', y se traza la recta DC paralela á AB, DH será igual á E'H' en virtud de la hipótesis, y, por consiguiente, los dos rectángulos ABCD, DCGH que componen el rectángulo ABGH serán respectivamente iguales á los rectángulos A'B'C'D' y E'F'G'H' (1.°)

COROLARIOS.

416. *La relacion de dos rectángulos de la misma base, es igual á la relacion de sus alturas;* ó en otros términos, *el área de un rectángulo de base constante, es proporcional á su altura.*

Porque el teorema precedente prueba que un rectángulo de base constante y su altura satisfacen á las condiciones necesarias y suficientes (**135**) para que haya proporcionalidad entre estas magnitudes.

417. Pueden reemplazarse mutuamente la base y la altura de un rectángulo (**412**), y por tanto se puede decir tambien que: *la relacion de dos rectángulos de la misma altura es igual á la de sus bases.*

418. Uniendo estos dos últimos enunciados y recordando la definicion dada en el núm. **413**, se puede decir que: *el área de un rectángulo es á la vez proporcional á su base y á su altura.*

Luégo (**414**): *la relacion de las áreas de dos rectángulos cualesquiera es igual al producto de las relaciones de sus bases y de sus alturas;* ó en otros términos: *dos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

TEOREMA.

419. *El área de un rectángulo tiene por medida el producto del número que mide su base por el número que mide su altura, cuando se toma por unidad de área el cuadrado que tiene por lado la unidad de longitud.*

En efecto, sean *(fig. 250)* ABGH el rectángulo que se trata de medir, y A′B′C′D′ el cuadrado cuyo lado A′B′ = A′D′ representa la unidad de longitud. Se tendrá (**418**)

$$\frac{ABGH}{A'B'C'D'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AH}{A'B'}.$$

Pero el primer miembro de esta igualdad es el número que mide el área ABGH (**123**), y las relaciones que hay en el segundo miembro son respectivamente los números que miden la base y altura del rectángulo propuesto. Luégo en el sistema de unidades adoptado, el número que mide el área del rectángulo es igual al producto de los números que miden su base y su altura. Así designando estos tres números por S, B, H, se tiene la fórmula

$$S = B.H.$$

Este teorema es de muy frecuente uso y se prefiere enunciarlo rápidamente, aunque de un modo incorrecto, diciendo simplemente: *el área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Escolio.

420. El área de un rectángulo es tambien igual al producto de su base por su altura, cuando se toma por unidad de área el rectángulo que tiene por base la longitud tomada por

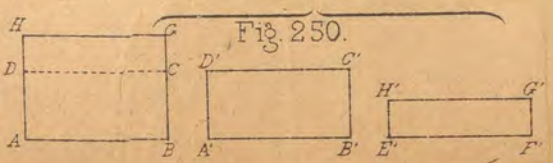


Fig. 250.

unidad de bases, y por altura la longitud adoptada como unidad de alturas.

421. El área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado; de aquí el nombre de *cuadrado* que se da á la segunda potencia de un número.

422. Ejemplos:

1.° *¿Cuál es la superficie de un rectángulo cuya base es igual á $2^m,34$ y la altura á $3^m,19$?*

Se tiene para el área

$$S = 2,34 \times 3,19 = 7^{m2},4646,$$

ó bien 7 metros cuadrados, 46 decímetros cuadrados y 46 centímetros cuadrados.

2.° *Se han empleado 15 rollos de papel de 10 metros de longitud por $0^m,60$ de anchura cada uno, para empapelar una pared rectangular de $18^m,25$ de anchura: ¿cuál es la altura de la pared?*

La superficie del rectángulo que se considera es

$$S = 10 \times 0,60 \times 15 = 90^{m2}.$$

Siendo su base de $18^m,25$, se tendrá para su altura

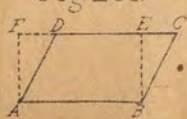
$$H = \frac{90}{18,25} = 4^m,93,$$

con un error menor que un centímetro.

423. *El área de un paralelógramo tiene por medida el producto de su base por su altura.*

Sea el paralelógramo ABCD *(fig. 251)*. Se obtiene un rectángulo de la misma base y altura que él bajando desde los extremos de la base AB perpendiculares AF y BE sobre el lado opuesto. Para demostrar el teorema bastará, pues (**419**), probar la equivalencia del paralelógramo ABCD y del rectángulo ABEF. El trapecio ABCD es una parte comun á estas dos

Fig. 251.



figuras, y falta comparar las partes no comunes BEC, AFD. Pero estas partes no comunes son triángulos rectángulos que tienen las hipotenusas AD y BC iguales como lados opuestos de un paralelógramo, y los catetos BE y AF iguales por la misma razon.

COROLARIOS.

424. Si se designan por S, B, H los tres números que miden respectivamente el área de un paralelógramo, su base y su altura, se tiene la fórmula

$$S = B.H.$$

Luégo:

Dos paralelógramos de la misma base y la misma altura son equivalentes; dos paralelógramos cualesquiera son entre sí como los productos respectivos de sus bases por sus alturas; dos paralelógramos de la misma base son entre sí como sus alturas; dos paralelógramos de la misma altura son entre sí como sus bases.

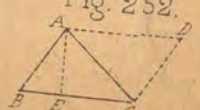
TEOREMA.

425. *El área de un triángulo tiene por medida la mitad del producto de su base por su altura.*

Basta para demostrar este teorema probar que todo triángulo es la mitad del paralelógramo de la misma base y la misma altura que él.

Sea el triángulo ABC *(fig. 252)*. Se obtiene un paralelógramo de la misma base DC y la misma altura AE, trazando por los vértices A y C del triángulo paralelas AD y CD á los lados opuestos. El triángulo ABC es la mitad de este paralelógramo ABCD, porque todo paralelógramo queda dividido por una de sus diagonales en dos triángulos iguales. Luégo siendo el área del paralelógramo ABCD igual al producto de su base BC por su altura AE (**423**), el área del triángulo ABC será igual á la mitad del producto de su base BC por su altura AE.

Fig. 252.



COROLARIOS.

426. Si se designan por S, B, H los tres números que miden respectivamente el área del triángulo, su base y su altura, se tiene la fórmula

$$S = \frac{B.H}{2} = \frac{B}{2}.\ H = B.\ \frac{H}{2}.$$

Luégo:

Dos triángulos de la misma base y de la misma altura son equivalentes; dos triángulos cualesquiera son entre sí como los productos respectivos de sus bases por sus alturas; dos triángulos de la misma base son entre sí como sus alturas; dos triángulos de la misma altura son entre sí como sus bases.

427. Cuando el triángulo es equilátero, su área se expresa en funcion de su lado a.

La altura del triángulo cae entónces en el punto medio de su base, y se tiene

$$H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

y la fórmula

$$S = \frac{B}{2}.\ H$$

se convierte en

$$S = \frac{a^2\ \sqrt{3}}{4}.$$

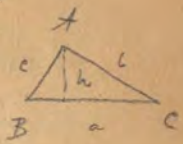
Ejemplo:

¿Cuál es la superficie del triángulo equilátero cuyo lado es de 1^m?

Se tiene

$$S = \frac{1^{m2}.\ \sqrt{3}}{4} = \frac{1^{m2},7321}{4} = 0^{m2},4330$$

en ménos de un centímetro cuadrado.



428. Consideremos un triángulo ABC, y designemos por
a, b, c los lados respectivamente opuestos á los ángulos A, B, C;
p, el semiperímetro;
S, el área;
h, la altura relativa al lado a;
R, el radio del círculo circunscrito;
r, el radio del círculo inscrito;
r', r'', r''', los radios de los círculos ex-inscritos, que están respectivamente situados en los ángulos A, B, C;

1.° La proposicion del núm. **239** da:

$$bc = 2Rh; \text{ de donde } abc = 2Rah = 4R.S;$$

y, por consiguiente,

$$(1) \qquad S = \frac{abc}{4R}.$$

Así, *el área de un triángulo es igual al producto de sus tres lados, dividido por cuatro veces el radio del círculo circunscrito.*

2.° Uniendo con los tres vértices A, B, C el centro O del círculo inscrito, se ve *(fig. 253)* que

$$ABC = OBC + OCA + OAB;$$

y como los triángulos sumados en el segundo miembro tienen respectivamente por bases a, b, c, y por altura comun el radio r del círculo inscrito, se tiene

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2}.r$$

ó

$$(2) \qquad S = pr.$$

3.° Uniendo con los tres vértices el centro O' del círculo ex-inscrito situado en el ángulo A, se ve que

$$ABC = O'CA + O'AB - O'BC;$$

ó

$$S = \frac{br'}{2} + \frac{cr'}{2} - \frac{ar'}{2} = \frac{b+c-a}{2}r' = \frac{2p-2a}{2}.r';$$

es decir,

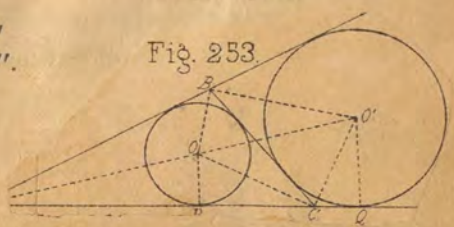
$$(3) \qquad S = (p-a)r'.$$

Del mismo modo se hallaria

$$(4) \qquad S = (p-b)r''$$

$$(5) \qquad S = (p-c)r'''.$$

Fig. 253



Las fórmulas (1), (2), (3), (4), (5) dan nuevas expresiones del área de un triángulo.

4.° Las fórmulas (1), (2), (3), (4), (5) permitirian inversamente calcular R, r, r', r'', r''' en funcion de los tres lados, si se conociese la expresion del área S en funcion de estos lados.

Pero esta expresion resulta inmediatamente del cálculo hecho en el número **229**.

Se ha encontrado, en efecto

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

de donde, recordando que $S = \frac{a}{2} \cdot h$,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{6}$$

Por lo demás, se puede establecer esta fórmula geométricamente como sigue:

Si se multiplican miembro á miembro las igualdades (2) y (3), se obtiene

$$S^2 = p(p-a).r.r'.$$

Siendo rectangulares las bisectrices OC y O'C de los dos ángulos adyacentes y suplementarios BCA, BCQ, los triángulos OPC, O'QC son semejantes por tener sus lados perpendiculares, y se puede escribir

$$\frac{OP}{CQ} = \frac{PC}{O'Q} \quad \text{ó} \quad OP.O'Q = PC.CQ.$$

Pero OP y O'Q son respectivamente iguales á r y r', y segun el número **173**, las longitudes PC y CQ son respectivamente iguales á $p - b$ y $p - c$. Se tiene, pues,

$$rr' = (p-b)(p-c),$$

y, por consiguiente, la igualdad que ha provenido de multiplicar las (2) y (3) se transforma en

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

5.° Finalmente, multiplicando miembro á miembro las igualdades (2), (3), (4) y (5), se obtiene

$$S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)\,r.r'.r''.r''';$$

de donde resulta, teniendo en cuenta la fórmula (6), la expresion (más curiosa que útil)

$$S = \sqrt{r.r'.r''.r'''}. \tag{7}$$

APLICACION NUMÉRICA.—*Calcular el área* S *y los radios* R, r, r', r'', r''' *de los círculos circunscrito, inscrito y ex-inscritos relativos al triángulo que tiene por lados*

$$a = 3^m,\ b = 4^m,\ c = 5^m.$$

Se tiene, ante todo

$$2p = a + b + c = 3 + 4 + 5 = 12;$$

de donde

$$p = 6;\ p - a = 3;\ p - b = 2;\ p - c = 1.$$

Las fórmulas (6), (1), (2), (3), (4), (5) dan luego sucesivamente

$$S = \sqrt{6.3.2.1} = 6^{m2},\ R = \frac{3.4.5}{4.6} = 2^m,5.$$

$$r = \frac{6}{6} = 1^m,\ r' = \frac{6}{3} = 2^m,\ r'' = \frac{6}{2} = 3^m,\ r''' = \frac{6}{1} = 6.$$

El triángulo que se considera es rectángulo, puesto que $c^2 = a^2 + b^2$, y es fácil, por tanto, hallar directamente los valores numéricos que acabamos de deducir de las fórmulas generales.

429. Para valuar el área de un polígono basta descomponerlo en triángulos, calcular sus áreas y hacer la suma de los números así obtenidos.

Para operar esta descomposicion se puede elegir un punto cualquiera en el plano del polígono y unirle con todos sus vértices. Las bases de los diversos triángulos que se formen serán los lados del polígono; sus alturas serán las perpendiculares, bajadas desde el punto escogido sobre todos los lados. El área del polígono será la suma aritmética ó algebráica de las áreas de los triángulos obtenidos, segun que su vértice comun sea interior ó exterior al polígono.

A menudo se hace la descomposicion adoptando como centro uno de los vértices del polígono; es decir, trazando todas las diagonales que parten de un mismo vértice.

430. Si se puede hallar en el interior del polígono un punto equidistante de todos los lados, es decir, *si el polígono es circunscriptible*, los triángulos que lo formen tienen por altura comun el radio del círculo inscrito, y *su área tiene por medi-*

da la mitad del producto de su perímetro por el radio del círculo inscrito.

TEOREMA.

431. *El área de un trapecio tiene por medida el producto de la semisuma de sus bases por su altura.*

Sea el trapecio ABCD *(fig. 254)*. Trazando la diagonal BC, queda dividido en dos triángulos ABC, BCD, que tienen por altura comun la altura EF del trapecio, y por bases respectivas las mismas bases del trapecio. El área del primero es igual á $\frac{AB}{2}$ EF; la del segundo, á $\frac{CD}{2}$. EF. Sumando estas dos expresiones, se tiene para el área el trapecio

$$\frac{AB + CD}{2} \cdot EF.$$

Escolios.

432. Si se designan por S, B, b, H los números que miden respectivamente el área de un trapecio, sus dos bases y su altura, se tiene la fórmula

$$S = \frac{B + b}{2} \cdot H.$$

433. Si trazamos por el punto medio G *(fig. 254)* del lado AC una paralela GH á las dos bases del trapecio, esta paralela cortará al lado BD y á la diagonal BC en sus puntos medios H y L (**188**). Se tendrá, pues,

$$GL = \frac{AB}{2}; \; LH = \frac{CD}{2}; \text{ es decir, } GH = \frac{AB + CD}{2}.$$

La recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es, pues, igual á la semisuma de sus bases, y se puede decir, por consiguiente, que *el área de un trapecio es igual al producto de su altura por la recta que une los puntos medios de sus lados no paralelos.*

Fig. 254

EJEMPLO: *Una de las bases de un trapecio es igual á 10 metros; su altura es de 4 metros y su superficie de 32 metros cuadrados. Calcular la longitud de la paralela á las dos bases, trazada á un metro de distancia de la base dada.*

Dividiendo la superficie del trapecio por su altura, se obtienen 8 metros para longitud de la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos. Si ahora se observa que esta recta divide al trapecio propuesto en otros 2 trapecios de altura igual á 2 metros, se ve que en uno de estos trapecios, la recta cuya longitud se nos pide es tambien la que une los puntos medios de los lados no paralelos. Es pues, igual á $\frac{10^m + 8^m}{2}$, ó bien 9 metros.

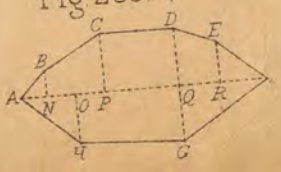
434. Hemos dicho en el núm. **429** que para valuar el área de un polígono se descompone en triángulos. Puede decirse con más generalidad que basta descomponerlo en partes que se sepa medir y hacer luego la suma de las áreas parciales. Hé aquí un modo de descomposicion muy usado, principalmente sobre el terreno: Se traza la diagonal mayor AT *(fig. 255)* del polígono propuesto, y por medio de las perpendiculares BN, CP, DQ, ER, HO, GQ, bajadas sobre esta diagonal desde los vértices exteriores, *se descompone el polígono en triángulos y trapecios rectángulos.* Midiendo con cuidado estas varias perpendiculares y las distancias mutuas de sus piés sobre AT, se tienen todos los elementos necesarios para calcular las áreas parciales, cuya suma es el polígono propuesto.

§ II.—Comparacion de áreas.

TEOREMA.

435. *La relacion de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de su relacion de semejanza;* ó bien, *dos polígonos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos.*

Fig 255.



Sean, primeramente, 2 triángulos semejantes ABC, A'B'C' *(fig. 256)*, que tienen por bases los lados AB y A'B' y por alturas las rectas CD y C'D',

Se tendrá (**425**)

$$ABC = \frac{1}{2} AB.CD;\ A'B'C' = \frac{1}{2} A'B'.C'D',$$

de donde

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB.CD}{A'B'.C'D'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{CD}{C'D'}.$$

Por otra parte, los dos triángulos rectángulos ACD, A'C'D' son semejantes (**208**), y se puede, por tanto, reemplazar la relacion $\frac{CD}{C'D'}$ por su igual $\frac{AC}{A'C'}$ ó $\frac{AB}{A'B'}$, y escribir

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AB}{A'B'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

Sean ahora dos polígonos semejantes S y S'. Su relacion de semejanza, igual á la de dos lados homólogos cualesquiera AB y A'B', estará representada por $\frac{AB}{A'B'}$. Estos dos polígonos podrán ser descompuestos en un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos (**214**), y la relacion de semejanza de dos triángulos homólogos será igual á la de los dos polígonos. Si el polígono S está compuesto de los triángulos T, T_1, T_2, y el S' de sus homólogos T', T'_1, T'_2, se tendrá, segun lo que precede,

$$\frac{T}{T'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},\quad \frac{T_1}{T'_1} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},\quad \frac{T_2}{T'_2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2};$$

y aplicando un teorema conocido,

$$\frac{T + T_1 + T_2}{T' + T'_1 + T'_2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} \quad \text{ó} \quad \frac{S}{S'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

ESCOLIO.

436. De la relacion que acabamos de demostrar se deduce recíprocamente

$$\frac{AB}{A'B'} = \sqrt{\frac{S}{S'}}.$$

Luégo, cuando se quiera *ampliar* ó *reducir* un polígono en una relacion dada, se deberá adoptar, para ampliar ó reducir los lados del polígono, una *escala* igual á la raíz cuadrada de la relacion dada. Si, por ejemplo, el área del nuevo polígono ha de ser la centésima parte del dado, será preciso que sus lados sean diez veces menores que sus homólogos del polígono dado.

TEOREMA.

437. *Si un ángulo de un triángulo es igual ó suplementario de un ángulo de otro triángulo, sus áreas son entre sí como los productos de los lados que forman dichos ángulos.*

Sean dos triángulos que tienen igual su ángulo: podrán ser colocados como lo están los triángulos ADE, ABC *(fig. 257)*; es decir, disponerlos de modo que tengan un ángulo comun.

Tracemos la recta BE y comparemos sucesivamente el triángulo ABE con los dos dados. Los dos triángulos ABC y ABE tienen la misma altura, puesto que sus bases AC y AE, opuestas al vértice comun B, están en línea recta; se tendrá, pues (**426**),

$$(1) \qquad \frac{ABC}{ABE} = \frac{AC}{AE}.$$

Análogamente, los dos triángulos ABE y ADE tienen la misma altura, puesto que sus bases AB y AD, opuestas al vértice comun E, están en línea recta; se tendrá pues, igualmente

$$(2) \qquad \frac{ABE}{ADE} = \frac{AB}{AD}.$$

Si se multiplican miembro á miembro las igualdades (1) y (2), y se suprime el factor comun ABE, se tendrá

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AC.AB}{AE.AD}.$$

Fig. 256.

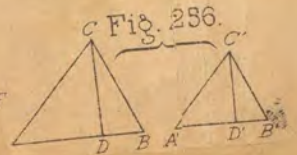
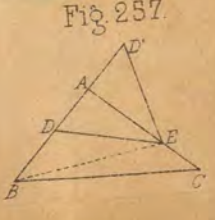


Fig. 257.



La demostracion dada es aplicable á dos triángulos ABC, AD'E que tengan un ángulo suplementario: basta reemplazar en toda ella la letra D por la D'.

TEOREMA.

438. *El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos (fig. 258).*

Sea el triángulo ABC rectángulo en A, y los cuadrados ABDE, ACFG, BCHK construidos sobre sus tres lados. Siendo recto el ángulo en A, el lado AE del cuadrado ABDE será prolongacion del cateto CA, y el lado AG del cuadrado ACFG será prolongacion del lado BA.

Pues bien, bajemos sobre la hipotenusa BC la perpendicular AL, y prolonguémosla hasta el punto I en que corta á KH, y tracemos las rectas AK y DC. El triángulo ABK tiene la misma base BK que el rectángulo BKIL, y tambien la misma altura, puesto que su vértice A está en la recta IL; el triángulo ABK equivale, por consiguiente (**425**), á la mitad del rectángulo BKIL. Análogamente, se ve que el triángulo BCD equivale á la mitad del cuadrado ABDE, porque tiene la misma base BD, é igual altura por estar su vértice C en la recta EA. Pero los dos triángulos ABK y BDC son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre dos lados iguales, á saber: el ángulo ABK igual á CBD, como compuestos uno y otro del ángulo ABC del triángulo dado y un recto; el lado BK igual á BC como lados de un cuadrado, y por la misma razon el lado AB igual al BD.

De la igualdad de estos triángulos se deduce la equivalencia del rectángulo BKIL y el cuadrado ABDE.

De un modo análogo se demostraria la equivalencia del rectángulo CHIL y el cuadrado ACFG.

COROLARIOS.

439. Dos rectángulos de igual altura son entre sí como sus bases, segun se sabe, y por tanto

$$\frac{BKIL}{BCHK} = \frac{BL}{BC}, \quad \frac{CHIL}{BCHK} = \frac{CL}{BC};$$

y reemplazando los rectángulos por los cuadrados equivalentes á ellos, se tiene

$$\frac{ABDE}{BL} = \frac{ACFG}{CL} = \frac{BCHK}{BC}.$$

Así, pues, *los cuadrados construidos sobre los catetos y sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo son respectivamente proporcionales á las proyecciones de esos catetos y de la hipotenusa sobre la hipotenusa misma.*

440. Si sobre los catetos y sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC se construyen tres polígonos semejantes P, Q, R, se tendrá (**435**)

$$\frac{P}{\overline{AB}^2} = \frac{Q}{\overline{AC}^2} = \frac{R}{\overline{BC}^2}; \quad \text{de donde} \quad \frac{P+Q}{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \frac{R}{\overline{BC}^2},$$

y por tanto,

$$R = P + Q.$$

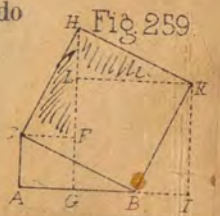
Escolio.

441. Del teorema que precede (**438**) puede darse otra demostracion que hace ver cómo se puede *descomponer efectivamente* el cuadrado construido sobre la hipotenusa en partes superponibles á los cuadrados construidos sobre los catetos.

Sea el triángulo ABC *(fig. 259)* rectángulo en A. Construyamos sobre la hipotenusa BC el cuadrado BCHK; desde los vértices H y K bajemos sobre AB las perpendiculares HG y KI, y desde los vértices C y K tracemos las paralelas CF y KL á este mismo lado, hasta que corten á HG.

Los cuatro triángulos rectángulos ABC, CFH, HLK, KIB son iguales por tener iguales la hipotenusa y un ángulo agudo, y por tanto, los cuadrados GIKL y ACFG son los construidos sobre los catetos AB y AC del triángnlo dado. Ahora bien, se ve inmediatamente en la figura que si del cuadrado

Fig 259



construido sobre la hipotenusa se quitan los dos triángulos HCF y HLK, para colocarlos en CAB y BKI, se forma una nueva figura ACFLKI, que es precisamente la suma de los dos cuadrados construidos sobre los catetos.

442. Finalmente, puede deducirse este teorema del número **224**. Porque estando expresada la medida del área del cuadrado construido sobre una recta por el cuadrado del número abstracto que mide la longitud de esta recta, se ve que el teorema del núm. **224** enseña que la medida del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual á la suma de las medidas de los construidos sobre los catetos; y que, por consiguiente, el primer cuadrado equivale á la suma de los otros dos. Inversamente, se pasaria del punto de vista *concreto* al *abstracto;* es decir, del núm. **438** al **224**, reemplazando las áreas de los cuadrados por sus respectivas medidas.

La misma observacion es aplicable á las diversas relaciones numéricas que hemos demostrado en el § III, libro IV, entre los diversos elementos de un triángulo referidos á una unidad comun. De esas relaciones resultan inmediatamente otros tantos teoremas sobre áreas, é inversamente se podrian dar demostraciones directas de estos últimos teoremas, y deducir luego de ellos las relaciones numéricas correspondientes.

§ III. — Áreas del polígono regular y del círculo.

DEFINICIONES.

443. Se llama *sector circular* la porcion de círculo comprendida entre un arco ACDB y los radios OA, OB que corresponden á sus extremos *(fig. 260)*.

Se llama *sector poligonal regular* la porcion de plano comprendida entre una línea quebrada regular ACDB y los radios OA y OB, trazados desde el centro O de esta línea (**268**) á sus extremidades. Si se divide en un número cualquiera de partes

iguales el arco AB de un sector circular AOB y se unen sucesivamente los puntos de division, se obtiene un sector poligonal regular OACDB inscrito en el sector circular.

TEOREMA.

444. *El área de un polígono regular, tiene por medida el producto de su perímetro por la mitad de la apotema (fig. 261).*

En efecto, uniendo el centro O del polígono regular ABCDEF con todos sus vértices, se le descompone en triángulos OAB, OBC,..., OFA, cuyas bases respectivas son los lados AB, BC,..., FA, y su altura comun la apotema OG. La suma de las áreas de estos triángulos, es decir, el área del polígono tiene, pues, por medida el producto de la suma de los lados AB, BC,..., FA por la mitad de la apotema OG; es decir, el producto del perímetro por la mitad de la apotema.

Si se designa por S, p, a el área, el perímetro y la apotema del polígono propuesto, se tiene, pues, la fórmula

$$S = \frac{1}{2} p.a.$$

COROLARIO.

445. *La relacion de las áreas de dos polígonos regulares del mismo número de lados, es igual á la relacion de los cuadrados de sus apotemas ó de los cuadrados de sus radios.*

Sean, en efecto, p, a, r el perímetro, la apotema y el radio del primer polígono, y p', a', r' el perímetro, la apotema y el radio del segundo. En virtud del teorema precedente, la relacion de las áreas es igual á

$$\frac{\frac{1}{2} pa}{\frac{1}{2} p' a'} \quad \text{ó} \quad \frac{pa}{p' a'}.$$

Pero se sabe (**269**)

$$\frac{p}{p'} = \frac{a}{a'} = \frac{r}{r'},$$

Fig. 260.

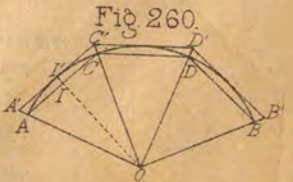


Fig. 261.

y por tanto, la relacion de las áreas es igual á

$$\frac{a^2}{a'^2} \text{ ó á } \frac{r^2}{r'^2}.$$

Esta proposicion resulta tambien de la semejanza de los dos polígonos regulares que tienen el mismo número de lados (**269**) y de que las áreas de dos polígonos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus rectas homólogas (**435**, **216**).

Escolio.

446. Por un razonamiento análogo al del número **444** se probaria que *el área de un sector poligonal regular* OACDB *(fig. 260) tiene por medida el producto del perímetro de la línea quebrada regular* ACDB *por la mitad de la apotema* OI.

447. Sea OAB un sector circular *(fig. 260)*. Dividiendo el arco AB en un número cualquiera n de partes iguales, y trazando tangentes por los puntos medios de las divisiones así obtenidas, se forman dos sectores poligonales regulares OACDB, OA'C'D'B' semejantes, uno inscrito y otro circunscrito al sector circular OAB. Si se designan por a y p la apotema y el perímetro de la línea quebrada regular ACDB, y por a' y p' la apotema y el perímetro de A'C'D'B', la relacion de las áreas de los dos sectores poligonales será $\frac{p}{p'}, \frac{a}{a'}$. Resulta, por otra parte, del número **290** que, cuando se hace crecer n indefinidamente, segun una ley cualquiera, las relaciones $\frac{p}{p'}, \frac{a}{a'}$ tienen por límite la unidad. Luégo lo mismo sucederá á la relacion $\frac{pa}{p'a'}$, y, por consiguiente, *à fortiori*, á la relacion del sector circular con cada uno de los dos sectores poligonales entre los cuales está comprendido. Luégo:

El área de un sector circular es el límite comun de las áreas de los sectores poligonales regulares semejantes inscrito y circunscrito, cuando se hace crecer indefinidamente el número de lados de la línea quebrada inscrita.

Y del mismo modo: *el área de un círculo es el límite comun de las áreas de los polígonos regulares semejantes inscrito y circunscrito, cuyo número de lados se hace crecer indefinidamente.*

Importa hacer notar que estos dos enunciados son verdaderos *teoremas*, miéntras que los enunciados análogos (**289**) sobre la longitud del arco y de la circunferencia no son más que *definiciones*.

TEOREMA.

448. *El área de un círculo tiene por medida el producto de su circunferencia por la mitad del radio.*

El área del círculo es el límite de las áreas de los polígonos regulares inscritos, cuyo número de lados crece indefinidamente. Si se designa por s, p, a el área, el perímetro y la apotema de un polígono regular inscrito en el círculo que se considera, se tiene (**444**)

$$s = p.\frac{1}{2}a.$$

Designando por S, C, R el área del círculo, su circunferencia y su radio, si se hace crecer indefinidamente el número de lados del polígono regular inscrito, s tiende hácia S, p hácia C, y a hácia R. Luego en el límite se tiene

$$S = C.\frac{1}{2}R. \quad (1)$$

COROLARIOS.

449. Si en la igualdad precedente se reemplaza la circunferencia C por su valor

$$C = 2\pi R, \quad (2)$$

se obtiene

$$S = \pi R^2, \quad (3)$$

que muestra:

1.° *Que para calcular el área de un círculo de radio dado, hay que multiplicar por π el cuadrado del radio;*

2.° *Que para calcular el radio de un círculo de área dada, hay que multiplicar por $\frac{1}{\pi}$ ó dividir por π el número que expresa esta área, y extraer la raíz cuadrada del resultado.*

450. Si en vez de eliminar C entre las igualdades (1) y

(2) se elimina R, se obtiene la fórmula

$$(4) \qquad S = \frac{C^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi},$$

que permite calcular directamente la superficie conociendo la circunferencia, ó calcular ésta dada aquélla. Esta fórmula es mucho ménos usada que las precedentes.

451. Ejemplos:

1.° *¿Cuál es la superficie de un estanque circular cuyo radio es 2m,5?*

Se tiene

$$S = \pi\,(2,5)^2 = \pi.6,25;$$

y dando á π el valor aproximado 3,142 en ménos de una milésima, se obtiene $S = 19^{m2},63$ en ménos de un decímetro cuadrado.

2.° *¿Cuál es el radio de un círculo cuya superficie es de 20 metros cuadrados?*

La fórmula

$$\pi R^2 = 20,$$

da

$$R = \sqrt{20.\frac{1}{\pi}} = \sqrt{20.0,31831} = 2^m,52$$

aproximada en ménos de un centímetro.

3.° *¿Cuál es la superficie de un círculo cuya circunferencia es igual á 10 metros?*

Se tiene

$$S = \frac{10^2}{2} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{4}.\,31,83 = 7^{m2},96,$$

con error menor que un centímetro.

452. *La relacion de las áreas de dos círculos, es igual á la de los cuadrados de sus radios.*

Porque designando por S y R el área y el radio del primer círculo, y por S′ y R′ el área y el radio del segundo, se tiene

$$S = \pi R^2,\ S' = \pi R'^2;\ \text{de donde}\ \frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

TEOREMA.

453. *El área de un sector circular tiene por medida el producto de su arco por la mitad del radio.*

El área del sector circular es el límite de las áreas de los sectores poligonales regulares inscritos (**447**), cuyo número de lados se hace crecer indefinidamente. Así, pues, designando por S el área del sector que se considera, por l la longitud del arco que lo limita, por R el radio de este arco y por s el área de un sector poligonal regular inscrito, por p el perímetro de la línea quebrada regular que lo limita, y por a la apotema de esta línea quebrada, se tiene (**446**)

$$s = p.\frac{1}{2}a.$$

Pero cuando se hace crecer indefinidamente el número de lados de la línea quebrada regular inscrita, s tiende hacia S, p hacia l, y a hácia R; se tiene, por tanto, en el límite

$$S = C\frac{1}{2}R$$

(5) $$S = l.\frac{1}{2}R.$$

COROLARIOS.

454. Comparando las fórmulas (1) y (5), se ve que *el sector es al círculo entero como su arco es á la circunferencia.*

Si n es el número de grados del arco, la relacion de este á la circunferencia será $\frac{n}{360}$, y, por consiguiente, el área S del sector se obtendrá multiplicando por esta relacion el área πR^2 del círculo; de suerte que se tendrá:

$$S = \pi R^2 . \frac{n}{360} \ (*)$$

Esta fórmula permite calcular una cualquiera de las cantidades S, R, n cuando se conocen las otras dos.

455. Ejemplos:

1.° *¿Cuál es el área del sector de 60 grados en el círculo cuyo radio es de 10 metros?*

El arco de 60 grados es la sexta parte de la circunferencia, y el sector correspondiente será, por tanto, la sexta parte del círculo; es decir,

$$\frac{100 . \pi}{6} = 52^{m2},3599,$$

con un error menor que un centímetro cuadrado.

2.° *Siendo el área de un sector igual á la del cuadrado construido sobre el radio, ¿cuál es el número de grados del arco correspondiente?*

La fórmula

$$\pi R^2 . \frac{n}{360} = R^2,$$

da

$$n = \frac{360^\circ}{\pi} = 114^\circ\ 35'\ 29'',6.$$

3.° *¿Cuál es el radio del círculo en el cual el sector de 45 grados tiene por superficie $0^{m2},1250$?*

La fórmula

$$\pi R^2 . \frac{45}{360} = 0,1250, \quad \text{ó} \quad \pi R^2 = 0,1250 \times 8 = 1$$

da

$$R = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0^m,564.$$

(*) NOTA 20.

456. *La relacion de las áreas de dos sectores semejantes* (es decir, limitados por arcos semejantes), *es igual á la de los cuadrados de sus radios.*

En efecto, siendo S, l, R el área, la longitud del arco y el radio del primer sector, y S′, l', R′ el área, la longitud del arco y el radio del segundo, se tiene

$$S = l.\frac{1}{2}R,\ S' = l'.\frac{1}{2}R';\ \text{de donde}\ \frac{S}{S'} = \frac{l}{l'}\cdot\frac{R}{R'};$$

pero los dos arcos l y l' son semejantes, y su relacion es, por tanto, igual á la de sus radios (**296**); se tiene, pues

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

TEOREMA.

457. *El área de un segmento circular tiene por medida el producto de la mitad del radio, por el exceso de su arco sobre la mitad de la cuerda del arco doble (fig. 262).*

En efecto, el segmento AMB, es decir, la porcion del círculo comprendida entre el arco AMB y su cuerda AB, es igual al exceso del área del sector (que tiene por medida arco AB. $\frac{1}{2}$ OA) sobre el área del triángulo OAB (que tiene por medida BP. $\frac{1}{2}$ OA, siendo BP la perpendicular bajada desde el extremo B sobre el radio OA; es decir, la mitad de la cuerda BB′ del arco BAB′, que es doble (**102**) del arco AB). Designando por S el área del segmento, se tiene, pues,

$$S = \text{arco AB}.\frac{1}{2}\,OA - \frac{1}{2}\,BB'.\frac{1}{2}\,OA;$$

ó bien

$$S = \frac{OA}{2}\left(\text{arco AB} - \frac{1}{2}\,BB'\right).$$

Fig. 262.

Cuando la cuerda BB′ es lado de uno de los polígonos regulares que se saben inscribir (Lib. III, § VII), se puede calcular directamente esta cuerda, y, por consiguiente, el área del segmento; en otro caso, hay que recurrir á las *Tablas trigonométricas*.

458. Ejemplo:

¿Cuál es el área del segmento de 60 grados en el círculo cuyo radio es de 2 metros?

El arco AB es aquí la sexta parte de la circunferencia, y es, por tanto, igual á

$$\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

La cuerda BB′ es lado del triángulo equilátero inscrito, igual á $2\sqrt{3}$; se tiene, pues,

$$S = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = 0^{m^2},362344,$$

con un error menor que un milímetro cuadrado.

COROLARIO.

459. *La relacion de las áreas de dos segmentos semejantes* (es decir, limitados por arcos semejantes), *es igual á la de los cuadrados de sus radios.*

Sean, en efecto, S y T las áreas del sector y del triángulo, cuya diferencia es el primer segmento, y S′ y T′ las del sector y triángulo, cuya diferencia es el segundo segmento. Siendo semejantes los sectores S y S′, así como los triángulos T y T′, si se designan por R y R′ los dos radios, se tendrá:

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}, \frac{T}{T'} = \frac{R^2}{R'^2}, \text{ ó bien } \frac{S}{S'} = \frac{T}{T'} = \frac{R^2}{R'^2},$$

y, por consiguiente,

$$\frac{S - T}{S' - T'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Fig. 263

§ IV.—Problemas sobre áreas.

PROBLEMA.

460. *Construir un triángulo equivalente á un polígono dado (figuras 263, 264).*

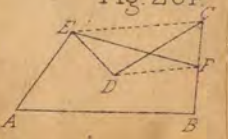
Sea, por ejemplo, el pentágono convexo ABCDE *(fig. 263)*. Trazando la diagonal EC, se separa de él un triángulo ECD. Si por el vértice D se traza entónces una paralela DF á la diagonal EC, todos los triángulos que, teniendo por base EC, tengan sus vértices sobre DF, serán equivalentes al triángulo ECD (**426**) y formarán con el cuadrilátero ECBA un polígono equivalente al pentágono propuesto. Pero para que el nuevo polígono ABCFE tenga un vértice menos que el dado, basta elegir entre todos esos triángulos aquel cuyo vértice está en el punto F de interseccion de la paralela DF con el lado BC prolongado.

La construccion que acabamos de dar permite *transformar un polígono cualquiera en otro equivalente á él, pero que tenga un lado menos;* repitiéndola, se llegará á un triángulo equivalente al polígono dado.

En la *fig. 263*, trazando por el vértice A la paralela AG á la diagonal EB hasta su encuentro con la prolongacion de FB, se pasa del cuadrilátero EABF al triángulo equivalente á él FEG. Este triángulo es, pues, equivalente al polígono primitivo.

461. La construccion es la misma cuando el polígono que se considera no es convexo. El pentágono cóncavo ABCDE *(fig. 264)*, aumentado en el triángulo EDC, se convierte en el cuadrilátero ABCE; y al quitar de éste el triángulo ECF, equivalente al EDC, se obtiene el cuadrilátero ABFE, equivalente al pentágono propuesto.

Fig. 264



Escolio.

462. El problema precedente proporciona el medio de va-

Fig. 265

luar el área de un polígono; transfórmese en un triángulo equivalente á él, y calcúlese luego el área de este triángulo.

Apliquemos este procedimiento á la investigacion del área de un trapecio.

Sea un trapecio cualquiera ABCD. Tracemos la diagonal DB *(fig. 265)* y su paralela CE hasta que corte á la prolongacion de la base AB.

El triángulo ADE será equivalente al trapecio ABCD, y como tiene la misma altura DF que éste, y su base AE es la suma de las bases del trapecio, se llega á la medida ya conocida (**431**).

PROBLEMA.

463. *Construir un cuadrado equivalente á un polígono dado.* Supongamos primero que se quiere construir un cuadrado equivalente á un triángulo dado. Siendo X el lado del cuadrado, y B y H la base y altura del triángulo, se deberá escribir (**421, 425**)

$$X^2 = \frac{B.H}{2} = \frac{B}{2}. H.$$

El lado del cuadrado pedido será, pues, media proporcional entre la mitad de la base del triángulo y su altura.

Si se trata de un paralelógramo, de un trapecio, de un polígono regular, ó en general de un polígono cuya área esté expresada por el producto de dos líneas, bastará buscar la media proporcional entre las dos líneas y se tendrá así el lado del cuadrado equivalente á la figura que se considere.

En cualquier otro caso, se transformará el polígono dado en un triángulo que sea equivalente (**460**), y se buscará el cuadrado equivalente á ese triángulo, como hemos indicado.

PROBLEMA.

464. *Hallar dos rectas proporcionales á dos polígonos dados.*

Se podrán siempre reemplazar los polígonos que se consideran por los cuadrados equivalentes á ellos (**463**): sean a y a' los lados de estos cuadrados, x é y las rectas que se buscan. Debe tenerse

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

Se puede elegir arbitrariamente una de las dos rectas, y por ejemplo, y hacer $y = a'$. Entónces se debe tener

$$\frac{x}{a'} = \frac{a^2}{a'^2}, \quad \text{ó} \quad x = \frac{a^2}{a'}.$$

Por consiguiente, x habrá de ser (en el supuesto que hemos escogido) la tercera proporcional (**248**) á las rectas a y a', y la relacion de esta tercera proporcional á a' será la misma que la de los polígonos dados.

PROBLEMA.

465. *Construir un polígono equivalente á un polígono* P *y semejante á otro* Q.

Se trata de transformar un polígono dado P en otro X equivalente á P, pero semejante á un segundo polígono dado Q.

Sean q un lado cualquiera de Q y x el lado homólogo de X. Se deberá tener (**435**)

$$\frac{\text{Q}}{\text{X}} = \frac{q^2}{x^2},$$

ó, puesto que X debe ser equivalente á P,

$$\frac{\text{Q}}{\text{P}} = \frac{q^2}{x^2}.$$

Reemplazando los polígonos Q y P por los cuadrados equivalentes á ellos a^2 y b^2 (**463**), se tendrá

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{q^2}{x^2}; \quad \text{de donde} \quad \frac{a}{b} = \frac{q}{x}.$$

Así, pues, el lado x es la cuarta proporcional á las tres rectas a, b, q (**247**), y bastará construir sobre esa cuarta proporcional, como lado homólogo de q, un polígono semejante á Q (**253**).

PROBLEMA.

466. *Dadas dos figuras semejantes, construir una tercera semejante á ellas y equivalente á su suma ó diferencia.*

Si se trata de dos cuadrados cuyos lados sean a y b ($a > b$), el lado x del cuadrado equivalente á su suma será la hipotenusa del triángulo rectángulo que tenga por catetos a y b; el lado y del cuadrado equivalente á su diferencia será el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea a, siendo b el otro cateto (**438**).

Si se trata de dos polígonos semejantes, A y B (A > B); de los cuales sean a y b lados homólogos, el lado homólogo x del polígono semejante X = A + B será la hipotenusa del triángulo rectángulo construido sobre a y b como catetos; el lado homólogo y del polígono semejante Y = A — B será el cateto del triángulo rectángulo que tenga por hipotenusa a y por otro cateto b (**440**).

En el caso de dos círculos cuyos radios sean R y R′, se repetiria lo dicho en el párrafo que precede con sólo reemplazar a y b por R y R′, y se tendrian los radios x é y de los círculos respectivamente iguales á la suma ó diferencia de los dos dados.

Escolio.

467. Si se quiere hallar una recta x ligada á otras varias dadas a, b, c, d, e por una expresion de la forma

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2 - e^2},$$

se buscará primero $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$ por medio del triángulo rectángulo que tuviese por catetos a y b; α será la hipotenusa. Despues $\beta = \sqrt{\alpha^2 - c^2}$, por medio de un triángulo rectángulo

cuya hipotenusa sea α, siendo un cateto c; β será el otro cateto. Del mismo modo se tendrán $\gamma = \sqrt{\beta^2 + d^2}$, y, finalmente, $x = \sqrt{\gamma^2 - e^2}$ por medio de otros dos triángulos rectángulos, siendo β y d catetos del primero, y γ y e hipotenusa y un cateto del segundo; el otro cateto de éste será x.

Escolio.

468. Del último párrafo del núm. **466** resulta que si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo ABC *(fig. 266)* como diámetros se describen tres semicírculos, el descrito sobre la hipotenusa será equivalente á la suma de los descritos sobre los catetos. Quitando de una y otra cantidad la suma de las porciones ApB y AqC (rayadas en la figura), se ve que la suma de las dos *lúnulas* AmBpA, AnCqA es equivalente al área del triángulo rectángulo ABC.

Se atribuye á Hipócrates este teorema.

Fig. 266.

PROBLEMA.

469. *Construir un polígono semejante á otro dado, y cuya área esté con la de éste en la relacion de dos rectas dadas* M *y* N *(fig. 267).*

Supongamos primero que el polígono dado es un cuadrado; sea A su lado. Si X es el lado del cuadrado que se busca, se deberá tener (**435**)

$$\frac{X^2}{A^2} = \frac{M}{N}$$

La cuestion queda, pues, reducida á construir un triángulo rectángulo tal que la relacion de los segmentos determinados sobre la hipotenusa por la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto sea igual á $\frac{M}{N}$ (**439**), y que el cateto adyacente al segmento que corresponde á N sea igual á A.

Pero si se lleva sobre una recta indefinida BC = M, CD = N y se describe una semicircunferencia sobre BD como diáme

Fig 267.

tro, y se levanta la perpendicular CE á BD hasta que corte á la semicircunferencia, se obtiene un triángulo rectángulo BED, en el cual los segmentos de la hipotenusa guardan la relacion dada; en el mismo caso están (**218**) todos los triángulos rectángulos semejantes que se forman trazando entre los lados del ángulo recto BED (prolongados ó no) una paralela á la hipotenusa BD. Entre todos estos triángulos corresponderá á la cuestion aquel cuyo cateto, dirigido segun ED, sea igual á A.

Se llevará, pues, sobre ED la longitud EG = A; por el punto G se trazará la paralela GF á BD hasta su encuentro con EB, y FE será el lado del cuadrado pedido. Se tiene, en efecto,

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{EG}^2} = \frac{FH}{HG} = \frac{BC}{CD}, \text{ ó } \frac{\overline{EF}^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

470. Consideremos ahora un polígono cualquiera P; sean p uno de sus lados y x el homólogo del polígono que se busca X. Segun el enunciado, se debe tener

$$\frac{X}{P} = \frac{M}{N} \text{ y } \frac{X}{P} = \frac{x^2}{p^2},$$

de donde

$$\frac{x^2}{p^2} = \frac{M}{N}.$$

Y así queda reducido el problema á buscar el lado de un cuadrado que esté con un cuadrado dado en la relacion de dos rectas dadas, cuestion que acabamos de resolver. Cuando se haya obtenido el lado x homólogo de p, bastará construir sobre él un polígono semejante al P.

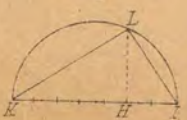
471. En el caso de dos círculos, designando por x y r sus radios, se deberá tener

$$\frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \frac{M}{N}, \text{ ó } \frac{x^2}{r^2} = \frac{M}{N},$$

que es tambien el mismo problema.

Fig. 268.

Fig. 269.



ESCOLIO.

472. Si la relacion $\frac{M}{N}$ fuese dada numéricamente, igual por ejemplo á $\frac{5}{7}$, se tomaria una longitud arbitraria por unidad, y estariamos en el caso precedente tomando BC y CD iguales respectivamente á 5 y 7 veces la unidad adoptada.

473. En este caso se puede proceder tambien del modo siguiente sea $\frac{M}{N} = \frac{5}{7}$ *(fig. 268)*. Sobre el lado KH del cuadrado dado como diámetro descríbase una semicircunferencia; divídase KH en el punto I en la relación de 5 á $2 = 7 - 5$, y levántese la perpendicular IL á KH. La recta KL será el lado del cuadrado pedido **(439)**.

Si la relacion $\frac{M}{N}$ es mayor que 1, é igual á $\frac{7}{5}$ por ejemplo, divídase el lado dado KH *(fig. 269)* en el punto I en la relacion de 7 á $2 = 7 - 5$; descríbase sobre KI como diámetro una semicircunferencia, y levántese en el punto H la perpendicular HL á KI. La recta KL será el lado del cuadrado pedido **(439)**.

§ V.—Apéndice.

ÁREA APROXIMADA DE UNA FIGURA PLANA LIMITADA POR UNA CURVA CUALQUIERA.

474. *Fórmula de Simpson.*—Designado por B y B′ las bases de un trapecio, y por B″ la paralela á ellas equidistante de las dos, y por h la semialtura, se puede expresar el área del trapecio por la fórmula

$$(1) \qquad \frac{h}{3}(B + B' + 4B''),$$

que se reduce, en efecto, á la fórmula conocida $h(B + B')$ si se reemplaza B″ por su valor $\frac{1}{2}(B + B')$.

Supongamos que se trata de valuar aproximadamente el área comprendida entre un arco de curva cualquiera AB, una recta fija XY, y las perpendiculares AA′ y BB′ bajadas sobre ésta desde las extremidades del arco AB *(fig. 270)*.

Consideremos primeramente que el arco AB sea cóncavo hácia la recta XY, en toda la extension que se considera desde A hasta B. Divi-

damos la base A'B' en un número *par* de partes iguales, por ejemplo en diez, y por los puntos de division C', D', E', F', G', H', I', K', L', levantemos perpendiculares á XY. Designemos respectivamente por y_1, y_2, y_3, ..., y_{11} las perpendiculares (llamadas ordenadas) AA', CC', DD', ..., BB', y por h la distancia constante entre dos ordenadas consecutivas. Siendo C_1 el punto en que la cuerda AD corta á CC', se tendrá, para expresion del área del trapecio rectilíneo ADD'A',

$$\frac{h}{3}(AA' + DD' + 4C_1C');$$

pero este trapecio es menor que el trapecio mixtilíneo ACDD'A' y conviene aumentarle; será, pues, conveniente reemplazar C_1C' por CC', y tendremos como expresion aproximada del área del trapecio mixtilíneo ACDD'A' la expresion

$$\frac{h}{3}(y_1 + y_3 + 4y_2).$$

Del mismo modo

$$\frac{h}{3}(y_3 + y_5 + 4y_4), \qquad \frac{h}{3}(y_5 + y_7 + 4y_6).$$

$$\frac{h}{3}(y_7 + y_9 + 4y_8), \qquad \frac{h}{3}(y_9 + y_{11} + 4y_{10}),$$

serán expresiones aproximadas de las áreas de los trapecios mixtilíneos DFF'D', FHH'F', HKK'H', KBB'K'; sumándolas se obtiene, para valor aproximado del área pedida, la expresion siguiente:

$$S = \frac{h}{3}[y_1 + y_{11} + 2(y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})].$$

Esta fórmula, atribuida á Simpson, se retiene fácilmente si se pone bajo la forma

$$S = \frac{h}{3}(E + 2I + 4P),$$

en la cual E designa la suma de las ordenadas extremas, I la suma de las otras ordenadas de lugar impar, y P la suma de todas las de lugar par.

Fórmula de Poncelet.—La base A'B' debe tambien dividirse en un número *par* de partes iguales, diez por ejemplo *(fig. 271)*. Designaremos las once ordenadas correspondientes por y_1, y_2, y_3, ..., y_{10}, y_{11}. Por las extremidades de todas las ordenadas *de lugar par* y_2, y_4, ..., y_{10}, tracemos tangentes á la curva AB, y limitemos estas tangentes en las dos ordenadas contiguas. Formaremos así una serie de trapecios, cuya

Fig. 270.

suma (evidentemente mayor que el área que se busca) será como un límite superior de ésta.

Designando por h el intervalo constante entre dos ordenadas consecutivas, se tiene

$$\text{trapecio AD}' = 2h \,.\, y_2.$$

$$\text{trapecio DF}' = 2h \,.\, y_4.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{trapecio KB}' = 2h \,.\, y_{10}.$$

Designando por S la suma de estos trapecios, se tiene

$$S = 2h\,(y_2 + y_4 + \cdots + y_{10});$$

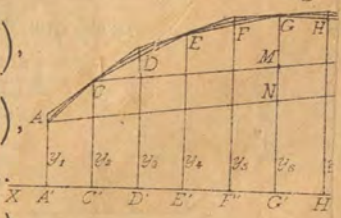
fórmula que contiene dentro del paréntesis todas las ordenadas de lugar par. Designando por P su suma, se puede escribir

$$S = 2h\,.P.$$

Tracemos las cuerdas AC y BL que correspondan á las divisiones extremas; despues las cuerdas intermedias CE, EG, GI, IL, que corresponden á dos divisiones. Formaremos una nueva serie de trapecios cuya suma será un límite inferior del área pedida.

Pero se tiene

Fig. 8



$$\text{trapecio AC}' = h\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right),$$

$$\text{trapecio CE}' = 2h\left(\frac{y_2 + y_4}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{trapecio IL}' = 2h\left(\frac{y_8 + y_{10}}{2}\right),$$

$$\text{trapecio LB}' = h\left(\frac{y_{10} + y_{11}}{2}\right).$$

Designando por s la suma de estos trapecios, se tiene

$$s = h\left[\frac{y_1 + y_{11}}{2} + \frac{3}{2}(y_2 + y_{10}) + 2\,(y_4 + y_6 + y_8)\right],$$

ó bien, añadiendo y quitando dentro del paréntesis la cantidad $\frac{y_1 + y_{10}}{2}$,

$$s = h\left[\frac{y_1 + y_{11}}{2} - \frac{y_2 + y_{10}}{2} + 2\,P\right].$$

Siendo A el área pedida, se tiene

$$s < A < S.$$

Pero la media aritmética $\frac{S+s}{2}$ está comprendida tambien entre s y S, y se puede con cierto error tomar

$$A = \frac{S+s}{2} = h\left(2P + \frac{E-E'}{4}\right);$$

En esta fórmula P designa, como hemos dicho, la suma de todas las ordenadas de lugar par; E, la suma de las dos ordenadas extremas; E', la suma de las dos contiguas á las extremas.

La ventaja que ofrece esta fórmula cuando el número de las divisiones es grande, consiste en que no entran más que las ordenadas de lugar par y las dos ordenadas extremas, y no se requiere el conocimiento de las ordenadas intermedias de lugar impar.

Se puede determinar un límite superior del error cometido al adoptar esa fórmula.

Estando el área pedida A comprendida entre S y s, diferirá de su media aritmética $\frac{S+s}{2}$ en ménos de la mitad de la diferencia entre S y s; es decir, que el error cometido es menor que

$$\frac{S-s}{2} = h\left(\frac{E-E'}{4}\right) = \frac{h}{2}\left(\frac{E}{2} - \frac{E'}{2}\right).$$

Tracemos en la figura las rectas AB y CL; estas dos rectas cortan á la ordenada GG' del punto medio en dos puntos M y N, y se tiene

$$\frac{y_2 + y_{10}}{2} = MG', \quad \frac{y_1 + y_{11}}{2} = NG';$$

es decir,

$$\frac{E}{2} - \frac{E'}{2} = MN.$$

El límite superior del error cometido se expresa, pues, geométricamente por el producto

$$\frac{h}{2} \cdot MN.$$

Si ántes de hacer el cálculo se quiere ver si una longitud adoptada para h es conveniente, es decir, si se obtendrá por la fórmula la aproximacion que se desea, se pueden trazar provisionalmente y como ensayo

las dos primeras y las dos últimas ordenadas y la del punto medio, medir entonces MN y estimar la aproximacion.

Nota.—Si el arco AB fuera convexo hácia la recta XY, se llegaria á la misma fórmula siguiendo una marcha análoga. Si el arco fuera en parte cóncavo y en parte convexo, se trazarian perpendiculares á XY por los puntos de inflexion, se medirian las áreas parciales así obtenidas y su suma sería el área pedida.

Aplicacion.—Para el cuadrante de radio 1, se encuentra, dividiendo el radio en diez partes iguales:

$$y_1 = 1, \quad y_{11} = 0, \quad y_3 = 0{,}980, \quad y_5 = 0{,}917, \quad y_7 = 0{,}800, \quad y_9 = 0{,}600, \quad y_2 = 0{,}995, \quad y_4 = 0{,}954, \quad y_6 = 0{,}866, \quad y_8 = 0{,}714, \quad y_{10} = 0{,}436.$$

El verdadero valor es $\frac{\pi}{4} = 0^{m2},7854$. La fórmula de Simpson da $0^{m2},7818$; la de Poncelet da $0^{m2},7822$ con un error límite igual á $0^{m2},108$.

Este error no es en realidad más que de $0^{m2},0032$.

SOBRE LA DIFERENCIA } ENTRE LA LONGITUD DE UN ARCO DE CÍRCULO Y LA DE SU CUERDA.

LEMA.

475. *El área de un triángulo isósceles* PNQ, *inscrito en un segmento circular menor que un semicírculo, es menor que la relacion entre el cubo del arco* α *que limita dicho segmento y 16 veces el radio* R *(fig. 272).*

Porque esta área tiene por expresion (**428**, 1.°)

$$\frac{PQ.PN.QN}{4R},$$

y es menor que

$$\frac{\alpha \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}}{4R} = \frac{\alpha^3}{16R}.$$

TEOREMA.

476. *La diferencia entre un arco de círculo* ABA′ *menor que media circunferencia y su cuerda* AA′, *es menor que la relacion entre el cubo del arco y 24 veces el cuadrado del radio (fig. 272).*

Designemos por *a* el arco ABA′, por *c* su cuerda AA′ y por R el radio del círculo.

Siendo B el punto medio del arco ABA', el área del segmento ADB tiene por medida (**457**)

$$\frac{R}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{c}{2}\right), \quad \text{ó} \quad \frac{R}{4}(a-c).$$

Si luego se toma el punto medio D del arco AB, y despues los puntos medios E y E_1 de los arcos AD y DB, y así sucesivamente, y si se designan respectivamente por t_1, t_2, ..., las áreas de los triángulos ADB, AED, ..., el área del segmento será el límite de la suma

$$t_1 + 2t_2 + 2^2 t_3 + \ldots + 2_2^{n-1} t_n + \ldots$$

Pero, segun el lema precedente (**475**), se tiene

$$t_n < \frac{1}{16R}\left(\frac{a}{2_n}\right)^3;$$

luégo se tendrá tambien

$$\frac{R}{4}(a-c) < \frac{1}{16R}\left[\frac{a^3}{2^3}+\frac{a^3}{2^5}+\frac{a^3}{2^7}+\ldots\right],$$

ó bien

$$(a-c) < \frac{a^3}{32R^2}\left[1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right];$$

es decir,

$$(a-c) < \frac{a^3}{32R^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}},$$

ó finalmente

$$(1) \qquad (a-c) < \frac{a^3}{24R^2}.$$

Para presentar una aplicacion de esta fórmula, busquemos, por ejemplo, *cuál debe ser el radio* R *de un círculo para que la diferencia entre un arco de 60 metros y su cuerda sea menor que un milímetro.*

Basta segun la fórmula (1), que R satisfaga á la desigualdad

$$\frac{60^3}{24R^2} < \frac{1}{1000};$$

de donde

$$R \underset{>}{=} \sqrt{\frac{10^3.60^3}{24}}, \quad \text{ó} \quad R \underset{>}{=} 3000^{ms}.$$

El radio del círculo debe, pues, ser por lo menos igual á 3 kilómetros.

Nota.—La fórmula (1) corresponde á la fórmula conocida de Trigonometría

$$(2) \qquad x - \operatorname{sen} x < \frac{x^3}{6}.$$

En efecto, si se supone $R = 1$ y $a = 2x$, se tiene

$$c = 2 \operatorname{sen} x,$$

puesto que *en el círculo de radio 1, el seno de un arco es la mitad de la cuerda del arco doble;* si se sustituyen estos valores en la relacion (1), se obtiene la (2).

SOBRE LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FIGURAS PLANAS.

477. Se atribuyen á la escuela de Pitágoras las primeras investigaciones (por el método sintético) sobre máximos y mínimos de figuras. En 1782, Lhuilier *(De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum)* resumió todos los descubrimientos hechos sobre este asunto desde los griegos hasta R. Simpson; corrigió con admirable sagacidad los errores de los que le habian precedido, y ensanchó considerablemente esta teoría con sus propios descubrimientos. Ultimamente, en 1842, Steiner, en dos Memorias (*Journal de Crelle*, t. XXIV), que son obras maestras de Geometría sintética, ha presentado cinco métodos para la investigacion de los máximos de figuras planas; los dos primeros se aplican á la esfera. Expondremos tan solo el primer método, que es el más elegante y general.

TEOREMA.

478. *Entre todos los triángulos isoperímetros y de la misma base* AB, *el triángulo isósceles es un máximo (fig. 273).*

En efecto, sea ADB un triángulo no isósceles construido sobre la base AB, y tal que AD + DB = AC + CB. Teniendo los triángulos ADB y ACB el área comun AEB, se trata de probar que el triángulo BED es menor que el AEC; pero si se toman sobre EA y EC dos longitudes EF = EB y EG = ED, los triángulos FEG y BED serán iguales, y bastará hacer ver que el triángulo FEG está comprendido en AEC; es decir, que el punto F cae entre E y A, y el punto G entre E y C.

F estará, en efecto, entre E y A, porque el ángulo ϵ, igual á α, es mayor que γ, y por tanto, el lado opuesto EA es mayor que EB ó que su igual EF.

G caerá entre E y C, para probarlo basta establecer la desigualdad

$$FG + GE < FC + CE;$$

Fig. 273.

ó bien, añadiendo á los dos miembros AF + FE

$$AF + FG + GE + FE < AF + FC + CE + EF.$$

Pero

$$EG = ED,\ FG = BD,\ EF = EB;$$

luégo la desigualdad anterior equivale á esta:

$$AD + DB \quad \text{ó} \quad AC + CB < AF + FC + CB;$$

es decir,

$$AC < AF + FC,$$

que es evidente,

479. Recíprocamente, *entre todos los triángulos de la misma base y de igual área, el triángulo isósceles es el de perímetro mínimo.*

En efecto, sea U un triángulo no isósceles que tenga la misma base y área que G, y sea G_1 un triángulo isósceles que tenga la misma base y perímetro que U; segun el teorema precedente, G_1 será de mayor área que U, es decir, que G; pero de dos triángulos isósceles construidos sobre la misma base, el que tiene mayor área tiene tambien mayor perímetro; luego el perímetro G_1, es decir, el perímetro de U es mayor que el de G.

En lo que sigue suprimiremos las demostraciones de los teoremas recíprocos: son siempre análogas á la que acabamos de dar.

Corolario.

480. *Entre todos los triángulos de igual perímetro, el equilátero es de área máxima,* porque el triángulo máximo correspondiente al perímetro dado debe ser isósceles sobre cualquiera de sus lados tomado como base.

Recíprocamente, *entre todos los triángulos equivalentes, el equilátero es el de perímetro mínimo.*

TEOREMA.

481. *Entre todos los triángulos construidos con dos lados, aquel en el cual el ángulo comprendido es recto, es de área máxima.*

En efecto, si se mira como base uno de los lados dados, la altura es menor que el otro lado, á menos que este otro lado sea perpendicular al primero; en esta posicion la altura, y por consiguiente el área, es, pues, máxima.

Corolario.

482. *Entre todos los triángulos que tienen igual la suma de dos lados,*

es de área máxima aquel en el cual los dos lados son iguales y perpendiculares.

En efecto, repártase como se quiera la suma dada entre los dos lados, el triángulo máximo será siempre aquél en el cual los dos lados son perpendiculares entre sí. Comparemos, pues, los triángulos rectángulos en que la suma de los catetos es constante; consideremos uno de estos triángulos rectángulos P, y sobre su hipotenusa formemos uno isósceles Q, cuyos lados iguales tengan la misma suma que los catetos de P, y designemos finalmente por R el triángulo isósceles cuyos lados iguales tuvieran la misma longitud que los de Q y estuviesen además en ángulo recto; se tendrá, por lo que precede, $P < Q$ y $Q < R$; luego $P < R$.

TEOREMA.

483. *Entre todas las figuras planas isoperímetras, el círculo es la de área máxima (fig. 274).*

El área de una figura de perímetro dado puede ser evidentemente tan pequeña como se quiera; pero no puede ser su área tan grande como se quiera, puesto que esta figura permanece forzosamente encerrada en el interior de un círculo que se describiera desde un punto de su contorno como centro con la mitad de dicho perímetro por radio. Entre todas las figuras planas isoperímetras hay, pues, una de área máxima, ó varias figuras de igual área máxima y diferente forma.

Además, toda figura máxima de perímetro dado ha de ser *convexa* necesariamente, porque, si no lo fuese, se podría aumentar su área sin alterar la longitud de su contorno ó perímetro.

Pues bien, sea E F G H una figura máxima que tenga el perímetro dado. Marcando un punto cualquiera A sobre su contorno, hay siempre otro B del mismo contorno, tal que la recta A B divide al perímetro en dos mitades; pues bien, las áreas A E F B A y A H G B A deberán ser iguales; porque, si así no fuese, reemplazando la menor de ellas por la figura simétrica de la otra con relacion á A B, se obtendría una figura total del mismo perímetro que la primera y de mayor área, y esta primera no sería un máximo, como se ha supuesto.

De aquí resulta que si en una figura máxima E F G H de perímetro dado se reemplaza la parte inferior á A B por una simétrica de la que está encima de esta recta, la nueva figura total será tambien una de las figuras de área máxima.

Razonemos sobre esta nueva figura, ó, en otros términos, admitamos que la parte A H G B sea simétrica de A E F B, con relacion á A B. Sea C un punto cualquiera del contorno A E F B; tomemos su simétrico D, con relacion á A B, y tracemos C A, A D, D B, B C. El ángulo A C B será recto, porque si los ángulos A C B y A D B no fuesen rectos, se podría

Fig. 274.

construir con los mismos lados CA, AD, DB, BC un cuadrilátero $\alpha\gamma\mathfrak{C}\delta$, en el cual los ángulos γ y δ fuesen rectos; este nuevo cuadrilátero sería de mayor área que el primero **(481)**, y colocando respectivamente sobre los lados $\alpha\gamma$, $\gamma\mathfrak{C}$, $\delta\mathfrak{C}$, $\alpha\delta$ los segmentos AEC, CFB, BGD, DHA, que están actualmente sobre CA, BC, DB, AD se tendría una figura total del mismo perímetro que AECFBGDHA y de mayor área; esta figura AECFBGDHA no sería, pues, un máximo, como se ha supuesto. Luégo desde cualquier punto C del contorno AECFB se ve bajo ángulo recto la recta AB, y, por consiguiente, este contorno es una semicircunferencia descrita sobre AB como diámetro.

Así, si una figura de perímetro dado es máxima, su mitad ACB, *tomada á partir de un punto cualquiera* A *de su contorno*, es un semicírculo. La figura total es, pues, un círculo.

Luégo en definitiva no hay más que una figura máxima de perímetro dado, y esta figura es un círculo.

Steiner da á este teorema el nombre de *teorema principal*, porque su demostracion contiene los principios más esenciales en las cuestiones de máximos de figuras planas (ó esféricas).

TEOREMA.

484. 1.° *Si el perímetro de una figura se compone de una recta de longitud arbitraria* l, *y de una línea de forma arbitraria* L, *y si al mismo tiempo la longitud de la línea* L *es dada, ó es dada el área de la figura, ésta es un máximo, ó la línea* L *es un mínimo cuando la figura es un semicírculo.*

Toda figura que esté en las condiciones de este teorema puede ser considerada como la mitad de una figura simétrica, cuyo eje de simetría es la recta l, y cuyo perímetro es 2L; pero el área de la mitad es necesariamente un máximo si la figura entera es de área máxima; luégo este teorema es una consecuencia del teorema principal.

De aquí se deduce en particular que: *entre todos los segmentos de círculo correspondientes á arcos iguales ó de áreas iguales, el semicírculo es el de área máxima ó el de arco mínimo.*

2.° *Entre todas las figuras cuyo perímetro está compuesto de una recta dada* a *y de una línea arbitraria* L, *el segmento de círculo es la figura de área máxima para longitudes iguales de la línea* L *ó la de línea mínima* L *para áreas iguales.*

Supongamos que la línea L sea de forma cualquiera y que componga con la recta a el perímetro de la figura aL; se puede construir siempre sobre a un segundo de círculo cuyo arco α sea igual á L, quedando situados α y L á un mismo lado de a. Completemos el círculo, y designemos por $\mathfrak{C}$ el otro arco; entónces, el círculo cuyo perímetro es $\alpha + \mathfrak{C}$

es de mayor área que la figura limitada por $L + \delta$; así, $a\alpha + a\delta > aL + a\delta$; luégo $a\alpha > aL$.

De este teorema se desprende la siguiente regla general:

En toda figura cuya área deba ser un máximo bajo condiciones cualesquiera, cada porcion del perímetro que entre dos puntos cualesquiera tenga libertad en cuanto á la forma, debe ser un arco de círculo.

TEOREMA.

485. 1.° *Un polígono cuyos lados son de longitudes dadas, es de área máxima cuando es inscriptible en el círculo.*

Ante todo, observemos que, con lados dados $a, b, c, \ldots, l$, tales que el mayor a es menor que la suma de todos los demás, se puede formar un polígono convexo inscriptible y sólo uno. En efecto, describamos un primer círculo O bastante grande, para que, llevando cuerdas $AB = a$, $BC = b, \ldots, LM = l$, unas á continuacion de otras, á partir de un punto cualquiera A de la circunferencia, el extremo M de la última cuerda no llegue al punto de partida A. Supongamos que el centro O, situado primeramente dentro del segmento BCMA por encima de AB, recorre de un modo continuo la perpendicular OZ á AB en su punto medio, acercándose á AB el arco BCMA de la circunferencia variable, cuyo centro es O, y que pasa por A y B decrecerá, y como tiene por límite la recta AB, es decir, una longitud menor que $b + c + \ldots + l$, se ve que la extremidad M de la línea quebrada inscrita BC ... M se aproximará al punto A, llegará á coincidir con él en un instante, para pasar en seguida más allá. Habrá, pues, una posicion del centro O, y sólo una, para la cual la línea quebrada ABC ... M formará un polígono inscrito, como habiamos dicho.

Pues bien, sean S un círculo y P un polígono inscrito de lados conocidos $a, b, c, \ldots l$; siendo P′ un polígono cualquiera formado con los mismos lados, coloquemos sobre cada uno de los lados de este polígono P′ los segmentos circulares que existen sobre los lados correspondientes del polígono inscrito P. Obtendremos así una figura S′ limitada por arcos de círculo, cuyo perímetro es igual á la circunferencia del círculo S. Se tendrá, pues **(483)**, $S > S'$, y restando de estas dos áreas los segmentos circulares, se obtiene $P > P'$.

2.° *Entre todos los polígonos isoperímetros de un mismo número de lados, el polígono regular es de área máxima;* y recíprocamente, *entre los perímetros de todos los polígonos equivalentes de igual número de lados, el del polígono regular es un mínimo.*

En efecto, el máximo entre los polígonos isoperímetros de n lados debe tener desde luego todos sus lados iguales entre sí; porque si dos lados consecutivos AB y BC fueran desiguales, reemplazando el trián-

gulo ABC por un triángulo isósceles AB'C construido sobre la misma base y con igual perímetro, se tendria **(478)** una figura isoperímetra de n lados y de mayor área. Por consiguiente, pueden considerarse como dados los lados del polígono, siendo cada uno de ellos igual á la *nésima* parte del perímetro; además, en virtud de la primera parte ya demostrada, el polígono máximo debe ser inscriptible en el círculo. Luégo, en definitiva, el polígono máximo es regular.

Corolario.

486. Segun esto, cuando se trate de determinar el polígono de área máxima para un perímetro constante, ó el de perímetro mínimo para un área constante, siendo variable el número de lados deberemos ocuparnos tan sólo de comparar unos con otros los polígonos regulares. Se llega á la siguiente ley:

Las áreas de los polígonos regulares isoperímetros forman una serie creciente que empieza en la del triángulo y termina en la del círculo, y los perímetros de los polígonos equivalentes forman una serie decreciente desde el triángulo al círculo.

En efecto, dados dos polígonos regulares isoperímetros de diferente número de lados, por ejemplo, un pentágono ABCDE y un cuadrilátero $abcd$, se puede considerar este último como un pentágono que tiene un lado nulo; ó bien, tomando arbitrariamente un punto e sobre uno de los lados del cuadrilátero, por ejemplo, en ad, se puede considerar este cuadrilátero como un pentágono $abcde$, cuyo ángulo en e es igual á dos rectos: el cuadrilátero regular puede ser mirado, por consiguiente, como un pentágono irregular, luégo su área es menor que la del pentágono regular ABCDE.

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.

LIBRO V.

DEL PLANO.

§ I.—Primeras nociones sobre el plano.

DEFINICIONES.

487. El plano es una superficie tal, que si una recta tiene dos puntos en ella, la recta entera está contenida en la superficie (**5**). Esta superficie es ilimitada, pero para tenerla representada en un dibujo hay que limitarla; comunmente se representa el plano por un paralelógramo, indicando así que se limita por un rectángulo.

488. De la definicion del plano resulta que una recta y un plano no pueden estar más que en tres posiciones relativas:

1.ª Que la recta tenga dos puntos comunes con el plano; en tal caso toda ella estará situada en el plano.

2.ª Que la recta no tenga más que un punto comun con el plano; entónces se dice que la recta y el plano *se cortan*.

3.ª Que la recta no tenga ningun punto comun con el plano; se dice entónces que la recta y el plano *son paralelos*.

Cuando una recta CC' *(fig. 275)* y un plano P se cortan, se punto comun D divide á la recta CC' en dos partes DC y DC', situadas á uno y otro lado del plano, y esto por ser indefinidos el plano y la recta.

TEOREMA.

489. 1.° *Dos planos* P *y* Q *que tienen un punto* A *comun, tendrán comun toda una recta que pase por este punto;*

2.° *Si dos planos* P *y* Q *tienen comun una recta* AB *y un punto* C *exterior á ella, coinciden en toda su extension.*

En efecto:

1.° Tracemos por el punto comun A *(fig. 276)* dos rectas cualesquiera LAL', NAN' situadas en uno de los planos, por ejemplo en el Q. Si una de esas rectas tuviese comun con el plano P otro punto distinto del A, estaria contenida toda ella en este plano y quedaria demostrado el teorema, pues esa recta sería ya comun á los dos planos.

Supongamos que así no sea, y que las rectas LAL', NAN' corten al plano P. Escojamos dos puntos E y F en una y otra recta y que estén á diferente lado del plano P: pasando la recta EF de uno á otro lado de éste, le cortará necesariamente; sea I el punto de interseccion. La recta AI estará situada en los dos planos, puesto que los dos puntos A, I están en uno y otro plano.

2.° Unamos el punto C con dos cualesquiera E y F de AB *(fig. 277)* por las rectas indefinidas CE y CF; estas dos rectas pertenecerán á los planos P y Q, puesto que una y otra tienen dos puntos en cada uno de estos planos.

Ahora bien, si M es un punto cualquiera del plano P y trazamos por M en este plano una recta cualquiera MX, esta recta cortará, por lo menos, á dos de las rectas AB, CE, CF; los dos puntos de interseccion I, K son del plano Q, y por tanto, la recta entera MX estará en el plano Q; el punto M será, pues, de este plano, y como M es un punto cualquiera del plano P, queda probado que los dos planos P y Q coinciden.

Fig. 275.

Fig. 276.

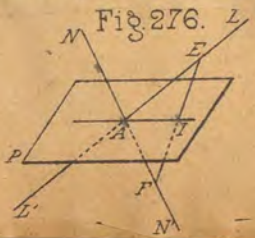
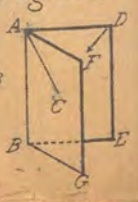


Fig. 277.

Fig. 278.



COROLARIOS.

490. *La interseccion de dos planos es una línea recta.*

Porque si los dos planos tienen comun un punto, tendrán comun toda una recta que pasa por este punto (**489**, 1.°), y no pueden tener comun un punto fuera de esa recta, porque en tal caso coincidirian (**489**, 2.°).

491. De las proposiciones que preceden resulta que dos planos *distintos* no pueden estar más que en dos posiciones relativas:

1.ª Tener comun una recta única; se dice entónces que *se cortan.*

2.ª No tener ningun punto comun, en cuyo caso se dice que *son paralelos.*

TEOREMA.

492. *Un plano está determinado:*

1.° *Por una recta* A B *y un punto* C *exterior á ella.*

2.° *Por tres puntos* A, B, C *no situados en línea recta.*

3.° *Por dos rectas* A B *y* A C *que se cortan.*

4.° *Por dos rectas paralelas.*

En efecto *(fig. 278):*

1.° Tómese un plano cualquiera A D E B que pase por A B, y hágasele girar alrededor de esta recta hasta que el punto C esté situado en él: el plano A F G B contiene entónces la recta A B y el punto C. Es único, porque otro plano que cumpliese con estas condiciones coincidiria con él (**489**, 2.°).

2.° El segundo caso se reduce al primero, si se nota que todo plano que contenga la recta A B y el punto C contiene los tres puntos A, B, C, y recíprocamente.

3.° El tercer caso se reduce tambien al primero, notando que todo plano que pase por A B y por un punto cualquiera de A C contiene las dos rectas A B, A C, y recíprocamente.

4.° Desde luégo dos rectas paralelas están siempre situadas por definicion (**56**) en un mismo plano. Este es el único plano

que las contiene, puesto que no hay más que un plano que pase por la primera y un punto de la segunda.

COROLARIOS.

493. *Por un punto* A *no se puede trazar en el espacio más que una paralela á una recta dada* DE. Porque *(fig. 278)* si AB es una paralela á DE que pasa por A, la recta AB estará situada en el plano ADE (**492**, 4.°). Habiendo de estar en este plano, se sabe que no se puede trazar por un punto más que una paralela á una recta (**59**).

494. Hemos indicado las posiciones relativas de una recta y un plano y las de dos planos. Para terminar estos preliminares, estudiemos las posiciones relativas de dos rectas.

Dadas dos rectas AB y CD de un modo cualquiera en el espacio, el plano P, trazado por AB y por un punto cualquiera D de CD, puede cortar á esta recta ó contenerla. En el primer caso *(fig. 275)* no existe ningun plano que contenga á la vez las dos rectas AB y CD, porque si existiera, tendria comun con el plano P la recta AB y el punto D, y, por consiguiente, coincidiria con él; y entónces éste, es decir, el plano P, contendria la recta CD contra lo supuesto. Las dos rectas AB y CD *no están situadas en un mismo plano,* y no pueden, por consiguiente, cortarse ni ser paralelas (**492**, 3.° y 4.°)

Así, pues, dos rectas distintas pueden estar en tres posiciones relativas:

1.° No están situadas en un mismo plano.

2.° Son paralelas.

3.° Se cortan.

En los dos primeros casos no tienen ningun punto comun; y así, *para probar el paralelismo de dos rectas en el espacio, no bastará, como en Geometría plana, demostrar que, prolongadas indefinidamente, no se cortan; se requerirá además demostrar que están situadas en un mismo plano.*

495. En apoyo de este principio, véanse dos ejemplos que conducen á conclusiones importantes:

Fig. 279.

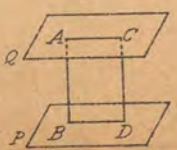
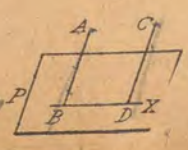


Fig. 280.



1.° Si una recta está situada en un plano y otra es paralela al mismo plano, es evidente que las dos rectas no tienen punto comun. Sin embargo, es necesario todavía que estén situadas en un mismo plano (y ya *es suficiente)* para que sean paralelas. Se enuncia esta proposicion diciendo: *Si por una recta* AC, *paralela á un plano* P, *se traza un plano* ACBD *que corte al* P, *la interseccion* BD *de los dos planos es paralela á* AC *(fig. 279).*

2.° Dos rectas situadas respectivamente en dos planos paralelos P y Q, no tienen evidentemente ningun punto comun. Para que sean paralelas se requiere, sin embargo (y *basta),* que estén situadas en un mismo plano. Se enuncia esta proposicion del siguiente modo: *Cuando dos planos paralelos* P *y* Q, *son cortados por un tercero* ACBD, *las intersecciones* AC *y* BD *son paralelas (fig. 279).*

§ II.—Rectas y planos paralelos.

TEOREMA.

496. *Si dos rectas* AB *y* CD *son paralelas, todo plano* P *que corte á una de ellas* AB *cortará tambien á la otra* CD *(figura 280).*

En efecto, puesto que la recta AB corta al plano P, el plano ABCD de las dos paralelas cortará á P, segun una recta PX, y ésta, por cortar á AB, cortará tambien á su paralela CD (**60**). Por consiguiente, CD tiene un punto comun con el plano P; no puede tener más que uno, porque de lo contrario coincidiria con BX y no sería paralela á AB, como se ha supuesto.

COROLARIOS.

497. *Si dos rectas son paralelas, todo plano que contenga á la primera ó que le sea paralelo contendrá á la segunda ó será paralelo á ella;* porque, si así no fuese, cortaria á esta segunda recta (**488**), y cortaria, por consiguiente, á la primera, contra lo supuesto.

498. *Si dos rectas* A *y* B *son paralelas, toda recta* C *paralela á la primera lo es tambien á la segunda ó coincide con ella.*

Ante todo se ve que, si C no coincide con B, estas dos rectas no pueden tener punto comun; porque, si así fuese, habria dos paralelas á A por ese punto. Para probar que C y B son paralelas basta, por tanto, probar que están en un mismo plano; es decir, que el plano determinado por la recta C y un punto de B contiene á toda esta recta; y, en efecto, si este plano cortase á B cortaria tambien á su paralela A, y cortando á A cortaria tambien á su paralela C, y hemos considerado que pase por ella.

Esta proposicion suele enunciarse de un modo breve, aunque incompleto diciendo: *dos rectas paralelas á una tercera, son paralelas entre sí.*

Escolios.

499. *La interseccion de dos planos paralelos á una misma recta, es paralela á esta recta;* porque si por un punto de la interseccion se traza una paralela á la recta que se considera, esta paralela deberá estar contenida en los dos planos (**497**).

500. Se puede considerar que dos planos que pasan por dos rectas paralelas son paralelos á una recta cualquiera paralela á las dos primeras (**497**); de aquí esta proposicion como caso particular de la anterior: *la interseccion de dos planos que pasan por dos rectas paralelas, es paralela á ellas.*

TEOREMA.

501. *Si dos planos* P *y* Q *son paralelos:* 1.°, *toda recta* D *que corte al primero* P, *corta tambien al segundo* Q; 2.°, *todo plano* R *que corte al primero* P, *corta al segundo* Q.

En efecto *(fig. 281):*

1.° Por un punto cualquiera I del plano Q, y por la recta D que corta en C al plano P, concibamos un plano R; teniendo ya éste un punto comun con cada uno de los dos dados, los

cortará segun dos paralelas CE y FI (**495**); y como CD corta á CE, cortará á su paralela FI, y por tanto al plano Q.

2.° En el plano R que corta al P segun CE, tracemos una recta CD no paralela á CE; cortando esta recta al plano P, cortará tambien á Q (1.°); luégo el plano R corta á Q.

COROLARIOS.

502. *Si dos planos son paralelos, toda recta paralela al primero ó contenida en él es paralela al segundo ó está contenida en él;* porque si cortase al segundo plano, tambien cortaria al primero.

503. *Si dos planos son paralelos, todo plano paralelo al primero lo es tambien al segundo ó coincide con él;* porque, si así no fuese, cortaria á este segundo plano (**491**), y cortaria, por consiguiente, al primero.

504. *Por un punto* A *exterior á un plano* A′B′C′ *se puede siempre trazar un plano paralelo á él, y uno solo (fig. 282).*

Tracemos, en efecto, por A dos rectas AB y AC paralelas al plano B′A′C′. El plano BAC será paralelo al B′A′C′, porque, si le cortase, su interseccion deberia ser paralela á la vez á AB y AC (**495**), lo cual es imposible. Además, todo plano que se trace por A diferente del BAC corta al B′A′C′, puesto que corta al plano BAC que es paralelo al B′A′C′ (**501**).

ESCOLIO.

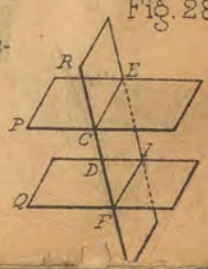
505. *Si por un punto* A *exterior á un plano* Q *se trazan rectas paralelas á este plano, el lugar geométrico de estas paralelas es el plano* P, *trazado por* A *paralelamente al plano* Q.

Porque toda paralela al plano Q trazada por A debe estar situada en el plano P ó ser paralela á él (**502**), y debe suceder lo primero, puesto que la recta que se considera tiene ya un punto A comun con el plano P.

TEOREMA.

506. *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente pa-*

Fig. 281.



ralelos son iguales ó suplementarios, y sus planos son paralelos (fig. 282).

1.° Los planos de los dos ángulos, son paralelos en virtud del núm. **504**.

2.° Dos ángulos BAC y B'A'C', cuyos lados AB y A'B', AC y A'C', son dos á dos paralelos y en el mismo sentido, son iguales. En efecto, tracemos por dos puntos cualesquiera B y C tomados respectivamente sobre los lados del ángulo A, rectas BB' y CC' paralelas á AA' hasta su encuentro en B' y C' con los lados del ángulo A'; las rectas BC y B'C' son paralelas como intersecciones de dos planos paralelos BAC, B'A'C' con el plano BB'CC'. Luego los dos triángulos BAC, B'A'C' son iguales por tener sus tres lados iguales uno á uno, como partes de paralelas comprendidas entre paralelas, y los ángulos BAC y B'A'C' serán, por consiguiente, iguales.

Por lo demás, se demostraria, como en Geometría plana, que dos ángulos cuyos lados son dos á dos paralelos y en sentidos contrarios, son iguales; y que dos ángulos que tienen dos lados paralelos y en el mismo sentido, siendo los otros dos paralelos y en sentidos contrarios, son suplementarios.

III

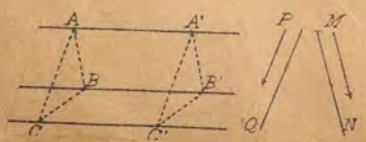
Escolios.

507. Sobre una recta cualquiera MN *(fig. 282)* hay que distinguir dos sentidos: el sentido de MN y el de NM.

Llámase *ángulo de dos rectas*, cuyas posiciones en el espacio y cuyos sentidos son dados, el ángulo que se forma trazando por un punto cualquiera del espacio una recta paralela y en el mismo sentido que cada una de las dadas. Así, siendo MN y PQ las dos rectas dadas, si trazamos por un punto cualquiera A del espacio AB paralela á MN y en el mismo sentido que ella, AC paralela á PQ y en su mismo sentido, el ángulo BAC será por definicion el ángulo de las dos rectas MN y PQ.

Para que esta definicion no aparezca contradictoria, hay que probar que la magnitud del ángulo así obtenido es independiente de la posicion que ocupe en el espacio el punto por

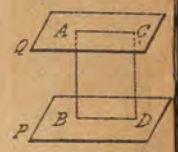
Fig. 282.



paralela al plano P ó situada en este plano es perpendicular á A, y, por consiguiente (**508**), lo es tambien á B.

2.° *Si dos planos* P *y* Q *son paralelos, toda recta* D *perpendicular al primero lo es tambien al segundo;* porque toda recta paralela al plano P ó situada en él es paralela al plano Q ó está situada en él (**502**).

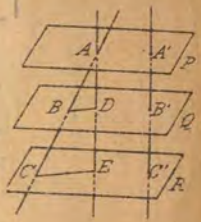
Fig. 283.



Estas dos proposiciones suelen enunciarse diciendo:

Dos rectas paralelas tienen sus planos perpendiculares comunes, y dos planos paralelos tienen sus perpendiculares comunes.

Fig. 284.



TEOREMA.

514. *Para que una recta* AB *sea perpendicular á un plano* P, *basta que lo sea á dos rectas* D *y* D' *no paralelas entre sí, y situadas en el plano* P *ó paralelas á él (fig. 285).*

Fig. 285.

Observemos ante todo que la recta AB encuentra al plano P; porque, si así no fuese, trazando por un punto del plano P paralelas á las rectas AB, D y D', se tendria en este plano (**497**) tres rectas concurrentes, de las cuales la primera sería perpendicular á las otras dos.

Pues bien, por el punto B en que la recta AB corta al plano P, tracemos paralelas Bd, Bd' y Bδ á las rectas D, D' y á una tercera recta cualquiera $\triangle$ paralela al plano P ó situada en él. las tres rectas Bd, Bd' y Bδ estarán contenidas en el plano P (**497**); AB será perpendicular á las dos primeras Bd, Bd' (**508**); y para dejar establecido el teorema bastará probar que AB es tambien perpendicular á la tercera recta Bδ.

Para esto tracemos por un punto cualquiera δ de Bδ, y en el plano P, una recta que no sea paralela á Bd ni á Bd'; las cortará en los puntos d y d'; prolónguese AB del otro lado del plano P en una longitud BA' = AB, y unamos cada uno de los puntos A y A' con los tres puntos d, δ y d'.

De la igualdad de los triángulos ABd y A'Bd, y de la de los triángulos ABd' y A'Bd', se deducen respectivamente Ad = A'd y Ad' = A'd'. Los dos triángulos Add' y A'dd' son, pues, iguales, y de esta igualdad se deduce la de los ángulos A$d\delta$ y A'$d\delta$,

y, por consiguiente, la de los triángulos $Ad\delta$ y $A'd\delta$, y, finalmente, la de las longitudes $A\delta$ y $A'\delta$.

Teniendo, pues, la recta $B\delta$ dos de sus puntos B y δ equidistantes de los extremos A y A', será perpendicular á AA' en su punto medio B; luégo á su vez AB es perpendicular á $B\delta$.

ESCOLIO.

515. El punto B en que la perpendicular AB corta al plano P, es el *pié* de la perpendicular.

Se dice que una recta es *oblicua* á un plano cuando le corta sin ser perpendicular á él.

TEOREMA.

516. *Por un punto dado* A *se puede siempre trazar un plano perpendicular á una recta dada* XY, *y no se puede trazar más que uno.*

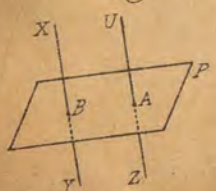
1.° Supongamos que el punto A esté situado sobre la recta XY *(fig. 286)*. Tracemos en dos planos diferentes que pasen por XY las perpendiculares AB y AC á esta recta en el punto A; dichas perpendiculares determinarán un plano P perpendicular á XY en el punto A (**514**).

No existe otro plano perpendicular á XY en el punto A. En efecto, todo plano trazado perpendicularmente á XY por el punto A debe cortar al plano XAB segun la perpendicular AB á XY (**512**), y al plano XAC segun la perpendicular AC á esa misma recta; luégo no es otro que el plano P.

Fig. 286.

2.° Supongamos que el punto A sea exterior á la recta XY *(fig. 287)*. Sea UZ la paralela á XY trazada por A. Teniendo las rectas paralelas XY y UZ sus planos perpendiculares comunes (**513**), decir que por el punto A se puede bajar un plano perpendicular á XY, y sólo uno, equivale á decir que por el punto A se puede levantar un plano perpendicular á UZ, y sólo uno, y esto ha quedado ya demostrado (1.°).

Fig. 287.



COROLARIO.

517. *Dos planos perpendiculares á una misma recta son pa-*

ralelos ó coinciden; porque, si se cortasen, se podrian trazar desde un punto de su interseccion dos planos perpendiculares á la misma recta, y acabamos de demostrar que esto es imposible.

TEOREMA.

518. *Por un punto dado* A *se puede siempre trazar una recta perpendicular á un plano dado* P, *y no más que una.*

1.° Supongamos que el punto esté situado en el plano P *(fig. 288)*. Consideremos por separado una recta OH y el plano Q levantado en uno de sus puntos H perpendicularmente á ella, y transportemos esta figura de una pieza, colocando el plano Q sobre el P, de manera que el punto H coincida con A. En su nueva posicion, la recta OH será una perpendicular AB levantada al plano P en el punto A.

No se puede trazar más que una, porque, si pudiese haber dos AB y AB', el plano BAB' cortaria al plano P, segun una recta AC, perpendicular á la vez á AB y á AB'.

2.° Supongamos que el punto A sea exterior al plano P *(fig. 289)*. Teniendo los planos P y Q sus perpendiculares comunes (**513**), decir que por el punto A se puede bajar una perpendicular al plano P, y no se puede bajar más que una, equivale á decir que por el punto A se puede levantar una perpendicular al plano Q, y no más que una, lo cual ha quedado ya demostrado (1.°).

COROLARIO.

519. *Dos rectas* A *y* B *perpendiculares á un mismo plano* P, *son paralelas ó coinciden.*

En efecto, si las rectas A y B tienen un punto comun, coinciden, puesto que desde ese punto no se puede trazar más que una perpendicular al plano P. Si las rectas A y B no tienen punto comun, imaginemos por un punto M de B la paralela A' á A; esta recta A' será perpendicular al plano P (**513**); luégo coincidirá con B, puesto que desde el punto M no se puede trazar más que una perpendicular al plano P.

Fig. 288.

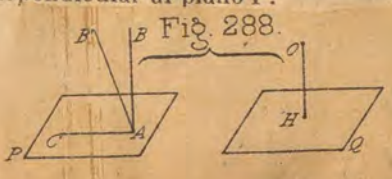


Fig. 289

Fig. 290.

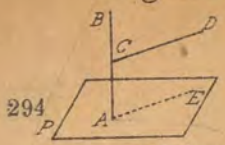


Fig. 291.

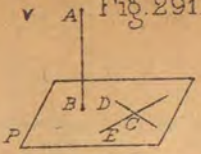
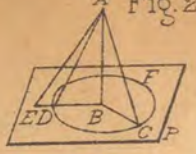


Fig. 292



Las proposiciones de los números **517** y **519** son las recíprocas de las del núm. **513**.

TEOREMA.

520. *Si una recta* AB *es perpendicular al plano* P, *toda perpendicular* CD *á la recta* AB *es paralela al plano* P *ó está contenida en él (fig. 290).*

En efecto, tracemos por el punto A la paralela AE á CD; el ángulo BAE será recto. Por consiguiente, la recta AE estará contenida en el plano P; porque, si así no fuese, el plano BAE cortaria á P segun otra perpendicular á AB (**512**), y se tendrian por el punto A y en el plano BAE dos perpendiculares á BA, lo que es imposible. Siendo, pues, la recta CD paralela á una AE del plano P, será paralela á este plano ó estará contenida en él (**497**).

Esta proposicion es la recíproca de la definicion adoptada en el núm. **512**.

COROLARIOS.

521. *El lugar geométrico de las perpendiculares que se pueden trazar á una recta* AB *por un punto* C, *es el plano* P *trazado por este punto perpendicularmente á la recta* AB *(fig. 291);* porque una cualquiera CD de estas perpendiculares debe ser paralela al plano P ó estar contenida en él; y habrá de ser esto último, puesto que ya tiene la recta CD un punto comun con el plano P.

522. *El lugar geométrico de los puntos del espacio equidistantes de los extremos de una recta* XY, *es el plano perpendicular á ésta en su punto medio (fig. 286).*

En efecto, en un plano cualquiera XYB que pase por XY, el lugar de los puntos equidistantes de los extremos de esta recta es la perpendicular AB levantada en este plano á XY en el punto A; pero acabamos de ver que el lugar de las diversas perpendiculares levantadas sobre XY por el punto A, es el plano trazado por este punto perpendicularmente á XY.

TEOREMA.

523. *Si desde un punto* A *exterior á un plano* P *(fig. 292) se baja la perpendicular* AB, *y diversas oblicuas* AC, AD, AE:

1.° *Dos oblicuas* AC *y* AD, *cuyos piés* C *y* D *equidistan del pié* B *de la perpendicular, son iguales.*

2.° *La perpendicular* AB *es más corta que toda oblicua* AC, *y de dos oblicuas* AC *y* AE, *la que más se separa del pié de la perpendicular es la mayor.*

En efecto:

1.° Los dos triángulos rectángulos ABC y ABD son iguales, por tener los dos catetos respectivamente iguales; luégo las hipotenusas AC y AD son iguales.

2.° Tomando $BD = BC$, se tiene (1.°) $AC = AD$ y por Geometría plana $AE > AD > AB$; se tiene, pues, $AB < AC$ y $AE > AC$.

524. Las recíprocas de estas proposiciones son ciertas. De donde resulta que *el lugar de los puntos de un plano* P *situados á igual distancia de un punto dado* A, *es una circunferencia cuyo centro es la proyeccion* B *de este punto sobre el plano (fig. 292).* De aquí un medio práctico para bajar una perpendicular á un plano P desde un punto exterior A: fíjese en el punto A uno de los extremos de un hilo provisto de un lápiz en su otra extremidad; márquense tres puntos C, D, F sobre el plano, teniendo tirante el hilo; búsquese el centro de la circunferencia que pasaria por esos tres puntos, y se tendrá el pié de la perpendicular pedida.

ESCOLIOS.

525. En Geometría, la palabra *distancia* se usa en el sentido de *mínima distancia*. Del núm. **523** se deduce que *la distancia de un punto* A *á un plano* P *es la longitud de la perpendicular bajada desde el punto al plano.*

Si se recuerda ahora lo dicho en los números **509** y **519**, se ve que: 1.°, *una recta y un plano paralelos son equidistantes*

en toda su extension; 2.°, dos planos paralelos son equidistantes en toda su extension.

§ IV.—Proyeccion de una recta sobre un plano.—Ángulo de una recta y un plano.—Mínima distancia entre dos rectas.

DEFINICIONES.

526. Llámase *proyeccion* de un punto A sobre un plano P el pié *a* de la perpendicular bajada de aquel punto sobre este plano *(fig. 293)*.

La proyeccion de una línea cualquiera ABC, ..., sobre un plano P, es el lugar de las proyecciones *a*, *b*, *c*, ..., de los diversos puntos de la línea.

TEOREMA.

527. *La proyeccion de una línea recta* AB *sobre un plano* P, *es una línea recta (fig. 294)*.

Porque todas las perpendiculares A*a*, B*b*, ..., bajadas sobre el plano P por los diversos puntos de la recta AB, son paralelas (**519**), y, por tanto, su lugar geométrico es un plano (**492**) y el de sus piés es la recta *ab*, segun la cual corta este plano al dado P.

Escolios.

528. Cuando la recta es, como EF, perpendicular al plano P, su proyeccion sobre este plano se reduce evidentemente á un punto *e*.

529. Cuando la recta es, como CD, paralela al plano P, ella es paralela á su proyeccion *cd* sobre este plano (**495**).

Corolario.

530. *Las proyecciones* ab *y* cd *de dos rectas paralelas* AB *y* CD *sobre un mismo plano* P, *son paralelas (fig. 295)*.

Fig. 293.

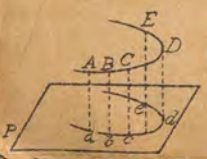


Fig. 294.

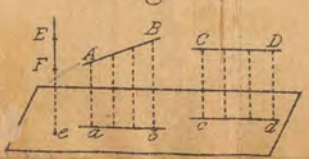


Fig. 295.

Fig. 296

Porque siendo paralelas la *proyectante* A*a* de un punto cualquiera de AB, y la proyectante C*c* de un punto cualquiera de CD, los ángulos B A*a*, D C*c* tienen sus lados paralelos (**506**), y, por tanto, las rectas *ab* y *cd*, segun las cuales corta el plano P á estos dos planos, son paralelas (*).

TEOREMA.

531. *Si dos rectas* AB *y* CD *son perpendiculares entre sí en el espacio, y una de ellas* CD *es paralela al plano* P, *sus proyecciones* ab *y* cd *sobre este plano son perpendiculares entre sí (fig. 296).*

En efecto, la proyeccion *cd* es perpendicular á AB por ser paralela á CD, que lo es por hipótesis; tambien es *cd* perpendicular á la proyectante A*a* por ser ésta perpendicular al plano de proyeccion P, en donde está contenida *cd*. Luego *cd* es perpendicular al plano AB*ab*, y por tanto á *ab*.

532. Recíprocamente, *si las proyecciones* ab *y* cd *de dos rectas* AB *y* CD *sobre un plano* P *son perpendiculares entre sí, y una de ellas* CD *es paralela á* P, *las rectas en el espacio* AB *y* CD *son tambien perpendiculares entre sí (fig. 296).*

En efecto, siendo la recta *cd* perpendicular á *ab* y A*a* lo es al plano AB*ba*. Su paralela CD lo será tambien, y por tanto será perpendicular á AB (*).

En el caso muy particular en que el plano P contiene á CD y las rectas AB y CD se cortan, esta recíproca equivale al teorema conocido por el nombre de *Teorema de las tres perpendiculares*, que se enuncia ordinariamente bajo esta forma, incómoda para las aplicaciones.

Si desde el pié a *(fig. 297) de una perpendicular* A a *á un plano* P *se traza la perpendicular* aB *á una recta* CD *situada*

(*) NOTA 22.

en este plano, la recta AB *que une el punto* B *con uno cualquiera* A *de la perpendicular* aA, *será perpendicular á* CD.

COROLARIO.

533. Consideremos una recta cualquiera AB *(fig. 298)*, y un plano Q perpendicular á esta recta; sean *ab* la proyeccion de AB sobre un plano cualquiera P, y CD la interseccion de los planos P y Q (que se llama la *traza* del plano Q sobre P). Las dos rectas AB y CD son perpendiculares entre sí, y, por consiguiente, las proyecciones *ab* y CD lo serán tambien. De aquí el siguiente teorema, fundamental en Geometría descriptiva: *Cuando una recta* AB *es perpendicular á un plano* Q, *su proyeccion sobre otro cualquiera* P *es perpendicular á la traza de* Q *sobre el mismo plano* P (*).

TEOREMA.

534. *Cuando una recta* AB *es oblicua á un plano* P, *el ángulo agudo* BAb *que forma con su proyeccion* ab *sobre dicho plano, es menor que el ángulo* BAC *que forma con otra recta cualquiera* CD *que pase por su pié en el plano (fig. 299).*

En efecto, sea *b* la proyeccion de un punto cualquiera B de la recta AB; tomemos AC = A*b*, y unamos B y C. Los triángulos BA*b* y BAC tienen dos lados iguales; pero el tercer lado B*b* del primero es menor que el tercer lado BC del segundo; luégo el ángulo BA*b* del primero será menor que BAC del segundo.

ESCOLIO.

535. Haciendo recorrer al punto C toda la circunferencia descrita desde el punto A como centro, y A*b* por radio en el plano P, se ve que la oblicua BC crece de un modo continuo desde el punto *b* hasta el punto *b'*, y decrece despues, volviendo á tener los mismos valores desde *b'* hasta *b*. Por tanto, el ángulo variable BAC, que es mínimo cuando el punto C

(*) NOTA 22.

Fig. 297.

Fig. 298.

Fig. 299.

Fig. 300.

está en b, crece hasta que el punto C esté en b'; es máximo entónces; despues decrece, volviendo á tener los mismos valores desde b' hasta b.

536. Llámase *ángulo de una recta con un plano* el agudo que la recta forma con su proyeccion sobre el plano.

537. Fácilmente se ve que *el ángulo de una recta* D *y un plano* P *es igual al de una recta cualquiera* D' *paralela á* D, *y un plano cualquiera* P' *paralelo á* P.

TEOREMA.

538. *Dadas dos rectas* AB *y* CD *no situadas en un mismo plano:* 1.°, *existe una recta, y sólo una, que las corta en ángulo recto;* 2.°, *esta perpendicular comun es la mínima distancia entre las dos rectas (fig. 300).*

En efecto:

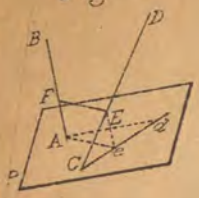
1.° Tracemos por un punto cualquiera A de AB la paralela AE á CD; el plano BAE, que llamaremos P, será paralelo á CD, y tendremos, por tanto, la proyeccion de CD sobre ese plano, trazando por la proyeccion d de un punto cualquiera de esa recta una paralela dc á ella. Pues bien, para que una recta corte á AB y CD en ángulo recto, es necesario y suficiente que sea perpendicular al plano P en un punto de AB, y que tenga su pié en uno de los puntos de cd (que es el lugar de los piés de las perpendiculares al plano P que cortan á CD). Ahora bien, la perpendicular al plano P, levantada por el punto c, comun á AB y cd, es la única que cumple con estas condiciones. Luégo existe una recta Cc, y sólo una, que corta en ángulo recto á las dos rectas AB y CD.

2.° Esta perpendicular comun Cc es menor que cualquiera otra recta BD que una un punto de AB con un punto de CD. Porque siendo Dd la proyectante del punto D, se tiene evidentemente $Cc = Dd$ y $Dd < DB$.

Escolios.

539. La demostracion que precede da ya el medio de ob-

Fig. 301.



tener la mínima distancia entre dos rectas AB y CD. Hé aquí un segundo procedimiento muy usado *(fig. 301)*:

Proyéctese una de las rectas CE sobre un plano P perpendicular á la otra AB. Bájese desde el pié A de AB la perpendicular A*e* sobre la proyeccion C*d* de CD; trácese *e*E paralela á AB hasta su encuentro en E con CD, y, por último, EF paralela á A*e*. El lector demostrará fácilmente que esta recta EF es, en magnitud y posicion, la mínima distancia de las dos rectas dadas.

540. En la práctica no se necesita á veces más que la longitud de la mínima distancia; para esto bastaria trazar por una de las rectas AB un plano paralelo á la otra CD y tomar la distancia D*d* de un punto cualquiera de CD al plano P *(fig. 300)*.

§ V.—Ángulos diedros.

DEFINICIONES.

541. Cuando dos planos P y Q se cortan *(fig. 302)* y se limitan en su interseccion BE, se dice que forman un *ángulo diedro*. Los dos planos P y Q son las *caras*, y la recta BE es la *arista* del ángulo.

542. Para designar un ángulo diedro aislado, basta indicar su arista; así se dice *(fig. 302)*: el ángulo diedro BE. Pero cuando varios ángulos diedros tienen la misma arista, para designar uno de ellos es preciso emplear cuatro letras, una para cada cara y dos para la arista, colocando las dos de la arista entre las otras dos. Así, en la *fig. 303* se distinguen los tres diedros CABD, DABE, CABE.

Dos ángulos tales como CABD, DABE *(fig. 303)* que tienen la misma arista AB, una cara comun ABD, y las otras dos caras á uno y otro lado de la cara comun, se llaman *adyacentes*.

543. Se dice que son *iguales* dos ángulos diedros cuando

Fig. 302.

Fig. 303

Fig. 304.

Fig. 305.

se les puede hacer coincidir. Para sumar dos ángulos diedros se lleva uno de ellos á ser adyacente del otro, como CABD con DABE *(fig. 303)*; el ángulo CABE de las dos caras no comunes ABC, ABE, es la *suma* de los dos ángulos diedros propuestos.

544. Se adquiere una idea clara de la magnitud del ángulo diedro suponiendo que una de las caras P, aplicada en un principio sobre la otra Q *(fig. 304)*, gira alrededor de la recta AB; el plano móvil P forma con el fijo Q un ángulo diedro que crece de un modo continuo en este giro.

Se dice que un plano P_2 *(fig. 304)* es *perpendicular* á otro QQ′ cuando los dos ángulos adyacentes que forma con éste son iguales. Se dice que un plano P es *oblicuo* á QQ′ cuando los ángulos adyacentes PABQ, PABQ′ son desiguales.

Se llama *ángulo diedro recto* todo diedro P_2ABQ en que una de sus caras es perpendicular á la otra.

545. Se llaman *opuestos por la arista* dos ángulos diedros cuando las caras de uno son prolongaciones de las del otro. Al cortarse dos planos indefinidos PP′ y QQ′ *(fig. 305)* forman cuatro ángulos diedros dos á dos, opuestos por la arista AB.

Llámase *plano bisector* de un ángulo diedro el plano trazado por la arista que divide al ángulo diedro en otros dos iguales entre sí.

546. Llámese *ángulo plano correspondiente á un ángulo diedro* el ángulo rectilíneo que se forma levantando por un mismo punto de la arista una perpendicular á ésta en cada una de las caras. Así, siendo B un punto de la arista BE del ángulo diedro PEBQ *(fig. 306)*, si se levantan en el plano P la perpendicular BA sobre la arista BE, y en el plano Q la perpendicular BC sobre dicha arista BE, el ángulo ABC será el ángulo plano del diedro que se considera.

Para que esta definicion no sea contradictoria, es necesario que la magnitud de un ángulo plano correspondiente á un

ángulo diedro sea la misma en cualquier punto de la arista en que se forme el ángulo plano. Y así es, porque en los ángulos planos ABC, DEF formados en dos puntos A y E de la arista del ángulo diedro PBEQ *(fig. 306)*, los lados BC y EF son paralelos y del mismo sentido, como perpendiculares á la misma recta BE en el plano Q, en el mismo BA y ED en el plano P; por tanto, los ángulos ABC, DEF son iguales.

Nótese que el plano ABC es perpendicular á la arista BE. Recíprocamente, todo plano perpendicular á la arista da por interseccion con las caras dos perpendiculares á la arista y con el ángulo diedro da por interseccion su ángulo plano.

TEOREMA.

547. *Por una recta* AB *situada en un plano* QQ′ *se puede levantar siempre un plano perpendicular á éste, y sólo uno (figura 304).*

COROLARIOS.

548. *Todos los ángulos diedros rectos son iguales.*

Las demostraciones de este teorema y su corolario, son análogas á las dadas en los números **14** y **15** de la Geometría plana.

Se llama *agudo* ú *obtuso* un ángulo diedro, segun que sea menor ó mayor que el ángulo diedro recto. Se llaman *complementarios* dos ángulos diedros cuando su suma es igual á un ángulo diedro recto.

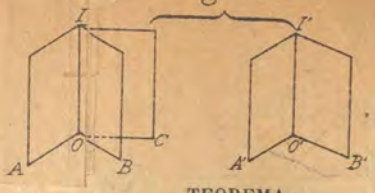
549. *Todo plano* P *que corta á otro* QQ′, *forma con éste dos ángulos diedros adyacentes* PABQ, PABQ′, *cuya suma es igual á dos diedros rectos (fig. 304).*

RECÍPROCAMENTE, *si dos ángulas diedros adyacentes* PABQ, PABQ′ *son suplementarios, es decir, que su suma es igual á dos diedros rectos, sus caras no comunes* Q *y* Q′ *quedarán en prolongacion una de otra.* (Véanse los números **17**, **18** y **19**.)

550. *Cuando dos planos* PP′ *y* QQ′ *se cortan, los diedros opuestos por la arista son iguales (fig. 305).* (Véase el núm. **22**.)

Fig. 306.

Fig. 307.



TEOREMA.

551. *La relacion de dos ángulos diedros es igual á la de sus ángulos planos.*

Basta (**135**) probar:

1.° *Que si dos ángulos diedros* AIOB, A'I'O'B' *son iguales, sus ángulos planos* AOB, A'O'B' *son iguales (fig. 307).*

2.° *Que si un ángulo diedro* AIOC *es la suma de otros dos* A'I'O'B', BIOC, *su ángulo plano* AOC *es la suma de los ángulos planos* A'O'B', BOC *que corresponden á los otros dos (figura 307).*

En efecto:

1.° Trasportemos el ángulo diedro A'I'O'B' de modo que el ángulo recto I'O'A' se aplique sobre el ángulo recto IOA; y puesto que los diedros AIOB, A'I'O'B' son iguales, el plano I'O'B' caerá sobre el plano IOB, y O'B' coincidirá con la perpendicular á IO levantada por el punto O en el plano IOB, es decir, con OB; luego los ángulos planos son iguales.

2.° Siendo el ángulo plano A'O'B' igual á AOI para probar que el ángulo plano AOC es igual á la suma de A'O'B' y de BOC, basta hacer ver que las tres rectas OC, OB, OA están en un mismo plano; esto resulta del núm. **521** (*).

Corolario.

552. Por consiguiente, *todo ángulo diedro tiene la misma medida que el ángulo plano correspondiente, con tal que se tome por unidad de ángulos diedros aquel que corresponde al ángulo plano escogido por unidad de ángulos planos;* ó más breve, aunque ménos correctamente, *todo ángulo diedro tiene por medida su ángulo plano.* (Véase para más detalle el núm. **136**.)

Escolios.

553. *El ángulo diedro recto tiene por ángulo plano un ángu-*

(*) NOTA 23.

lo recto; é inversamente, *un ángulo diedro es recto si su ángulo plano lo es.* En efecto, sean PABQ, PABQ' *(fig. 308)* dos ángulos diedros adyacentes formados por el encuentro del plano P con el QQ'; por un punto O de la arista AB tracemos un plano perpendicular á esta arista; este plano determinará por sus intersecciones con los planos P y QQ', dos ángulos rectilíneos adyacentes EOC, EOD, que serán los ángulos planos de los dos diedros propuestos. Ahora bien, cuando los dos diedros son iguales, los dos ángulos planos lo son, y recíprocamente.

554. La proporcionalidad entre los ángulos diedros y sus ángulos planos correspondientes permite deducir un gran número de propiedades en los ángulos diedros, de sus análogas en los ángulos rectilíneos demostradas en Geometría plana. Citaremos como ejemplo las proposiciones siguientes, que son á menudo útiles.

El plano bisector de un ángulo diedro es el lugar de los puntos que, estando en el interior del ángulo, equidistan de sus caras, etc. (Véanse los números **51**, **52**, **53**.)

Dos diedros que tienen sus caras paralelas dos á dos, son iguales ó suplementarios. (Véase el núm. **70**) (*).

TEOREMA.

555. *Entre todas las rectas que se pueden trazar por un punto* A *en un plano* P, *la que forma mayor ángulo con otro dado* Q *es la perpendicular* AB *bajada del punto* A *sobre la interseccion* LT *de los dos planos* P *y* Q *(fig. 309).*

(*) No es cierta la proposicion recíproca que diria:

Si dos ángulos diedros son iguales ó suplementarios, y tienen dos de sus caras paralelas, las otras dos lo serán tambien.

Esta recíproca sólo sería cierta si se impusiera la restriccion de ser paralelas las aristas de los dos diedros. Se demuestra fácilmente.

(Nota de los T.)

Fig. 308.

Fig. 309.

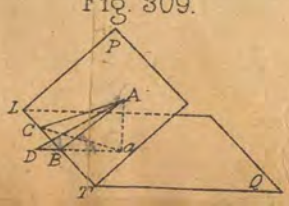
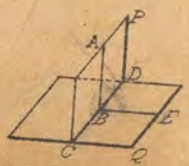


Fig. 310.



Sean AC una recta cualquiera trazada por el punto A en el plano P, y *a* la proyeccion del punto A sobre el plano Q; *a*B, *a*C serán las proyecciones de AB y AC, y se trata de demostrar (**536**) que el ángulo AB*a* es mayor que el ángulo AC*a*. En efecto, siendo *a*B perpendicular á LT (por el teorema de las tres perpendiculares), la *a*C es oblicua y se tiene *a*B < *a*C, luego si se toma sobre *a*B, á partir del punto *a*, una longitud *a*D igual á *a*C, el punto D caerá fuera del segmento *a*B, y el ángulo AB*a*, exterior al triángulo ABD, será mayor que el interior AD*a*; pero los triángulos A*a*C y A*a*D son iguales por tener un ángulo recto igual comprendido entre lados iguales, y, por tanto, el ángulo AD*a* es igual á su homólogo AC*a*; luégo, en fin, el ángulo AB*a* es mayor que AC*a*.

Escolio.

556. Cuando el plano Q es horizontal, la recta AB se llama *línea de máxima pendiente* del plano P, el ángulo de esta línea con el Q es el ángulo plano del diedro PLTQ. Por cada punto de un plano pasa una línea de máxima pendiente de este plano, y sólo una.

§ VI.—Planos perpendiculares.

TEOREMA.

557. *Si dos planos* P *y* Q *son perpendiculares entre sí, toda recta* AB *trazada en el primer plano* P, *perpendicularmente á la interseccion comun* CD, *es perpendicular al otro plano* Q *(fig. 310).*

En efecto, siendo perpendiculares entre sí los dos planos P y Q, el ángulo plano correspondiente al diedro PCDQ debe ser recto; pero este ángulo plano ABE se forma levantando en el plano Q, y por el punto B, la perpendicular BE á CD; luégo la recta AB es perpendicular á BE, y como tambien lo es por hipótesis á CD, lo es al plano Q.

TEOREMA.

558. *Si una recta* AB *es perpendicular á un plano* Q, *todo plano* P *que pase por esta recta ó sea paralelo á ella es perpendicular al plano* Q.

En efecto:

1.° Si el plano P pasa por AB *(fig. 310)*, tracemos en el plano Q, y por el punto B, la perpendicular BE á la interseccion CD de los dos planos P y Q. El ángulo ABE será recto, puesto que la recta AB es por hipótesis perpendicular al plano Q; este ángulo ABE es además el ángulo plano del diedro PCDQ; luego este diedro es recto, y el plano P es perpendicular á Q.

2.° Si el plano P es paralelo á AB *(fig. 311)*, tracemos por un punto cualquiera E de este plano la paralela EF á AB; esta recta EF será perpendicular al plano Q y estará situada en el P. Luego el plano P, que pasa por una recta EF perpendicular al plano Q, será perpendicular á este plano (1.°)

559. Recíprocamente, *si dos planos* P *y* Q *son perpendiculares entre sí, toda recta* AB *perpendicular á uno de ellos* Q, *está situada en el otro* P *ó le es paralela.*

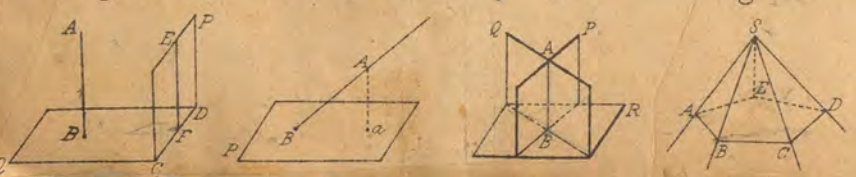
En efecto, si la recta AB no tuviese más que un punto comun con el plano P, bajando desde ese punto una perpendicular sobre la interseccion CD de los planos P y Q, esa perpendicular lo sería al plano Q, y se podrian bajar desde un mismo punto dos perpendiculares á un plano, lo que es imposible. No pudiendo, pues, la recta AB cortar al plano P, está situada en él ó le es paralela.

Corolario.

560. *Por una recta* AB, *oblicua á un plano* P *(fig. 312), se puede hacer pasar un plano perpendicular á éste, y sólo uno.*

En efecto, el plano BA*a*; determinado por la recta AB y la perpendicular A*a* al plano P, bajada desde un punto cualquiera de AB, es perpendicular al plano P. Es único, porque todo

Fig. 311. Fig. 312. Fig. 313 Fig. 314.



plano trazado por AB perpendicularmente á P debe contener á la recta A*a*.

TEOREMA.

561. *Si dos planos* P *y* Q *son perpendiculares á un tercero* R, *su interseccion* AB *es perpendicular á este tercero (fig. 313).*

Porque si por un punto de la interseccion AB se baja la perpendicular al plano R, esta perpendicular debe estar situada á la vez en los planos P y Q (**559**), coincide, pues, con AB.

COROLARIOS.

562. Un plano perpendicular á otros dos que se cortan, lo es á su interseccion.

563. Si los planos P y Q de la *fig. 313* forman un ángulo diedro recto, los tres planos P, Q, R serian perpendiculares entre sí; la interseccion de dos cualesquiera de ellos será perpendicular al tercero, y las tres intersecciones serán perpendiculares entre sí (*).

§ VII.—Ángulos poliedros.

DEFINICIONES.

564. Cuando varios planos ASB, BSC, CSD, ..., *(figura 314)* se cortan sucesivamente segun rectas SB, SC, SD, ..., que concurren en un mismo punto S, se dice que forman un *ángulo poliedro*. El punto S es el *vértice*, las rectas SA, SB, ... son las *aristas*, y los ángulos ASB, BSC, CSD, ... son las *caras* del ángulo poliedro.

Se designa un ángulo poliedro por la letra del vértice se-

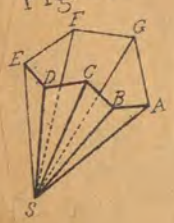
(*) NOTA 24.

guida de las letras relativas á las aristas. Así, para indicar el ángulo poliedro de la *fig. 314*, se dirá el ángulo SABCDE, ó más sencillamente el ángulo S, porque basta la letra del vértice cuando el ángulo poliedro está aislado.

Son necesarios tres planos por lo menos para formar un ángulo poliedro.

El ángulo formado por tres planos, se llama *ángulo triedro*. En un ángulo triedro BACS *(fig. 314)* se distinguen seis elementos, á saber: las tres caras SBA, SBC, ABC, y los tres diedros BA, BC, BS.

Fig. 315.

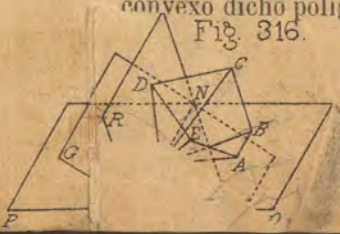


565. Se dice que un ángulo poliedro es *convexo* cuando queda todo él hácia un mismo lado con relacion al plano indefinido de una cualquiera de sus caras *(fig. 314)*; es *cóncavo* en el caso contrario *(fig. 315)*. Todo ángulo triedro es convexo.

Consideremos un ángulo poliedro convexo SABCDE *(figura 316)*; sus aristas estarán todas situadas, segun la definicion de convexidad, á un mismo lado del plano PQ de una cualquiera SAB de las caras; en la *fig. 316* las hemos colocado por encima del plano. Ahora bien, tracemos en el plano PQ, y por el punto S, una recta MN exterior al ángulo ASB, y concibamos una serie de planos trazados por la recta MN y cada una de las aristas sucesivas SC, SD, SE. Si DSM (ó RNM) es entre todos ellos el que forma menor ángulo con la parte PMN del plano PQ, el ángulo poliedro propuesto SABCDE quedará enteramente en el interior del diedro RMNQ, que forman la parte anterior Q y la superior R de los dos planos PQ y RT. Luégo todo plano GH que se trace por MN, y situado en el ángulo diedro PMNR, y en su opuesto por la arista QMNT, será un plano trazado por el vértice que dejará todas las aristas á un mismo lado. Por consiguiente, todo plano paralelo á GH, y situado á la derecha de GH (como el ángulo poliedro), cortará á todas las aristas de éste sin pasar por su vértice. La seccion, será, pues, un polígono ABCDE, que tendrá tantos lados como caras el ángulo poliedro; y será convexo dicho polígono porque hallándose todo el ángulo po-

Fig. 318.

Fig. 316.



liedro á un mismo lado con respecto al plano de una cualquiera de sus caras, el polígono habrá de quedar forzosamente todo entero hácia un lado con respecto á cada una de las rectas indefinidas que unen dos vértices consecutivos.

566. Si se prolongan más allá del vértice S todas las aristas de un ángulo poliedro SABCDE *(fig. 317)*, se obtiene otro SA'B'C'D'E', que se llama simétrico del primero.

Dos ángulos poliedros simétricos SABCDE, SA'B'C'D'E' tienen todos sus elementos respectivamente iguales; las caras ASB y A'SB', BSC y B'SC' lo son dos á dos, como ángulos rectilíneos opuestos por el vértice, y los diedros SA y SA', SB SB',..., lo son dos á dos como opuestos por la arista. Pero la disposicion de los elementos iguales no es la misma en los dos ángulos poliedros.

Fig. 317.

En efecto, si un observador se colocara á lo largo de la arista SA con la cabeza en S y los piés en A, y mirara al interior del ángulo SABCDE, veria las aristas en el órden SB, SC, SD, SE de derecha á izquierda; mientras que si el observador se colocara del mismo modo en el otro ángulo SA'B'C'D'E', es decir, á lo largo de SA', teniendo la cabeza en S y los piés en A' y mirara al interior de este otro ángulo, veria las aristas en el órden inverso SE', SD', SC', SB' de derecha á izquierda.

Por esta diferente disposicion, *dos ángulos poliedros simétricos, aunque tienen iguales todas sus partes, no son superponibles.*

En efecto, consideremos como ejemplo dos triedros simétricos SABC y SA'B'C' *(fig. 318)*, y supongamos, para fijar las ideas, que la arista SC esté por delante del plano ASB, y, por consiguiente, su prolongacion SC' esté por detrás del mismo plano. Hay dos maneras distintas de ensayar la superposicion de los triedros.

1.° Concibamos *(fig. 318)* la perpendicular levantada en el punto S al plano ASB, y hagamos girar al triedro SA'B'C' 180° alrededor de esta recta en el sentido de la flecha *f;* la

arista SA', que no sale en este movimiento del plano ASB, caerá sobre SA, y del mismo modo SB' se aplicará sobre SB; pero la arista SC' permanecerá detrás del plano ASB, y el triedro SA'B'C' no coincidirá, por tanto, en su nueva posicion con el SABC.

2.° Tracemos *(fig. 319)* la bisectriz xSy del ángulo BSA', y alrededor de esta recta (que está situada en el plano ASB) hagamos girar al triedro SA'B'C' 180° en el sentido de la flecha ψ. La arista SA' coincidirá con SB, y la SB' con SA, y la cara A'SB' coincidirá, por tanto, con la cara BSA; además, la arista SC' vendrá á estar por delante del plano ASB. Pero la nueva posicion SC_1 de esta arista será, en general, distinta de SC; porque siendo en general desiguales los diedros SA y SB, desiguales serán SB y SA'; y, por tanto, no estando los planos CSB y C_1SB igualmente inclinados sobre el plano ASB, no coincidirán.

Fig. 319.

Se ve, sin embargo, que la coincidencia tendria lugar si en el triedro SABC fuesen iguales los diedros SA y SB. Porque, en este supuesto, los planos CSB y C_1SB estarian igualmente inclinados sobre el plano ASB, y caerian uno sobre otro, lo mismo que los planos C_1SA y CSA; por consiguiente, las aristas SC y SC_1 se confundirian. Obsérvese que en este caso la cara $C'SA' = ASC$ coincide con CSB; de suerte que la igualdad de los ángulos diedros SA y SB conduce á la de las caras CSB y CSA.

Luégo, en resúmen, *para que un triedro sea superponible á su simétrico, es necesario y suficiente que tenga dos ángulos diedros iguales, y en tal caso, las caras opuestas á los diedros iguales tambien lo son.*

TEOREMA.

567. *En todo ángulo poliedro, una cara cualquiera es menor que la suma de todas las demás.*

Es evidente que sólo hay que demostrar esta proposicion

Fig. 320.

Fig. 321.

en el caso de ser la cara que se considera mayor que una cualquiera de las otras.

Pues bien, consideremos ante todo un ángulo triedro SABC *(fig. 320)*. Formemos en la cara ASB (que suponemos mayor que cada una de las otras dos) un ángulo ASD igual á ASC, y tomemos sobre las rectas SC y SD, á partir de S, longitudes iguales SC y SD. Tracemos por el punto D una recta ADB que corte á las aristas SA y SB en A y B; y finalmente, unamos el punto C con A y B. La igualdad de los triángulos ASD y ASC que tienen un ángulo igual comprendido entre lados iguales, hace ver que AD = AC; y como se tiene

$$AB = AD + DB < AC + CB,$$

se ve que el segmento DB es menor que CB. Por consiguiente, los triángulos CSB y DSB, que tienen SB comun, SC = SD, DB < DC, hacen ver (**40**) que el ángulo DSB < CSB. Luégo, añadiendo los ángulos iguales ASD y ASC, se tendrá

$$ASD + DSB, \text{ ó } ASB < ASC + CSB.$$

Para hacer extensivo el teorema á un ángulo poliedro cualquiera basta descomponerlo en triedros, para lo cual se trazan planos diagonales ASC, ASD *(fig. 317)* por una de las aristas SA y las demás, y se ve inmediatamente la demostracion.

Corolario.

568. *En todo ángulo triedro, á mayor ángulo diedro se opone mayor cara.*

Sea *(fig. 321)* el triedro SABC, en el cual el ángulo diedro SC es mayor que SB. Se podrá trazar por la arista SC, y en el diedro SC, un plano CSD que forme con el plano CSB un diedro igual á SB. El triedro SBCD tiene dos diedros iguales; luégo las caras opuestas BSD y CSD serán iguales. Pero el triedro SACD nos da

$$ASC < ASD + DSC;$$

luégo, reemplazando la cara DSC por su igual DSB,

$$ASC < ASD + DSB, \text{ ó } ASC < ASB.$$

Uniendo este teorema al que ha sido demostrado al final del núm. **566**, y razonando como en el núm. **37**, se verá que:

RECÍPROCAMENTE, *si en un ángulo triedro hay dos caras iguales los diedros opuestos lo serán; y habiendo dos caras desiguales, á mayor cara se opone mayor diedro.*

ESCOLIO.

569. *Si por el vértice* S *de un ángulo triedro se traza en su interior una recta cualquiera* SO, *la suma de los ángulos* OSB *y* OSC *es menor que la suma de las caras* ASB *y* ASC.

Si dos ángulos triedros tienen dos caras respectivamente iguales y el diedro comprendido en el uno es mayor que en el otro, la tercera cara del primero será mayor que la tercera del segundo.

Estas proposiciones son análogas á las de los números **31** y **33**; se demuestran absolutamente del mismo modo. Es inútil hacer nuevas figuras; basta mirar las *figuras 24, 25, 26 y 27* como secciones planas de los triedros que se consideran, suponiendo, por ejemplo, que los vértices de los triedros están por delante del plano de estas secciones.

TEOREMA.

570. *En todo ángulo poliedro convexo, la suma de las caras es menor que cuatro ángulos rectos (fig. 322).*

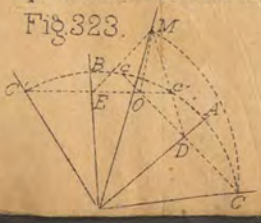
En efecto, sea ABCDE un polígono *convexo* obtenido al cortar el ángulo poliedro por un plano que encuentre á todas las aristas (**567**). Sumando las desigualdades

$$EAB < EAS + SAB,$$
$$ABC < ABS + CBS,$$
$$BCD < BCS + DCS,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

que nos ofrecen los triedros A, B, C, ..., (**567**), se ve que la

Fig. 322.

Fig. 323.



suma de los ángulos interiores del polígono A B C D E es menor que la suma de los ángulos en la base de los triángulos S A B; S B C, S C D, ..., que tienen un vértice en S. Pero la suma de todos los ángulos interiores y exteriores del polígono A B C D E valdria lo mismo que la suma de todos los ángulos de los triángulos cuyo vértice comun está en S. Luégo la suma de los ángulos en S de estos triángulos, es decir, la suma de las caras del ángulo poliedro es menor que la suma de los exteriores del polígono; esto es, menor que cuatro ángulos rectos.

Escolios.

571. De los dos teoremas precedentes (**567, 570**) resulta que, para que se pueda formar un ángulo triedro con tres caras dadas, *es necesario* que la mayor de ellas sea menor que la suma de las otras dos, y que la suma de las tres sea menor que cuatro rectos. Vamos á probar que estas dos condiciones necesarias *son suficientes.*

Sean *(fig. 323)* A S B la mayor cara, y A S C, B S C′ las otras dos rebatidas sobre el plano de la primera á uno y otro lado de ésta; S C y S C′ son las dos posiciones á que llega la tercera arista por uno y otro rebatimiento.

Describamos desde el punto S como centro un arco de círculo C C′ con un radio arbitrario; este arco será menor que una circunferencia, puesto que la suma de las tres caras dadas es menor que cuatro ángulos rectos. Siendo C c y C′ c' las cuerdas trazadas desde los puntos C y C′ perpendicularmente á las aristas S A y S B, serán iguales entre sí los arcos A C y A c, y lo mismo los arcos B C y B c'; por consiguiente, la desigualdad

$$\text{arco AB} < \text{arco BC} + \text{arco BC'},$$

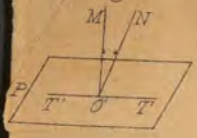
que expresa que la cara mayor A S B es menor que la suma de las otras dos, puede escribirse

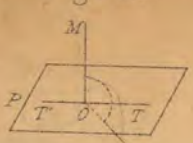
$$\text{arco AB} < \text{arco A}c + \text{arco B}c';$$

y esta desigualdad muestra que el punto c cae entre B y c'; que c' cae entre c y A, y, por consiguiente, que las dos cuerdas C c y C′ c' se cortan en un punto O interior á la circunferencia C C′.

Levantemos en el punto O la perpendicular O M al plano A S B; describamos en el plano D O M, desde el punto D como centro y con D C por radio, un arco de círculo que cortará necesariamente á la perpendicular O M, puesto que O D es menor que D C. Sea M el punto de interseccion, y tracemos S M: el triedro S A B M está formado con las tres caras dadas. En efecto, si se trazan M D y M E, estas rectas serán res-

Fig. 324. Fig. 325.





pectivamente perpendiculares á SA y SB por el teorema de las tres perpendiculares; por consiguiente, los dos triángulos SDM y SDC son iguales, por tener un ángulo recto comprendido entre dos lados respectivamente iguales; se ve, por tanto, que la cara ASM es igual á la dada ASC, y además, que SM es igual á SC. Esto último hace ver que los triángulos rectángulos SME y SC'E tienen la hipotenusa igual, y como un lado es comun, queda probada su igualdad; por consiguiente, la cara MSB es igual á la otra dada BSC'.

TEOREMA.

572. *Si un ángulo triedro* SA'B'C' *(fig. 326) es el suplementario de un triedro dado* SABC, *éste será recíprocamente el suplementario de* SA'B'C'.

Para comprender bien la definicion del triedro suplementario y el objeto del teorema enunciado, conviene hacer una observacion. Si trazamos por un punto O de un plano P *(fig. 324)* una perpendicular OM á este plano y una oblicua ON, y las dos rectas OM y ON *están hácia un mismo lado del plano* P, el ángulo MON que forman es *agudo*, porque está comprendido en uno de los ángulos rectos MOT ó MOT' que forma la perpendicular OM con la traza TOT' del plano MON sobre P. Si las dos rectas OM y ON *están á uno y otro lado del plano* P, el ángulo MON es *obtuso (fig. 325)*, porque contiene á uno de los ángulos rectos MOT ó MOT'. Luégo, recíprocamente, se puede afirmar que la perpendicular OM y la oblicua ON están á un mismo lado, ó á uno y otro lado, segun que el ángulo MON sea agudo ú obtuso.

Pues bien, se llama *triedro suplementario* de otro dado SABC *(fig. 326)* un nuevo triedro formado del modo siguiente:

Levántese una perpendicular SC' á la cara ASB hácia el mismo lado que SC, con respecto al plano de esta cara; levántese SB' perpendicular á la cara ASC y del mismo lado que SB, con respecto al plano de esta cara, y levántese, finalmente SA' perpendicular á la cara BSC hácia el mismo lado que SA, con respecto al plano BSC.

Se trata ahora de demostrar que el triedro SABC resultaria del triedro SA'B'C', como éste del primero; ó en otros térmi-

Fig. 327. Fig. 328. Fig. 329

nos, que la arista SC, por ejemplo, es perpendicular á la cara A'SB' y está hácia el mismo lado que SC', con relacion al plano de esta cara. En efecto, SA' es por hipótesis perpendicular al plano CSB, y por tanto á SC; del mismo modo SB' es perpendicular á SC; luégo SC es perpendicular al plano A'SB'. Además, habiendo sido trazada SC' perpendicular al plano ASB y del mismo lado que SC, el ángulo CSC' es agudo; por consiguiente, la perpendicular SC al plano A'SB' y la oblícua SC', que forma ángulo agudo, están á un mismo lado con respecto á este plano.

TEOREMA.

573. *Si* SABC *y* SA'BC' *son dos triedros suplementarios, cada ángulo diedro del uno es suplementario de la cara opuesta en el otro (fig. 327).*

Se demuestra este teorema fundándose en la siguiente observación:

Cuando por un punto O *de la arista de un ángulo diedro* OI *se levanta una perpendicular* OA' *á la cara* IOA *hácia el mismo lado del plano* IOA *que está la cara* IOB, *y á la cara* IOB *una perpendicular* OB' *del mismo lado del plano* IOB *que está la cara* IOA, *el ángulo* A'OB' *es suplemento del ángulo plano* AOB *que mide al diedro (figuras 328, 329).*

Las cuatro rectas OA, OB, OA', OB' están en el plano levantado por O perpendicularmente á OI; además, OA', perpendicular al plano IOA, lo es á OA, y del mismo modo OB' lo es á OB: los ángulos AOB y A'OB' son, pues, dos ángulos situados en un mismo plano, y cuyos lados son perpendiculares; para probar que son suplementarios basta, pues, hacer ver que son siempre de distinta especie; es decir, uno agudo y otro obtuso. Pero esto resulta de las direcciones que se imponen en el enunciado á las perpendiculares OA' y OB'. En efecto, si el ángulo AOB es agudo *(fig. 328)*, el ángulo A'OB' encierra el recto AOA', y es, por tanto, obtuso; si el ángulo AOB es obtuso *(fig. 329)*, el A'OB' está contenido en el recto A'OA, y por tanto es agudo.

Pues bien, volviendo á los triedros suplementarios SABC y SA'B'C' *(fig. 327)*, y considerando, por ejemplo el diedro SC, se ve que la recta SB' es una perpendicular á la cara CSA de este diedro, y hácia el mismo lado que SB, ó lo que es lo mismo, del mismo lado que la otra cara CSB: del mismo modo, SA es una perpendicular á la cara CSB del diedro y hácia el mismo lado que la cara CSA; luégo el ángulo A'SB' es suplemento del ángulo que mediria al diedro SC, ó más brevemente, del diedro SC. Lo mismo se procederá para los diedros SA y SB.

Puesto que los dos triedros SABC y SA'B'C' se deducen uno de otro por la misma construccion, es claro que la propiedad que acabamos de establecer para los diedros del primero es aplicable á los del segundo. La demostracion seria, por lo demás, la misma.

Por esta doble propiedad es que se ha llamado *suplementarios* á los dos triedros.

Escolios.

574. Tomando por unidad de ángulos el recto, si llamamos a, b, c los números de medida de las caras, y por A, B, C los de medida de los diedros de un ángulo triedro, se obtendrán los números de medida a', b', c' y A', B', C' de las caras y diedros del triedro suplementario por las fórmulas siguientes:

$$a' = 2 - A, \qquad A' = 2 - a,$$
$$b' = 2 - B, \qquad B' = 2 - b,$$
$$c' = 2 - C, \qquad C' = 2 - c,$$

Si se conoce una propiedad cualquiera de un ángulo triedro, es decir, una relacion entre los elementos a, b, c y A, B, C de esta figura, aplicándola al triedro suplementario en sus elementos a', b', c' y A', B', C', y despues sustituyendo en lugar de estos sus valores dados por las fórmulas precedentes, se obtendrá una nueva relacion entre a, b, c, A, B, C, que corresponderá á una propiedad nueva del triedro primitivo.

Del mismo modo toda propiedad en que figuren varios triedros *conducirá*, por la consideracion de los triedros suplementarios, á una propiedad nueva de ese sistema de triedros.

Se concibe, en vista de esto, la importancia del teorema precedente. Veamos algunas aplicaciones del método general que acabamos de indicar.

575. Hemos visto (**570**) que la suma de las caras de un triedro estaba siempre comprendida entre cero y cuatro ángulos rectos. Busquemos el teorema correspondiente, ó, como se dice, el teorema *correlativo*. Consideremos para ello el triedro suplementario del propuesto, y siendo a', b', c' sus caras, se tiene,

$$0 < a' + b' + c' < 4.$$

Si A, B, C son los diedros del triedro propuesto, se tendrá, pues,

$$0 < (2 - A) + (2 - B) + (2 - C) < 4.$$

ó bien

$$6 > A + B + C > 2.$$

La proposicion pedida es, por tanto, la siguiente: *En todo triedro, la suma de los ángulos diedros está comprendida entre dos y seis rectos.*

Hemos visto tambien **(567)** que en todo triedro la mayor cara es menor que la suma de las otras dos. ¿Cuál es el teorema correlativo?

Sean a', b', c' las caras del triedro suplementario; siendo a' la mayor, se tiene

$$a' < b' + c';$$

por consiguiente, si A, B, C son los diedros del triedro propuesto, se tendrá:

$$(2 - A) < (2 - B) + (2 - C), \qquad \text{ó} \qquad A + 2 > B + C.$$

Si se nota que á mayor ángulo corresponde menor suplemento, A debe ser el menor de los diedros A, B, C, puesto a' es la mayor de las caras a', b', c'. La proposicion pedida es, pues, la siguiente: *En todo triedro, el menor ángulo diedro aumentado en dos rectos, es mayor que la suma de los otros dos.*

576. En resúmen, para que se pueda formar un ángulo triedro con tres diedros dados, *es necesario* que su suma esté comprendida entre dos y seis rectos, y que el menor, aumentado en dos rectos, sea mayor que la suma de los otros dos.

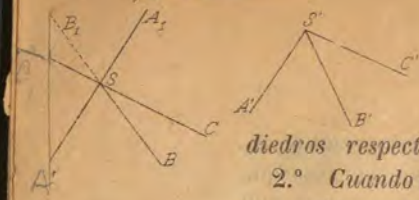
Estas condiciones *son suficientes*, porque, cuando se cumplen, los suplementos a', b', c' de los ángulos dados A, B, C satisfacen á las dos condiciones del núm. **571**, y se puede con las tres caras a', b', c' construir un triedro; por consiguiente, en su suplementario se tendrá un triedro cuyos diedros son los ángulos dados A, B, C.

TEOREMA.

577. *Dos ángulos triedros son iguales:*

1.° *Cuando tienen una cara igual adyacente á dos ángulos*

Fig. 330.



diedros respectivamente iguales y semejantemente dispuestos.

2.° *Cuando tienen un diedro igual comprendido entre dos caras respectivamente iguales y semejantemente dispuestas.*

3.° *Cuando tienen sus caras iguales una á una y semejantemente dispuestas.*

4.° *Cuando tienen sus diedros iguales uno á uno y semejantemente dispuestos.*

1.° Sean los dos triedros SABC y S'A'B'C' *(fig. 330)*. La cara ASB es por hipótesis igual á A'S'B', y los ángulos diedros SA y S'A' son iguales, como tambien lo son SB y S'B'. Se supone además que la disposicion es la misma; es decir, que si un observador con la espalda apoyada sobre la cara ASB y la cabeza en S mirando hácia SC, tiene á su izquierda la arista SA y á su derecha la SB, otro observador con la espalda apoyada sobre la cara A'S'B' y la cabeza en S' mirando á S'C', tendria á su izquierda S'A' y á su derecha S'B'.

En estas condiciones, los triedros son superponibles. En efecto, si se coloca la cara A'S'B' sobre su igual ASB de modo que S'A' caiga sobre SA y S'B' sobre SB, la arista S'C' quedará del mismo lado que SC con respecto al plano ASB; porque, si no, la disposicion de los elementos sería diferente en los dos triedros. Ahora bien, siendo iguales los diedros SA y S'A', el plano A'S'C' coincide con el plano ASC, y del mismo modo, por ser iguales los diedros SB y S'B', el plano B'S'C' se pone sobre el plano BSC; luégo las aristas SC y S'C' se confunden y los dos triedros coinciden.

2.° El segundo caso resulta del precedente y es su *correlativo* (**575**). En efecto, los dos triedros suplementarios de los propuestos tienen una cara igual adyacente á dos diedros respectivamente iguales y semejantemente dispuestos; luégo son superponibles, y lo son, por consiguiente, los triedros primitivos.

La demostracion directa no ofreceria dificultad; por un razonamiento análogo al precedente (1.°), se ve que la superposicion es posible si (como se indica en el enunciado) la disposicion de los elementos es la misma.

Fig. 331.

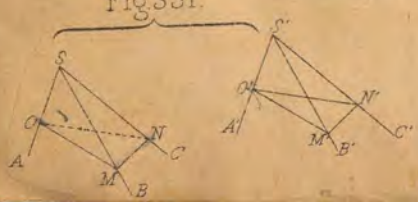
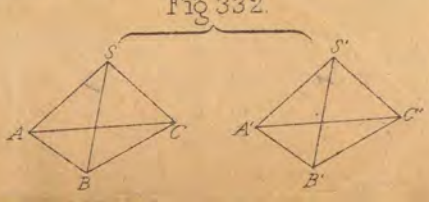


Fig. 332.



3.° Para el tercer caso se podria seguir una marcha idéntica á la de la Geometría plana; es decir, demostrar este teorema como el del núm. **34** (3.°), pasando por las proposiciones análogas á las de los números **33** y **34** (2.°).

Hé aquí una demostracion directa: Basta evidentemente demostrar *(fig. 331)* la igualdad de dos diedros homólogos, SA y S'A' por ejemplo.

Supongamos primero que las dos caras ASB y ASC, que comprenden al diedro SA, sean dos ángulos agudos. En un punto cualquiera O de la arista SA, formemos el ángulo plano correspondiente al diedro SA; en otros términos, levantemos por el punto O perpendiculares á SA en los planos ASB y ASC; siendo agudos los ángulos ASB y ASC, estas perpendiculares cortan á las aristas SB y SC en dos puntos M y N, que unimos por una recta. Tómese S'O' = SO, y constrúyase del mismo modo en O' el ángulo plano M'O'N' del diedro S'A'. Se trata de demostrar la igualdad de los dos ángulos planos MON y M'O'N'. Pero los dos triángulos rectángulos SOM y S'O'M' son iguales, por tener un lado igual adyacente á dos ángulos iguales, y lo mismo los triángulos SON y S'O'N'; por consiguiente, los dos triángulos SMN y S'M'N' tienen un ángulo igual comprendido entre lados iguales; y, por último, los triángulos OMN y O'M'N' tienen los tres lados iguales uno á uno. De la igualdad de estos triángulos se deduce que son iguales los ángulos MON y M'O'N'.

Supongamos ahora que los ángulos ASB y ASC que comprenden al diedro SA sean cualesquiera, y tomemos *(fig. 332)* seis longitudes iguales SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C' sobre las aristas de los dos triedros.

Los triángulos isósceles ASB y A'S'B'; BSC y B'S'C'; CSA y C'S'A' son iguales dos á dos, por tener un ángulo igual comprendido entre lados iguales; por consiguiente, los triángulos ABC, A'B'C' son iguales por tener los tres lados respectivamente iguales. Segun esto, los triedros A y A' tienen sus caras respectivamente iguales; y como los ángulos SAB, SAC que comprenden al diedro AS son agudos por ser ángulos en

la base de triángulos isósceles, en virtud del razonamiento hecho ántes, el diedro AS es igual al diedro A′ S′.

4.° El último caso resulta del precedente por ser su *correlativo*. En efecto, los dos triedros suplementarios de los propuestos tendrán sus caras respectivamente iguales y semejantemente dispuestas; serán, pues, superponibles, y por tanto lo serán tambien los primitivos.

Escolio.

578. Si en cualquiera de los cuatro casos considerados los elementos tuvieran una disposicion diferente en los dos triedros, no habria ya *igualdad* sino *simetría*. En efecto, sean T y T′ los dos triedros propuestos, y T_1 el simétrico de T; es decir, el que se deduce de éste prolongando sus aristas hácia el otro lado del vértice *(fig. 330)*. Los triedros T y T_1 tienen sus elementos iguales é inversamente dispuestos; por consiguiente, como T y T′ cumplen por hipótesis las condiciones de uno de los casos de igualdad, excepto la relativa á la disposicion de los elementos, los triedros T′ y T_1 satisfarán á todas las condiciones del caso de igualdad que se considere, y serán superponibles, y es, por tanto, T′ superponible al simétrico de T.

579. Ha quedado en todo este párrafo bastante señalada la analogía entre algunas propiedades de los triedros y de los triángulos rectilíneos. Observemos, sin embargo, al concluir, que, si á toda propiedad de los triángulos corresponde una de triedros, no es cierta la recíproca; así, por ejemplo, de la igualdad de los diedros en dos triedros se deduce la de las caras, mientras que en los triángulos de la igualdad de los ángulos no se deduce más que la proporcionalidad de los lados.

§ VIII.—Apéndice.

CUADRILÁTERO ALABEADO.

580. Se dice que un cuadrilátero ABCD *(fig. 333)* es *alabeado* cuando sus cuatro lados no están en un mismo plano. Para obtenerlo

bastaria llegar á tener comun un lado AC que fuese igual en dos triángulos ABC, ADC, sin que sus planos coincidiesen.

TEOREMA.

581. *Cuando un plano* P *corta á los cuatro lados de un cuadrilátero alabeado* ABCD *en cuatro puntos* a, b, c, d, *(fig. 333), se tiene la siguiente relacion de segmentos:*

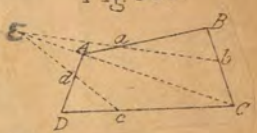
$$(1) \qquad \frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}=+1.$$

En efecto, haciendo aplicacion del teorema de Menelao (**308**) á los dos triángulos ABC y ADC, respectivamente cortados por las transversales ab y cd, y observando que estas se cortan en el punto ε en que la diagonal AC es cortada por el plano P, se tienen las igualdades

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{\varepsilon C}{\varepsilon A}=1,\quad \frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}\cdot\frac{\varepsilon A}{\varepsilon C}=1,$$

cuyo producto es precisamente la relacion (1).

Fig. 333



582. Recíprocamente, *si sobre los cuatro lados de un cuadrilátero alabeado* ABCD *se tienen cuatro puntos* a, b, c, d, *tales que se cumple la relacion de segmentos* (1), *esos cuatro puntos estarán en un mismo plano (fig. 334).*

Porque el plano P, determinado por los tres puntos b, c, d, corta al lado AB en un un punto a', tal que (**581**).

$$\frac{a'A}{a'B}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}=1;$$

y comparada esta relacion con la (1) que por hipótesis se verifica, aparece

$$\frac{aA}{aB}=\frac{a'A}{a'B},$$

proporcion que obliga á la coincidencia de los puntos a y a' (**306**).

Corolarios.

583. La relacion (1) queda satisfecha si se tiene

$$\frac{aA}{aB}=\frac{cD}{cC}\quad\text{y}\quad\frac{bB}{bC}=\frac{dA}{dD}.$$

De aquí el siguiente teorema:

Si una recta ac *divide en partes proporcionales á dos lados opuestos* AB *y* DC *de un cuadrilátero alabeado* ABCD, *y si otra recta* bd *divide tambien proporcionalmente á los otros dos lados opuestos* BC *y* AD, *esas dos rectas estarán en un mismo plano (fig. 334).*

En el caso particular en que el plano transversal P es paralelo á los dos lados opuestos BC y AD, los dos puntos *b* y *d* se alejan al infinito, las dos relaciones $\frac{bB}{bC}$ y $\frac{dD}{dA}$ se reducen á la unidad y la relacion (1) se convierte en

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{cC}{cD} = 1 \text{ ó } \frac{aA}{aB} = \frac{cD}{cC}$$

luego: *todo plano* P *paralelo á dos lados opuestos* BC *y* AD *de un cuadrilátero alabeado* ABCD, *divide proporcionalmente á los otros dos.*

Por lo demás, la demostracion directa de este teorema es muy sencilla: si por cada una de las rectas BC y AD se imagina un plano paralelo á P, aparecen dos rectas AB y CD cortadas por tres planos paralelos; luego, etc. (**510**).

Recíprocamente, *toda recta* ac *que divida proporcionalmente á dos lados opuestos* AB y CD *de un cuadrilátero alabeado* ABCD, *está situada en un plano paralelo á los otros dos lados* AD *y* BC.

Porque si se imagina el plano trazado por *c* paralelamente á las rectas AD y BC, este plano debe dividir al lado AB (en virtud del teorema directo) en partes proporcionales á *c*C y *c*D; este plano pasará, pues, por el punto *a* y contendrá por tanto á la recta *ac*.

RELACION ANARMÓNICA DE CUATRO PLANOS.

584. Es fácil ver que, *si cuatro planos* A, B, C, D *pasan por una misma recta, la relacion anarmónica del haz de cuatro rectas determinado por un plano transversal cualquiera es independiente de la posicion de este plano transversal.* Porque las cuatro rectas *a, b, c, d,* determinadas por un primer plano P, y las cuatro *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, determinadas por un segundo P', se cortan dos á dos en cuatro puntos $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma, \delta$, situados sobre la interseccion de los planos P y P' y la relacion anarmónica de los puntos $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma, \delta$ es igual (**323**) á la de las rectas *a, b, c, d,* lo mismo que á la de las rectas *a'*, *b'*, *c'*, *d'*.

Por esto se da el nombre de *relacion anarmónica de un haz de cuatro planos* que pasan por una misma recta á toda relacion anarmónica del haz de cuatro rectas determinado por un plano transversal cualquiera.

585. *Si cuatro planos pasan por una misma recta, toda transversal los encuentra en cuatro puntos cuya relacion anarmónica es igual á la de*

Fig. 334.

los cuatro planos. Porque estas dos relaciones no son otras que la del haz de cuatro rectas determinado por un plano cualquiera que contenga la transversal (**323, 384**).

Se llama *armónico* un haz de cuatro planos A, B, C, D que pasan por una misma recta, cuando la relacion anarmónica (A, B, C, D) de estos cuatro planos es igual á — 1, Entónces, todo plano transversal ó toda secante determina un sistema armónico de cuatro rectas ó de cuatro puntos.

PROYECCION CENTRAL Ó PERSPECTIVA.

586. El teorema del núm. **527,** relativo á la proyeccion de una recta sobre un plano, subsiste cuando las proyectantes de los diversos puntos de la recta son oblicuas al plano, con tal que sean paralelas entre sí ó divergentes desde un mismo punto del espacio, porque las proyectantes están tambien, en uno ú otro caso, todas situadas en el plano de una de ellas y de la recta que se proyecta.

Se llega así á generalizar el sentido de la palabra *proyeccion.*

Se llama *ortogonal, oblicua* ó *central,* segun que la proyectante M*m* sea perpendicular al plano P, ó paralela á una direccion dada oblicua á este plano, ó, finalmente, que parta de un punto fijo S en el espacio.

La proyeccion ortogonal, oblicua ó central de una figura es el lugar de las proyecciones ortogonales , oblicuas ó centrales de sus diversos puntos, suponiendo en los dos últimos casos que la direccion oblicua de las proyectantes, ó que el centro S de proyeccion no cambie cuando se pasa de un punto á otro de la figura que se proyecta.

La *perspectiva* de una figura sobre un cuadro P no es otra cosa que la proyeccion central de esta figura sobre el plano P, tomando por centro S de proyeccion la posicion del punto de vista.

Segun esto, el teorema del núm. **585,** puede enunciarse del siguiente modo:

Si cuatro rectas concurrentes están situadas en un mismo plano, y se construye su proyeccion ortogonal, oblicua ó central sobre un plano cualquiera, se obtienen cuatro rectas concurrentes, cuya relacion anarmónica es igual á la de las cuatro primeras.

El teorema del núm. **530** relativo á las proyecciones de dos rectas paralelas y su demostracion, son aplicables en proyeccion *oblicua* pero no en proyeccion *central.* Acerca de esta proyeccion central ó *perspectiva,* daremos algunas definiciones y expondremos algunos principios fundamentales cuyo conocimiento es indispensable.

587. Llámase *recta de frente* toda recta paralela al plano del cuadro, y *plano de frente* todo plano paralelo al del cuadro.

Llámase *traza de una recta* D el punto *t* en que corta dicha recta al cuadro P *(fig. 335)* y *traza de un plano* la recta segun la cual corta dicho plano al del cuadro. Una recta de frente no tiene traza, ó por mejor decir, su traza está en el infinito; lo mismo puede decirse de un plano de frente. Cuando una recta SF pasa por el centro S de proyeccion, su perspectiva se reduce á un punto *f*, que es su traza. Cuando un plano pasa por el centro de proyeccion, todos sus puntos tienen sus perspectivas en la traza del plano.

Se llama *punto de fuga de una recta* D no paralela al cuadro la traza *f* de la paralela S*f* á esta recta por el centro S de proyeccion. Cuando un punto M se aleja cada vez más sobre la recta D, la proyectante SM de este punto tiende hácia la posicion S*f*, y la perspectiva *m* del punto M tiende hacia *f;* el punto de fuga *f* de una recta D es, pues, la perspectiva del punto en el infinito de esta recta.

Cuando varias rectas D, D′, D″ *no paralelas al cuadro son paralelas entre sí,* tienen el mismo punto de fuga; *sus perspectivas* d, d′, d″ *concurren*, pues, en este punto *f*.

Una recta de frente Δ no tiene punto de fuga, ó más bien su punto de fuga está en el infinito, tiene *por perspectiva una recta* δ, *que es paralela á ella,* porque su plano proyectante pasa por una recta Δ paralela al cuadro, y corta á éste, por consiguiente, segun una paralela δ á dicha recta. De aquí resulta que *si varias rectas de frente son paralelas entre sí, sus perspectivas lo son tambien.*

Las rectas de frente paralelas entre sí no son las únicas rectas que tengan sus respectivas paralelas. *Para que varias rectas* D, D′, D″, ... *(fig. 336) tengan sus perspectivas* d, d′, d″, ... *paralelas entre sí, es necesario y basta que corten á una misma recta de frente* S U *que pasa por el centro* S *de proyeccion.* La condicion es, en efecto, *necesaria,* porque si las trazas *d, d′, d″*, ... de los planos proyectantes S*td*, S*t′ d′*, S*t″ d″*, ... son paralelas, estos planos se cortan segun una recta S U paralela (**500**) á *d, d′, d″*, ..., es decir, segun una recta de frente que es cortada por las rectas dadas D, D′, D″, ... Es *suficiente* la condicion, porque, si se cumple, los planos proyectantes S*a*D, S*a*D′, S*a*D″, ... pasan por una misma recta de frente S U, y, por consiguiente, tienen sus trazas *d, d′, d″*, ... paralelas á esta recta (**495**). En el caso muy particular que indicamos antes, las rectas D, D′, D″, ... cortan en el infinito á la recta de frente S U.

588. Se llama *línea de fuga* de un plano Q no paralelo al cuadro P la traza FF_1 del plano Q_1, trazado por el centro S de proyeccion paralelamente al plano Q *(fig. 337)*. Varios planos paralelos tienen, por consiguiente, la misma línea de fuga.

Cuando una recta D *es paralela á un plano* Q *ó está situada en él, su*

punto de fuga f *está en la línea de fuga* FF_1 *del plano;* porque la paralela S*f* á D trazada por S está contenida en el plano Q_1 (**497**).

Los puntos en el infinito de todas las rectas del plano Q tienen, segun esto, sus perspectivas en la línea de fuga FF_1 de este plano; y como la perspectiva de una línea plana cuyo plano no contiene al centro S de proyeccion no es una recta sino cuando la línea misma es recta, se ve que *se está en el caso de considerar todos los puntos en el infinito de un plano como situados en línea recta.* Se llama esta recta *la recta en el infinito del plano* Q.

Fig. 335.

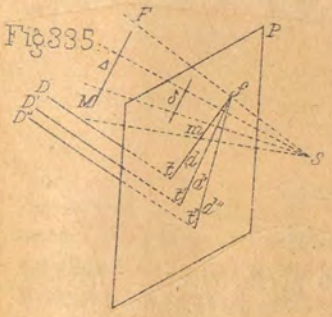


Fig. 336.

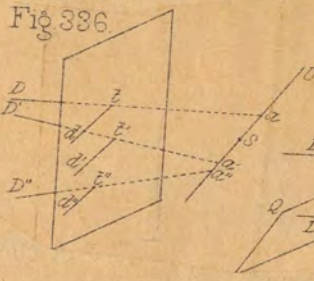
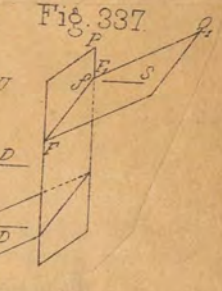


Fig. 337.



BIBLIOTECA DEL CENTENARIO

LIBRO VI.

POLIEDROS.

§ I.—Propiedades generales y área lateral del prisma.

DEFINICIONES.

589. Se llama *poliedro* el cuerpo geométrico limitado en todos sentidos por planos.

Al limitarse mutuamente estos planos, determinan las *aristas, caras* y *vértices* del poliedro. Los ángulos diedros y poliedros formados por las caras, son los ángulos diedros y poliedros del cuerpo. Se llaman *diagonales* las rectas que unen dos vértices cualesquiera no situados en una misma cara.

Se han dado nombres particulares á ciertos poliedros, segun el número de sus caras. Así, el poliedro de cuatro caras se llama *tetraedro*. Los nombres de *exaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro,* corresponden á los poliedros de seis, ocho, doce, veinte caras.

590. Se llama *convexo* un poliedro cuando queda por entero hácia un solo lado del plano de una cualquiera de sus caras prolongada indefinidamente.

Una recta cualquiera no puede cortar á la superficie de un poliedro convexo en más de dos puntos. Porque todo plano que pase por la recta corta necesariamente á la superficie del po-

liedro segun un polígono convexo (**73**), cuyo perímetro da con la recta los mismos puntos de interseccion que la superficie del poliedro.

En lo que sigue no trataremos sino de poliedros convexos.

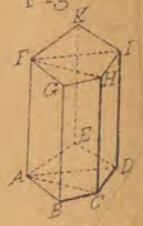
591. Se distinguen particularmente el *prisma* y la *pirámide*.

El *prisma* es un poliedro cerrado por varios paralelógramos unidos por dos caras opuestas, iguales y paralelas.

Se construye un prisma del modo siguiente:

Sea *(fig. 338)* ABCDE un polígono plano cualquiera. Tracemos por el vértice A la recta AF no situada en el plano del polígono, y por el punto F un plano paralelo al ABCDE; y por los vértices B, C, D, E trácense las rectas BG, CH, DI, EK, paralelas á AF hasta su interseccion con el plano trazado por el punto F. Estas rectas son todas iguales á AF (**510**); todas las caras ABGF, BCHG, CDIH, etc., son, por consiguiente, paralelógramos. Además, los dos polígonos paralelos ABCDE, FGHIK son iguales por tener sus lados iguales y paralelos. El poliedro obtenido es, pues, un prisma.

Fig. 338.



592. Si la recta AF es perpendicular al plano ABCDE, el prisma se llama *recto;* en el caso contrario es *oblicuo*.

Las rectas AF, BG, CH, etc., son las *aristas laterales* del prisma, y la suma de las áreas de los paralelógramos ABGF, BCHG, etc., forma su área lateral.

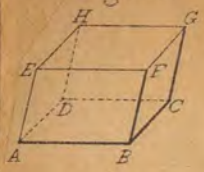
El prisma tiene por *bases* los dos polígonos iguales y paralelos ABCDE, FGHIK, y su *altura* es la distancia entre los planos de las bases.

593. En un prisma recto, cada arista lateral es igual á la altura. Sus caras laterales son rectángulos.

En un prisma oblicuo, la altura es menor que la arista lateral.

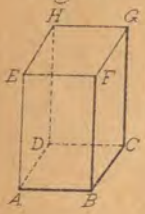
Un prisma *regular* es un prisma recto que tiene por bases polígonos regulares.

Fig. 339.



594. Segun que las bases de un prisma son triángulos, cuadriláteros, pentágonos, exágonos, etc., se dice el prisma *triangular, cuadrangular, pentagonal, exagonal,* etc.

Fig. 340.



595. Entre los prismas cuadrangulares se distinguen los que tienen por bases paralelógramos y se llaman *paralelepípedos.*

Todas sus caras son paralelógramos *(fig. 339).*

Un paralelepípedo puede ser *recto* ú *oblicuo* (**592**). Entre los rectos se distingue el *paralelepípedo rectángulo* cuyas bases son rectángulos. Todas sus caras son rectángulos *(fig. 340).*

Llámese *cubo* al paralelepípedo rectángulo cuyas bases y caras laterales son cuadrados, necesariamente iguales *(fig. 341).*

Nótese que, al deformar los ángulos para pintar la perspectiva, la *fig. 340* representa tanto un paralelepípedo recto como uno rectángulo.

596. Del mismo modo que se llaman dimensiones de un rectángulo á las longitudes de dos lados adyacentes, llámanse *dimensiones* de un paralelepípedo rectángulo las longitudes de tres aristas contiguas, es decir, que partan de un mismo vértice. El paralelepípedo rectángulo AG *(fig. 340)* tiene por dimensiones las longitudes de las aristas AB, AD, AE.

TEOREMA.

597. *Las caras opuestas de un paralelepípedo son iguales y paralelas.*

Sea *(fig. 342)* el paralelepípedo AG. Sus bases ABCD, EFGH, son, por definicion, paralelógramos iguales y paralelos. Sólo debemos probar que dos caras laterales opuestas ADHE y BCGF, por ejemplo, lo son. En efecto, AD y BC son iguales y paralelas como lados opuestos del paralelógramo ABCD; AE y BF lo son tambien en el paralelógramo ABFE. Por consiguiente, los dos ángulos DAE, CBF son iguales, y sus planos son

Fig. 341.

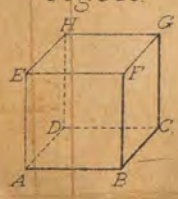


Fig. 342.

Fig. 343.

paralelos, y los dos paralelógramos ADHE, BCGF son, por tanto, iguales y paralelos.

COROLARIOS.

598. Siendo el paralelepípedo un prisma cerrado por seis paralelógramos iguales y paralelos dos á dos, *se pueden tomar como bases del paralelepípedo dos caras opuestas cualesquiera* (**591**).

599. *Todo plano que corte á dos caras opuestas de un paralelepípedo, le corta segun un paralelógramo.* Sea IKLM *(fig. 342)* el plano que corta á las dos caras opuestas ADHE y BCGF del paralelepípedo AG.

Es la interseccion un paralelógramo, puesto que sus lados opuestos son paralelos como intersecciones de dos planos paralelos con un tercero.

ESCOLIO.

600. Para construir un paralelepípedo dadas tres aristas AB, AD, AE que parten de un mismo punto A y no están situadas en un mismo plano *(fig. 342)*, basta trazar por cada uno de los extremos B, D, E de esas aristas un plano paralelo al determinado por las otras dos. Asi, por el punto E un plano paralelo al BAD, por D uno paralelo al BAE, y por B uno paralelo al DAE, el poliedro limitado por los seis planos, será un paralelepípedo.

TEOREMA.

601. *Las cuatro diagonales de un paralelepípedo, se cortan mutuamente en partes iguales.*

Sea el paralelepípedo AG *(fig. 343)* y sus cuatro diagonales AG, CE, BH, DF. Siendo las dos aristas AE y CG iguales y paralelas, la figura ACGE es un paralelógramo cuyas diagonales AG y CE se cortan mutuamente en partes iguales en el punto O. Siendo tambien un paralelógramo la figura ABGH, sus diagonales AG y BH se cortan mutuamente en partes igua-

les; es decir, en el punto medio O de AG. Lo mismo se probaria que la cuarta diagonal DF pasa por O y queda por él dividida en partes iguales.

Escolios.

602. Llámase *centro* de un paralelepípedo el punto de interseccion de sus cuatro diagonales.

Toda recta KL que pase por el punto O y esté limitada por la superficie del poliedro *(fig. 343)*, queda dividida por el punto O en partes iguales. En efecto, el plano determinado por esa recta y la diagonal AG corta á las dos caras opuestas ADHE y BCGF, segun las paralelas AK y GL, y los dos triángulos AOK y GOL son, por consiguiente, iguales.

603. Si el paralelepípedo que se considera es rectángulo, todos los paralelógramos de la figura son rectángulos. El paralelógramo ABGH, por ejemplo, es entónces un rectángulo, porque la arista AB es perpendicular á la cara ADHE. Siendo iguales las diagonales de un rectángulo, *las cuatro diagonales de un paralelepípedo rectángulo serán iguales.*

Fig. 344

604. En la hipótesis precedente, los dos triángulos HAB y HDA son rectángulos y dan:

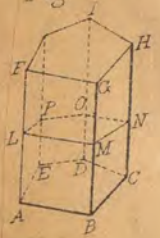
$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2; \qquad \overline{AH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2;$$

luégo

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2.$$

Por consiguiente: *el cuadrado de la diagonal de un paralelepípedo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones.*

Fig. 345.



Siendo un cubo un paralelepípedo rectángulo, cuyas dimensiones son iguales, *el cuadrado de la diagonal de un cubo es igual al triple del cuadrado de su arista.*

TEOREMA.

605. *Las secciones hechas en un prisma por dos planos paralelos, son dos polígonos iguales.*

Sean LMNOP, QRSTU *(fig. 344)* las secciones hechas en el prisma AH por dos planos paralelos. Los lados de estas secciones son dos á dos paralelos, como intersecciones de planos paralelos con un tercero, é iguales como paralelas comprendidas entre paralelas; luégo los polígonos tienen sus lados y ángulos iguales.

COROLARIOS.

606. Cuando el plano secante es paralelo á la base del prisma, la seccion obtenida es igual á dicha base.

Si se supone las aristas laterales del prisma prolongadas indefinidamente, la demostracion precedente es aplicable, ya sean las secciones interiores, exteriores, ó en parte interiores y en parte exteriores al prisma. Basta que los planos secantes corten á todas las aristas laterales.

607. Se llama *seccion recta* de un prisma la seccion determinada en este prisma por un plano perpendicular á sus aristas laterales.

TEOREMA.

608. *El área lateral de un prisma tiene por medida el producto del perímetro de su seccion recta por la arista lateral.*

Sean *(fig. 345)* el prisma AH y su seccion recta LMNOP. Los lados de esta seccion recta son las alturas de los paralelógramos que forman el área lateral del prisma, y estos paralelógramos tienen por bases las aristas laterales del poliedro, que son iguales entre sí. La suma de sus medidas será, pues,

$$AF.LM + BG.MN + \ldots + KE.PL$$
$$= AF\,(LM + MN + \ldots + PL).$$

COROLARIO.

609. Si el prisma es recto, su seccion recta es igual á su base y su arista lateral lo es á su altura (**606**, **593**). *El área*

lateral de un prisma recto tiene, pues, por medida el producto del perímetro de su base por su altura.

Escolio.

610. Añadiendo al área lateral de un prisma el doble del área de su base, se obtiene su área total.

§ II.—Volúmen del prisma.

DEFINICIONES.

611. Llámase *volúmen* de un poliedro la extension del lugar que ocupa en el espacio indefinido.

Cuando dos poliedros pueden coincidir, son *iguales*. Cuando dos poliedros tienen volúmemos iguales sin poder coincidir, se dice que son *equivalentes*.

Para demostrar que dos poliedros convexos coinciden, basta probar que coinciden sus vértices.

612. Si se trunca un prisma por un plano que no sea paralelo á su base, el poliedro que se obtiene recibe el nombre de *prisma truncado*. La seccion obtenida se llama base superior del tronco de prisma.

TEOREMA.

613. *Dos prismas rectos de la misma base y la misma altura, son iguales.*

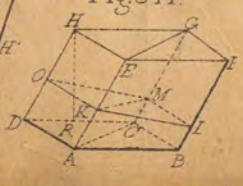
Porque si se hacen coincidir las bases inferiores de los prismas, sus aristas laterales coincidirán (**518**); y como son iguales á la altura dada, coincidirán tambien las bases superiores de los dos prismas.

Escolio.

614. La demostracion que precede se aplica al caso de dos prismas rectos truncados de la misma base cuando sus aristas laterales son iguales dos á dos.

Fig 346

Fig 347.



TEOREMA.

615. *Todo prisma oblicuo es equivalente al prisma recto que tiene por base la seccion recta del oblicuo y por altura su arista lateral.*

Sea *(fig. 346)* el prisma oblicuo ABCDEFGHIK ó AH. Por un punto G′ de la arista BG tracemos la seccion recta F′G′H′I′K′. Prolonguemos por debajo de la base ABCDE la arista BG en una longitud BB′ = GG′, y tracemos por el punto B′ un plano paralelo al de la seccion recta. Las intersecciones de este plano con las aristas laterales del prisma prolongadas, determinarán un polígono A′B′C′D′E′ igual (**606**) al F′G′H′I′K′. La figura A′B′C′D′E′F′G′H′I′K′ ó A′H′ será, pues, un prisma recto, cuya base es la seccion recta del oblicuo AH, y cuya altura es la arista lateral BG, porque B′G′ BG, puesto que por construccion BB′ = GG′.

Pues bien, el volúmen comprendido entre la base inferior del prisma oblicuo AH y la superior del prisma recto A′H′, es comun á los dos prismas. Para demostrar su equivalencia basta, pues, hacer ver la igualdad de los dos poliedros ó prismas rectos truncados (**612**) A′B′C′D′E′, ABCDE, ó A′C y F′G′H′I′K′FGHIK ó F′H, cuya igualdad resulta inmediatamente de la observacion hecha en el núm. **614**, porque las dos bases A′B′C′D′E′ y F′G′H′I′K′ son iguales, así como las aristas correspondientes A′A y F′F, B′B y G′G, etc. Y en efecto, A′A, por ejemplo, es la arista A′F′ disminuida en AF′, y F′F es la arista lateral AF disminuida en la misma porcion AF′.

TEOREMA.

616. *El plano trazado por dos aristas laterales opuestas de un paralelepípedo, le divide en dos prismas triangulares equivalentes.*

Sea *(fig. 347)* el paralelepípedo AG. El plano AEGC que pasa por las aristas opuestas AE y CG, divide al paralelepípedo en dos prismas triangulares ABCEFG, ACDEGH, cuya equivalencia hay que demostrar.

Tracemos la seccion recta del paralelepípedo AG. Esta seccion OKLM es un paralelógramo (**599**), y los dos triángulos iguales KLM y KMO en que la divide la diagonal KM, son respectivamente las secciones rectas de los prismas ABCEFG, ACDEGH.

Pero el prisma triangular ABCEFG sería equivalente al prisma recto que tuviese por base KLM y por altura AE (**615**); del mismo modo el prisma triangular ACDEGH sería equivalente al prisma recto que tuviese por base KMO y por altura AE. Siendo iguales los dos prismas rectos enunciados (**613**), los dos oblicuos triangulares ABCEFG, ACDEGH son equivalentes, y cada uno de ellos es la mitad del paralelepípedo AG.

TEOREMA.

617. 1.° *Si dos paralelepípedos rectángulos de la misma base tienen alturas iguales, son iguales;*

2.° *Si tres paralelepípedos rectángulos de la misma base son tales que la altura del primero sea igual á la suma de las alturas de los otros dos, el primer paralelepípedo será igual á la suma de los otros dos.*

En efecto:

1.° Sean dos paralelepípedos rectángulos AG y A'G' *(figura 348)*, cuyas bases ABCD, A'B'C'D' son iguales, asi como las alturas AE y A'E'; estos dos paralelepípedos serán iguales, como prismas rectos que tienen la misma base y la misma altura (**613**).

2.° Sean los tres paralelepípedos rectángulos *(fig. 348)* AN A'G', E''N', cuyas bases son iguales y cuyas alturas AL, A'E', E''L' satisfacen á la condicion.

$$AL = A'E' + E''L'.$$

Si se toma sobre AL una longitud AE igual á A'E' y se traza por el punto E una seccion EFGH paralela á la base ABCD, EL será igual á E''L' en virtud de la hipótesis, y los dos paralelepípedos rectángulos AG y EN que componen AN, serán iguales respectivamente á los A'G' y E''N' (1.°).

COROLARIOS.

618. *La relacion de dos paralelepípedos rectángulos de la misma base, es igual á la de sus alturas;* ó, en otros términos, *el volúmen de un paralelepípedo rectángulo de base constante, es proporcional á su altura.*

Porque el teorema precedente prueba que un paralelepípedo rectángulo de base constante satisface con la altura á las condiciones necesarias y suficientes (**135**) para que haya proporcionalidad.

Decir que dos paralelepípedos rectángulos tienen la misma base, es decir que tienen dos dimensiones comunes (**596**), y puede enunciarse la proposicion que precede de este modo:

Dos paralelepípedos rectángulos que tienen dos dimensiones comunes, son entre sí como sus terceras dimensiones.

De esto y del teorema general del núm. **414**, resulta que *dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus tres dimensiones.*

619. Tomando por altura una de las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo, el producto de las otras dos mide su base (**419**). Luégo *dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

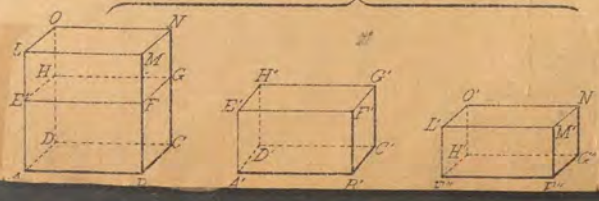
TEOREMA.

620. *El volúmen de un paralelepípedo rectángulo tiene por medida el producto del número que mide su base por el número que mide su altura cuando se toman por unidades de área y de volúmen el cuadrado y el cubo construidos sobre la unidad de longitud.*

Sean, en efecto, AN *(fig. 348)*, el paralelepípedo rectángulo que se trata de medir, y A′G′ el cubo cuyo lado A′B′ = A′D′ = A′E′ representa la unidad de longitud; se tiene (**619**)

$$\frac{AN}{A'G'} = \frac{ABCD}{A'B'C'D'} \cdot \frac{AL}{A'E'}.$$

Fig. 348.



Pero en el sistema de unidades adoptado al enunciar el teorema, el primer miembro de esta relacion es el número que mide el volúmen AN, y las relaciones que componen el segundo miembro son respectivamente iguales á los números que miden la base y altura del paralelepípedo rectángulo propuesto (**128**). Luégo el número que mide el volúmen del paralelepípedo rectángulo es igual al producto de los números de medida de su base y altura. Así, designando estos tres números por V, B, H, se tiene la fórmula

$$V = B.H.$$

Ordinariamente se prefiere enunciar este teorema de un modo rápido, aunque incorrecto, diciendo: *el volúmen de un paralelepípedo rectángulo, es igual al producto de su base por su altura.*

Escolios.

621. La relacion del paralelepípedo rectángulo AN al cubo A'G', puede escribirse (**618**):

$$\frac{AN}{A'G'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AD}{A'D'} \cdot \frac{AL}{A'E'}.$$

Siendo las relaciones que componen el segundo miembro respectivamente iguales á los números que miden las aristas contiguas del paralelepípedo rectángulo, se ve que el número que mide el volúmen de éste es igual al producto de los números que miden sus tres dimensiones. En otros términos: *el volúmen de un paralelepípedo rectángulo, es igual al producto de sus tres dimensiones* Este segundo enunciado no es aplicable más que al paralelepípedo rectángulo; luego demostraremos que el primer enunciado (**620**), en que entran explícitamente la base y la altura del paralelepípedo, es aplicable á todos los prismas.

622. El volúmen de un cubo es igual á la tercera potencia de su arista. De aquí el nombre de *cubo* dado á la tercera potencia de un número.

623. El volúmen de un paralelepípedo rectángulo es tambien igual al producto de su base por su altura cuando se adopta por unidad de volúmen el paralelepípedo rectángulo, cuya base es la unidad de área (cualquiera que ella sea) y cuya altura es la unidad de longitud.

TEOREMA.

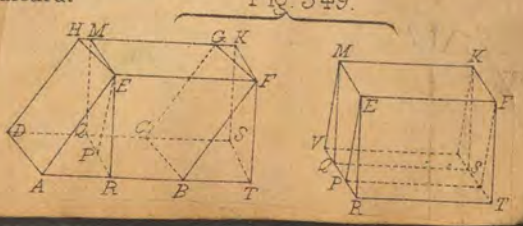
624. *El volúmen de un paralelepípedo cualquiera, tiene por medida el producto de su base por su altura.*

Sea el paralelepípedo cualquiera AG *(fig. 349)* que tiene por base ABCD, ó EFGH, y por altura la perpendicular EP, bajada sobre el plano ABCD desde el vértice E. Tracemos por el punto E, en el plano EFGH, la perpendicular EM á HG. Si se toma la cara AEHD por base del paralelepípedo (**598**), su arista lateral será EF y su seccion recta (**607**) será el paralelógramo EMQR determinado por el plano MEP. El paralelepípedo AG, será, pues, equivalente al paralelepípedo recto RK, que tiene por base la seccion recta EMQR y por altura EF (**615**).

Pues bien, figuremos aparte, para mayor claridad, este paralelepídedo recto RK *(fig. 349)*, y construyamos uno rectángulo PK que tenga por dimensiones EF, EM, EP.—El paralelepípedo recto RK y el rectángulo PK sólo difieren (como parte no comun) en los dos prismas rectos que tienen por bases los triángulos iguales EPR, MVQ y por altura EF.—Siendo iguales estos dos prismas rectos (**613**), los dos paralelepípedos serán equivalentes, y, por tanto, lo serán tambien el paralelepípedo cualquiera AG y el PK. Luégo el producto EF.EM.EP, que expresa la medida (**621**) del paralelepípedo, rectángulo PK, da tambien la medida del volúmen del paralelepípedo cualquiera AG. Pero EF.EM mide la base EFGH de este paralelepípedo, y EP es su altura.

Luégo el volúmen de un paralelepípedo cualquiera AG es igual al producto de su base por su altura.

Fig. 349.



TEOREMA.

625. *El volúmen de un prisma cualquiera, tiene por medida el producto de su base por su altura.*

1.° Sea el prisma triangular ABCEFG *(fig. 350)*. Tracemos por el extremo A de la arista AB el plano ADHE, paralelo á la cara BCGF, y por el extremo C de la arista BC el plano CDHG, paralelo á la cara ABFE; prolonguemos al mismo tiempo las dos bases del prisma hasta su encuentro con estos planos. Se obtendrá así (**600**) el paralelepípedo AG construido sobre las tres rectas AB, BC, BF. Siendo la cara ACGE del prisma triangular que se considera un plano diagonal del paralelepípedo AG, este prisma será su mitad (**616**). Luégo el volúmen del prisma triangular ABCEFG tendrá por medida la mitad del producto de la base ABCD por la altura EP (**624**); es decir, el producto de su base ABC (mitad del paralelógramo ABCD) por su altura EP.

2.° Sea *(fig. 351)* un prisma cualquiera ABCDEFGHIK. Descompóngase en prismas triangulares, haciendo pasar planos diagonales por la arista AF y cada una de las CH, DI. Estos prismas triangulares tienen por bases los triángulos ABC, ACD, ADE, que componen la base del prisma dado, y su altura comun es la del prisma. La suma de sus medidas (1.°)

$$ABC.H + ACD.H + ADE.H,$$

ó la medida del prisma AI, será, pues, igual al producto de su base ABCDE por su altura H.

COROLARIOS.

626. Designando por V, B, H los tres números que miden respectivamente el volúmen, la base y la altura de un prisma, se tiene la fórmula general

$$V = B.H.$$

Luégo *dos prismas de bases equivalentes é igual altura, son equivalentes: dos prismas son entre sí como los productos res-*

Fig. 350.

Fig. 351.

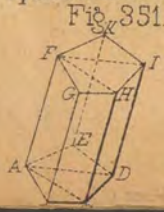


Fig. 352

pectivos de sus bases por sus alturas; dos prismas de la misma base, son entre sí como sus alturas; dos prismas de la misma altura, son entre sí como sus bases.

627. APLICACION. *Calcular la capacidad de un depósito en forma de prisma exagonal regular de* $0^m,75$ *de altura, siendo de* 1^m *el lado de la base.*

El área de la base es seis veces la de un triángulo equilátero de 1^m de lado, y por tanto, vale

$$\left(\frac{6\sqrt{3}}{4}\right)^{mc.} \text{(427)} \quad \text{ó} \quad \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^{mc.}.$$

Aplicando la fórmula $V = B.H$, se tendrá para el volúmen pedido

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 0,75 = \frac{9\sqrt{3}}{8} = \frac{9 \times 1,7321}{8} = 1^{mc.},946,$$

con error menor que un decímetro cúbico.

§ III.—Propiedades generales y área lateral de la pirámide.

DEFINICIONES.

628. La *pirámide* es un poliedro, cuyas caras son: un polígono cualquiera, y triángulos que tienen por bases los diferentes lados de la cara poligonal, y por vértice comun un punto exterior al plano de esta cara.

Así, sea un polígono ABCDE *(fig. 352)* y S un punto exterior á su plano. El cuerpo limitado por la cara poligonal y por las triangulares SAB, SBC, SCD, SDE, SEA, es una pirámide.

629. La pirámide SABCDE tiene por *base* el polígono ABCDE y por *vértice* el punto S. Su *altura* es la distancia del

vértice á la base; es decir, la longitud de la perpendicular bajada de este punto sobre este plano.

Las rectas SA, SB, SC, etc., son las *aristas laterales* de la pirámide, y la suma de las caras triangulares SAB, SBC, SCD, etc., constituye su *área lateral*.

630. Se llama *regular* la pirámide cuando su base es un polígono regular, cuyo centro se confunde con el pié de la altura de la pirámide.

Las aristas laterales de una pirámide regular son necesariamente iguales, como oblicuas cuyos piés equidistan del pié de la altura; sus caras laterales son, pues, triángulos isósceles iguales entre sí. La altura de uno de estos triángulos se llama *apotema* de la pirámide regular.

631. Segun que la base de la pirámide sea un triángulo, cuadrilátero, pentágono, exágono, etc., se llama la pirámide *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, *exagonal*, etc.

Fig. 353

632. Por tener cuatro caras la pirámide triangular, recibe tambien el nombre de *tetraedro* (**589**).

Se ve por la definicion general de pirámide que puede ser mirada como base de un tetraedro la cara que se quiera, siendo el vértice del tetraedro en cada caso el opuesto á la cara escogida.

Los tetraedros son, en la Geometría del espacio, lo que los triángulos en la plana. Se determina la posicion de un punto en un plano ligándole por un triángulo á dos puntos conocidos, y la de un punto con el espacio ligándole por un tetraedro á tres puntos conocidos.

Fig. 354

633. Si se corta una pirámide por un plano que encuentre á todas sus caras laterales, el poliedro comprendido entre la seccion obtenida y la base es una *pirámide truncada* ó *tronco de pirámide*.

Si el plano secante es paralelo al de la base, el tronco se llama de *bases paralelas*.

Sea la pirámide SABCDE *(fig. 353)*. Cortémosla por el plano *abcde*, paralelo á su base y comprendido entre ésta y el vértice S. La seccion *abcde* y la base ABCDE son *las bases* del tronco de pirámide de bases paralelas. La *altura* del tronco es la distancia entre los planos de las bases. Los segmentos *a*A, *b*B, *c*C, etc., son sus *aristas laterales*, y su *área lateral* es la suma de los trapecios AB*ab*, BC*bc*, CD*cd*, etc.

634. Si la pirámide es regular, el tronco de bases paralelas que le corresponde se llama tambien *regular*.

TEOREMA.

635. *Si una pirámide es cortada por un plano paralelo á su base:*

1.° *Sus aristas laterales y su altura quedan divididas en partes proporcionales;*

2.° *La seccion es un polígono semejante á la base.*

1.° Sea la pirámide SABCDE *(fig. 354)* cortada por el plano *abcde*, paralelo á su base. Este plano corta á las aristas laterales SA, SB, SC, etc., y á la altura SH en los puntos *a*, *b*, *c*, ..., *h*, se puede escribir inmediatamente (**51**)

$$\frac{Sa}{SA} = \frac{Sb}{SB} = \frac{Sc}{SC} = \ldots = \frac{Sh}{SH}.$$

2.° Los polígonos ABCDE y *abcde* tienen sus lados paralelos dos á dos (**495**) y dirigidos en el mismo sentido, y los ángulos homólogos serán, por tanto, iguales (**506**). Además, el paralelismo de sus lados da lugar á la semejanza de los triángulos SAB y S*ab*, SBC y S*bc*, etc. Por tanto,

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sb}{SB}, \qquad \frac{Sb}{SB} = \frac{bc}{BC};$$

de donde

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC}.$$

Análogamente se demostraría que

$$\frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \frac{de}{DE} = \frac{ea}{EA}.$$

Los polígonos ABCDE y *abcde*, que tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales, son semejantes.

COROLARIO.

636. La semejanza de los triángulos SAB y S*ab*, da

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sa}{SA};$$

ó, segun lo que precede,

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sh}{SH}.$$

La semejanza de los polígonos ABCDE y *abcde*, da á su vez

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2}.$$

Se tiene, pues,

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2};$$

es decir, que, *en una pirámide, las áreas de las secciones paralelas á la base son proporcionales á los cuadrados de sus distancias al vértice.*

ESCOLIO.

637. Si se corta una pirámide regular por un plano paralelo á la base, siendo la seccion *abcde* semejante á la base ABCDE, es tambien un polígono regular. Como las aristas laterales de una pirámide regular son iguales, lo mismo sucederá á las del trono de la pirámide regular. Las caras laterales de un tronco de pirámide regular son, pues, trapecios isósce-

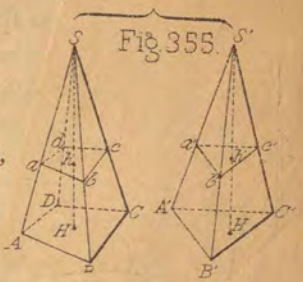
les iguales entre sí. La altura de uno de ellos es la *apotema* del tronco.

TEOREMA.

638. *Cuando dos pirámides tienen alturas iguales, las secciones hechas en estas pirámides, paralelamente á sus bases y á igual distancia de sus vértices, son proporcionales á las bases.*

Sean las dos pirámides SABCD y S'A'B'C' *(fig. 355)*, cuyas alturas SH y S'H' son iguales. Tomemos $Sh = S'h'$, y tracemos por los puntos h y h' las secciones $abcd$ y $a'b'c'$ paralelas á las bases ABCD y A'B'C'. Tendremos (**636**)

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2}, \qquad \frac{a'b'c'}{A'B'C'} = \frac{\overline{S'h'}^2}{\overline{S'H'}^2};$$



ó bien, en virtud de la hipótesis y de la construccion,

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{a'b'c'}{A'B'C'}.$$

Escolio.

639. *Si las bases de las pirámides son equivalentes, las secciones obtenidas tambien lo serán.*

TEOREMA.

640. *El área lateral de una pirámide regular tiene por medida la mitad del producto del perímetro de su base por su apotema.*

Sea la pirámide regular SABCDE *(fig. 356)*. Los triángulos isósceles é iguales que componen su superficie lateral, tienen respectivamente por bases los lados AB, BC ... EA de la base de la pirámide, y por altura su apotema SH (**630**), y la suma de sus áreas; es decir, el área pedida está, por consiguiente, medida por la mitad del producto de la suma de los lados AB, BC ... EA, por el apotema SH, ó bien la mitad del producto del perímetro de la base por la apotema.

Escolio.

641. *El área lateral de un tronco de pirámide regular, está medida por el producto de la semisuma de perímetros de las dos bases por la apotema.*

Sea el tronco de pirámide regular ABCDE*abcde* (*fig. 356*). Los trapecios isósceles iguales que componen su área lateral tienen por bases respectivamente los lados AB y *ab*, BC y *bc*, ... EA y *ea*, de las bases del tronco, y por altura su apotema H*h* (**637**), y, por tanto, la suma de las áreas de los trapecios; es decir, el área pedida tendrá por medida el producto de la semisuma de los lados AB y *ab*, BC y *bc*, ... EA y *ea* por la apotema H*h*, ó bien semisuma de perímetros de las bases por la apotema.

Fig. 356.

§ IV.—Volúmen de la pirámide.

TEOREMA.

642. *Dos pirámides triangulares de bases equivalentes y alturas iguales, son equivalentes.*

Sean SABC y S'A'B'C' (*fig. 357*) las dos pirámides propuestas. Si sus bases ABC, A'B'C' están colocadas sobre un mismo plano, sus vértices S y S' estarán á la misma distancia del plano comun de las bases, puesto que las pirámides tienen la misma altura.

Dividamos la arista SA en un cierto número de partes iguales en los puntos D, G, K, y tracemos por ellos planos paralelos al de las bases. Determinaremos así en la primera pirámide las secciones DEF, GHI, KLM, y en la segunda las correspondientes D'E'F', G'H'I', K'L'M'.

Como las bases son equivalentes, lo serán las secciones causadas por un mismo plano paralelo al de las bases (**639**). La seccion DEF será equivalente á la seccion D'E'F'; la GHI á la G'H'I', etc.

Construyase ahora un prisma sobre la seccion DEF como base y la division DA como arista. Basta para esto (**591**) trazar por los puntos E y F paralelas EN y FO á DA ó SA has-

ta el encuentro de las aristas AB y AC, y unir los puntos N y O. Haciendo lo mismo para las otras secciones GHI, KLM y las divisiones GD, KG, se habrá inscrito en la pirámide SABC un número de prismas igual al de las secciones marcadas, y todos ellos tendrán por altura la distancia constante de dos planos secantes consecutivos. Operando de idéntico modo, se inscriben en la segunda pirámide S'A'B'C' los prismas D'E'F'A'N'O', G'H'I'D'P'Q'... en el mismo número que los inscritos en la pirámide SABC.

Los prismas correspondientes en las dos pirámides son equivalentes, por tener bases equivalentes y alturas iguales (**626**). El prisma GHIDPQ por ejemplo, es equivalente al G'H'I'D'P'Q', porque las dos secciones correspondientes GHI, G'H'I' son equivalentes, y sus alturas son ambas la $n^{ésima}$ parte de la altura comun de las pirámides dadas, si se ha dividido la arista SA en n partes iguales.

Luégo la suma de los prismas inscritos en la pirámide SABC es equivalente á la suma de los inscritos en la pirámides S'A'B'C'. Pero si se hace crecer indefinidamente el número de las divisiones iguales de la arista SA, la suma de los prismas inscritos en la pirámide SABC tiene por límite el volúmen de esta pirámide. En efecto, los puntos K, R, P, N están en línea recta, puesto que las rectas SK, LR, HP, EN son iguales y paralelas, y la recta KN es paralela á SB. Del mismo modo los puntos K, T, Q, O están sobre una recta KO paralela á SC. El plano KNO es, pues, paralelo á la cara BSC, y el poliedro KNOSBC es un tronco de pirámide de bases paralelas, cuya altura (distancia de los dos planos KNO, SBC) es á lo más igual á SK = AD. Pero el límite de AD es cero cuando se hace crecer indefinidamente el número de partes iguales de la arista SA. Luégo la altura del tronco de pirámide KNOSBC tiende hácia cero, y lo mismo, por consiguiente, el volúmen de dicho tronco. Pero este volúmen es evidentemente mayor que la diferencia que existe entre la pirámide SABC y la suma de los prismas inscritos en ella. Esta diferencia tiene, pues, por límite cero.

Del mismo modo se probaria que la diferencia entre la pirámide S'A'B'C' y la suma de los prismas inscritos en ella decrece indefinidamente; y como las dos sumas de prismas son constantemente equivalentes, sus límites, es decir, los volúmenes de las pirámides son iguales.

TEOREMA.

643. *El volúmen de una pirámide tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura.*

1.° Sea la pirámide triangular EABC *(fig. 358)*. Tracemos por los vértices A y C las rectas AD y CF, paralelas á la arista BE hasta su encuentro en D y F con el plano trazado por el vértice E paralelamente á la base ABC de la pirámide. El poliedro ABCDEF será un prisma triangular de la misma base y altura de la pirámide propuesta.

Haciendo pasar un plano por los tres vértices D, E, C, se descompone el prisma triangular ABCDEF en tres pirámides triangulares EABC, EDCA, EDCF. La primera es la propuesta. Las otras dos son equivalentes (**642**), porque tienen la misma altura y sus bases equivalentes como mitades del paralelógramo ACFD. Pero si se mira como base de la pirámide EDCF la cara DEF, su vértice es el punto C, y esta pirámide tiene la misma base y la misma altura que el prisma, y, por tanto, es equivalente á la pirámide EABC.

Siendo equivalentes las tres pirámides de que se compone el prisma ABCDEF, cada una de ellas es el tercio de éste; y como el volúmen del prisma tiene por medida el producto de su base por su altura, el de la pirámide EABC tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura

Fig. 358

2.° Sea la pirámide poligonal SABCDF *(fig. 359)*. Se la descompone en pirámides triangulares, haciendo pasar planos por la arista SA y cada una de las aristas SC, SD. Estas pirámides triangulares tienen por bases los triángulos ABC, ACD, ADE, que componen la base de la pirámide dada, y su altura comun es la de la pirámide. La suma de sus medidas ó

Fig. 359

la medida de la pirámide SABCDE será, pues, igual al tercio del producto de su base ABCDE por su altura SO.

COROLARIOS.

644. Designando por V, B, H los tres números que miden respectivamente volúmen, base y altura de una pirámide, se tiene la fórmula general

$$V = \frac{1}{3} B.H.$$

Luégo *toda pirámide es el tercio del prisma de la misma base y altura. Dos pirámides cualesquiera de bases equivalentes y la misma altura, son equivalentes. Dos pirámides son entre sí como los productos respectivos de sus bases por sus alturas. Dos pirámides de equivalente base son entre sí como sus alturas. Dos pirámides de la misma altura, son entre sí como sus bases.*

645. Cuando un tetraedro es regular, su volúmen se expresa en funcion de su arista *a*.

Un tetraedro regular está limitado por cuatro triángulos equiláteros iguales. Su base tiene, pues, por expresion (**427**)

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Su altura es cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la arista *a* del tetraedro, siendo el otro cateto el radio del círculo circunscrito al triángulo base, es decir, $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Esta altura es, por consiguiente,

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

Luégo el volúmen del tetraedro regular en funcion de su arista es

(1) $AO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3a^2 - a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 2}{3}}$

$= \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

EJEMPLO:

¿Cuál es el volúmen de un tetraedro regular cuya arista sea 1^{m}?

Se tiene

$$V = \frac{1^{mc}\sqrt{2}}{12} = \frac{1,4142136}{12} = 0^{mc},117851$$

con error menor que medio centímetro cúbico.

ESCOLIO.

646. Para valuar el volúmen de un poliedro basta descomponerlo en pirámides, calcular los volúmenes de éstas y hacer la suma de los números obtenidos. Y en general, basta descomponer el poliedro propuesto en partes tales que la expresion de su volúmen sea conocida.

Para operar la descomposicion en pirámides, puede elegirse un punto arbitrario en el espacio y unirle á todos los vértices del poliedro. Las bases de las pirámides son las caras del poliedro, y sus alturas son las perpendiculares bajadas desde el punto escogido sobre dichas caras. El volúmen del poliedro es la suma aritmética ó algebráica de los volúmenes de las pirámides obtenidas, segun que su vértice comun haya sido escogido interior ó exterior al poliedro.

Se hace á menudo la descomposicion tomando uno de los vértices mismos del poliedro como centro de descomposicion; es decir, trazando todas las diagonales que parten de un mismo vértice.

Si se pudiera tener en el interior del poliedro un punto equidistante de todas las caras, las pirámides en que se descompusiera tendrian por altura comun la distancia del punto á una de las caras, y el volúmen del poliedro tendria por medida *el tercio del producto de su área por la distancia del punto á una de las caras.*

TEOREMA.

647. *Un tronco de pirámide de bases paralelas, es equivalente á la suma de tres pirámides cuya altura es la del tronco, siendo sus bases respectivas las dos del tronco y la media proporcional entre ellas.*

1.° Sea el tronco de pirámide triangular ABCDEF *(figura 360)*.

Los planos AEC y DEC lo dividen en tres pirámides triangulares EABC, EDCF, EDCA.

Fig. 360.

La primera EABC tiene por base la inferior del tronco y la misma altura que éste, puesto que su vértice E es de la base superior.

La segunda pirámide EDCF tiene por base la superior DEF del tronco, si se mira como vértice el punto C, que lo es de la base inferior, y su altura la del tronco.

Para apreciar la tercera pirámide EDCA, comparémosla sucesivamente á las otras dos.

Si se mira el punto C como vértice comun de las dos pirámides EABC, EDCA, se ve que tienen la misma altura y son entre sí como sus bases EAB, ADE; pero estos triángulos tienen la misma altura y son entre sí como sus bases AB y DE; se puede, pues, escribir

$$\frac{P}{P''} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \text{ (635, 2.°)}.$$

Análogamente, si se mira el punto E como vértice comun de las dos pirámides EDCA y EDCF, se ve que tienen la misma altura y son entre sí como sus bases DAC, CDF, y estos triángulos son entre sí á su vez como sus bases AC y DF, por tener la misma altura. Se tiene, por consiguiente,

$$\frac{P}{P''} = \frac{P''}{P'};$$

de donde resulta

$$P''^2 = P.P'.$$

El volúmen de la tercera pirámide es, pues, la media proporcional entre los volúmenes de las dos primeras; es decir, que la pirámide EDCA equivale á una pirámide que tenga por altura la del tronco, y cuya base sea la media proporcional entre las dos del tronco.

2.° Sea el tronco de pirámide poligonal GHIKLMNP *(figura 361)*, que ha sido obtenido cortando la pirámide TGHIK por un plano paralelo á su base. Tomemos un punto S á la misma altura que el T sobre el plano de la base GHIK, y construyamos en este plano un triángulo ABC que le sea equivalente. La pirámide triangular SABC será equivalente á la poligonal TGHIK (**644**). Si se prolonga el plano LMNP hasta la pirámide SABC, determinará en esta una seccion DEF, equivalente á la seccion LMNP (**639**); las dos pirámides SDEF, TLMNP serán, por tanto, equivalentes tambien, y el tronco poligonal GHIKLMNP, diferencia de las pirámides TGHIK y TLMNP, será equivalente al tronco triangular ABCDEF, diferencia de las pirámides SABC, SDEF. Y como el tronco triangular equivale á la suma de tres pirámides, cuya altura comun es la del tronco, y sus bases respectivas son las del tronco y la media proporcional entre ellas, equivaldrá á lo mismo el tronco poligonal que tiene igual altura y bases equivalentes.

Corolarios.

648. Designando por V, B, b, h los números que miden respectivamente volúmen, bases y altura de un tronco de pirámide bases paralelas, se tiene la fórmula

$$V = \frac{1}{3} Bh + \frac{1}{3} b.h + \frac{1}{3} h\sqrt{B.b}$$

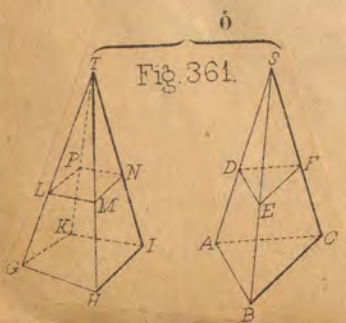


Fig. 361.

$$(1)\quad V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb}).$$

A menudo se da una de las bases B y la relacion $\frac{a}{A}$ de dos lados homólogos de las bases; se tiene entónces

$$\frac{b}{B} = \frac{a^2}{A^2}; \text{ de donde } b = \frac{a^2}{A^2} \cdot B.$$

Y, por tanto,

$$(2) \qquad V = \frac{Bh}{3}\left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Esta fórmula, muy cómoda para las aplicaciones, se encuentra en un tratado *Sobre los centros de gravedad* de Léonard de Pise.

Ejemplo.

Las bases paralelas de un tronco de pirámide son dos exágonos regulares, cuyos lados son respectivamente de 1^m y 2^m, y su altura de 3^m; calcular su volúmen.

Se tiene en este ejemplo

$$B = \frac{3A^2\sqrt{3}}{2} = (6\sqrt{3})^{mc},$$

y aplicando la fórmula (2)

$$V = \frac{6\sqrt{3}.3}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 3\sqrt{3} \times 3{,}5 = 18^{mc},186534$$

en menos de un centímetro cúbico.

Escolios.

649. Para hallar el volúmen de un tronco de pirámide poligonal, se hubiera podido emplear el método de *descomposicion* que se sigue en otros casos (**625**, **643**); pero esta marcha exigiria aquí la verificacion de una fórmula algebráica, y es preferible el método que hemos adoptado de *transformacion* en figuras equivalentes.

650. Puede darse una extension útil á la palabra *tronco*.

Del mismo modo que los teoremas relativos á las secciones de un prisma se hacen extensivos al caso en que son exteriores (**606**), los relativos á las secciones de una pirámide (**635, 636**) se hacen aplicables á los casos en que son exteriores, ya sean hechas al otro lado del vértice ó más allá de la base de la pirámide propuesta. Los planos secantes deben ser siempre paralelos á la base de la pirámide.

Pueden distinguirse los dos casos posibles diciendo que las secciones hechas del mismo lado á que está la base dan troncos de *primera especie*, y de *segunda especie* los originados por secciones hechas al otro lado.

Para valuar el volúmen de un tronco de segunda especie ABCDEF *(fig. 362)*, basta efectuar la suma de las pirámides SABC y SDEF. La altura h del tronco es igual á la suma de las alturas H y H′ de las pirámides. Se tiene así, conservando las notaciones del núm. **648**,

$$V = \frac{1}{3}\,BH + \frac{1}{3}\,b.H' = \frac{B}{3}\left(H + \frac{bH'}{B}\right). \qquad (\alpha)$$

Pero de la relacion (**648, 636**)

$$\frac{B}{b} = \frac{A^2}{a^2} = \frac{H^2}{H'^2} \quad \text{ó} \quad \frac{A}{a} = \frac{H}{H'} \quad \text{ó} \quad \frac{A}{H} = \frac{a}{H'}$$

resulta

$$\frac{H}{A} = \frac{H'}{a} = \frac{H + H'}{A + a} = \frac{h}{A + a}$$

de donde

$$H = \frac{Ah}{A + a}; \quad H' = \frac{ah}{A + a}. \qquad (\beta)$$

Por consiguiente,

$$V = \frac{Bh}{3}\left(\frac{A^3 + a^3}{A^2(A + a)}\right) = \frac{Bh}{3}\left(1 - \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right),$$

y tambien

$$V = \frac{h}{3}\left(B - B\,\frac{a}{A} + B\,\frac{a^2}{A^2}\right) = \frac{h}{3}\left(B + b - \sqrt{Bb}\right).$$

La fórmula del volúmen es, pues, la misma para un tronco de segunda especie que para uno de primera, salvo el signo de la media proporcional. Se pasa, pues, de una á otra fórmula cambiando el signo de esta media ó cambiando a en $-a$.

Se hubiera podido seguir una marcha análoga para calcular la ex-

presion del volúmen de un tronco de primera especie, hubiera sido preciso restar las pirámides *(fig. 361)* SABC, SDEF en vez de sumarlas.

651. Problema. *Se da el volúmen* V, *la altura* h *y el lado* A *de la base inferior de un tronco de pirámide de bases paralelas; se supone que esta base es un exágono regular, y se pide el lado* x *del exágono regular que sirve de base superior al tronco.*

Fig. 362.

La ecuacion del problema será la ecuacion (2) del núm. **648,** en la cual se reemplazará a por la incógnita x, es decir,

$$V = \frac{Bh}{3}\left(1 + \frac{x}{A} + \frac{x^2}{A^2}\right);$$

de donde

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{x}{A} + 1 - \frac{3V}{Bh} = 0.$$

Las raíces de esta ecuacion son imaginarias si $V < \frac{Bh}{4}$; son reales y ambas negativas si $V \begin{matrix} > \frac{Bh}{4} \\ < \frac{Bh}{3} \end{matrix}$; y en fin, son una positiva y otra negativa si $V > \frac{Bh}{3}$. En el primer caso, el problema es imposible; en el segundo, resuelven la cuestion dos troncos de segunda especie; en el tercero hay dos troncos, uno de primera y otro de segunda especie (*).

Supongamos, por ejemplo, $A = 1^m$, de donde

$$B = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^{m.2}, \quad h = 1^m.\sqrt{3} \text{ y } V = 2^{m.3}.$$

La ecuacion será

$$x^2 + x + 1 - \frac{4}{3} = 0; \quad \text{ó} \quad x^2 + x - \frac{1}{3} = 0.$$

Da

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6} = \frac{-3 \pm 4{,}5825757}{6}.$$

La raíz positiva es $x = 0{,}26376$ en menos de $\frac{1}{200}$ de milímetro. La negativa es $x = -1{,}26376$ con la misma aproximacion. La primera corresponde á un tronco de primera especie; la segunda, *tomada posi-*

(*) NOTA 25.

tivamente, á uno de segunda especie. La altura de la pirámide que corresponde al tronco de primera especie, es (**650**)

$$H = \frac{Ah}{A - x} = \frac{1^m.\sqrt{3}}{0{,}73624} = 2^m{,}353$$

en menos de $^1/_2$ milímetro.

La de la pirámide que corresponde al tronco de segunda especie es (**650**)

$$H = \frac{Ah}{A + x} = \frac{1^m.\sqrt{3}}{2{,}26376} = 0^m{,}765$$

en menos de $^1/_2$ milímetro tambien.

TEOREMA.

652. *Un tronco de prisma triangular equivale á la suma de tres pirámides, cuya base comun es la inferior del tronco, y sus vértices los de la base superior.*

Sea el tronco (**612**) de prisma triangular ABCDEF *(figura 363)*. Sean EH, DK, FL las alturas de los vértices de su base superior sobre el plano de la inferior ABC.

Los planos AEC, DEC dividen al tronco en tres pirámides triangulares: EABC, EDCF, EDCA.

La primera, EABC, tiene por base ABC y por altura EH: es una de las dichas.

Para apreciar la segunda, EDCF, veamos su relacion á la primera EABC. Si se miran como vértices en las dos EDCF y EABC los puntos D y A, sus bases son los triángulos ECF y ECB, y su altura igual, puesto que DA es paralela á la cara EBCF. Estas pirámides son, pues, entre sí como los triángulos ECF, ECB. Pero estos triángulos, comprendidos entre las paralelas EB y CF, tienen la misma altura y son entre sí como sus bases FC y EB. Luego las pirámides EDCF, EABC son entre sí como las aristas FC y EB, ó como las alturas FL y EH, evidentemente proporcionales á estas aristas, en virtud de la semejanza de los triángulos rectángulos EBH, FCL.

Fig. 363.

Para estimar la tercera pirámide, EDCA, veamos su rela-

cion á la pirámide EDCF. Teniendo la misma altura, estas pirámides son entre sí como sus bases DCA, DCF, ó como las aristas DA, FC, puesto que estos triángulos comprendidos entre las mismas paralelas DA, FC tienen la misma altura. Luégo las pirámides EDCA, EDCF son entre sí, como las alturas DK y FL, proporcionales á las aristas DA y FC.

Siendo, pues, las tres pirámides EABC, EDCF, EDCA proporcionales á las alturas EH, FL, DK, y siendo el volúmen de la primera

$$\frac{ABC.EH}{3}$$

las otras dos tendrán respectivamente por volúmenes

$$\frac{ABC.FL}{3} \quad y \quad \frac{ABC.DK}{3}.$$

Escolio.

653. Si el tronco que se considera es un tronco de prisma recto, las alturas EH, FL, DK se confunden con las aristas laterales EB, FC, DA, y la base ABC con la seccion recta del tronco. *El volúmen del tronco de prisma triangular recto tiene, pues, por medida el producto de su seccion recta por la media aritmética de sus aristas laterales.*

Este enunciado se aplica fácilmente al caso del tronco de prisma oblicuo. Sea el tronco de prisma oblicuo ABCDEF *(fig. 364)*. Trácese su seccion recta MNP, que lo divide en dos troncos MNPABC y MNPDEF, rectos relativamente á esta seccion considerada como base.

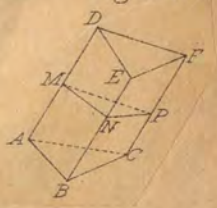
El primero tiene por medida

$$MNP\left(\frac{MA+NB+PC}{3}\right).$$

El segundo

$$MNP\left(\frac{MD+NE+PF}{3}\right).$$

Fig 364.



El tronco oblicuo, suma de los dos troncos rectos, tiene, pues, por medida la suma de sus medidas; es decir,

$$\text{MNP}\left(\frac{\text{AD}+\text{EB}+\text{CF}}{3}\right).$$

COROLARIO.

654. Designando por V, B, $\mathfrak{e}$, h, h', h'', a, a', a'' los números que miden respectivamente el volúmen de un tronco de prisma triangular, su base, su seccion recta, las alturas de los vértices de su base superior sobre el plano de la inferior, y sus aristas laterales, se tienen las fórmulas

$$(1) \qquad \text{V} = \text{B}\left(\frac{h+h'+h''}{3}\right).$$

$$(2) \qquad \text{V} = \mathfrak{e}\left(\frac{a+a'+a''}{3}\right).$$

APLICACION.

655. *La base* B *de un paralelepípedo recto truncado, es igual á* 36^{m2}. *Sus aristas laterales son de* 5^m, 3^m, 7^m *y* 9^m. *Se pide el volúmen.*

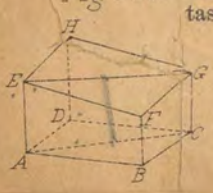
Sea ABCDEFGH *(fig. 365)* el tronco propuesto. Trácese el plano diagonal ACGE, que lo divide en dos troncos rectos de prismas triangulares, cuyas bases son iguales entre sí y mitades del paralelógramo ABCD. Siendo los volúmenes de estos dos troncos respectivamente, segun las fórmulas anteriores,

$$18\left(\frac{5+3+7}{3}\right) \quad \text{y} \quad 18\left(\frac{5+9+7}{3}\right),$$

el volúmen pedido será

$$\text{V} = 18.\frac{36}{3} = 216^{m3}.$$

Fig. 365



Si se designan en general por A y a, B y b las aristas laterales opuestas dos á dos de un paralelepípedo truncado cualquiera, y por S su sec-

cion recta, los volúmenes v y v' de los dos prismas triangulares truncados que lo componen son:

$$v = \frac{S}{2} \cdot \frac{A + a + b}{3}, \qquad v' = \frac{S}{2} \cdot \frac{A + a + B}{3};$$

por consiguiente, su volúmen $V = v + v'$ tienen por expresion

$$V = S \cdot \frac{2(A + a) + (B + b)}{6}.$$

Pero si se representa por δ la longitud de la recta que une los centros de las dos bases del tronco, se tiene

$$A + a = B + b = 2\delta;$$

de donde

$$V = S \cdot \delta.$$

El volúmen de un paralelepípedo truncado cualquiera tiene, pues, por medida *el producto de su seccion recta por la media aritmética de dos aristas laterales opuestas.*

TEOREMA.

656. *El volúmen de todo poliedro que tenga por bases dos polígonos cualesquiera situados en planos paralelos, y por caras laterales trapecios ó triángulos, está expresado por la fórmula*

$$\frac{H}{6}(B' + B + 4B''),$$

en la que H *designa la distancia entre los dos planos paralelos,* B *una de las bases,* B′ *la otra y* B″ *la seccion equidistante de ellas.*

En efecto, sean $L_1M_1N_1P_1Q_1$ *(fig. 366)* la seccion equidistante de las bases, y S un punto arbitrario tomado en el interior de esta seccion. El poliedro puede ser descompuesto en pirámides, cuyo vértice comun sea el punto S y sus bases las diversas caras del poliedro. Los volúmenes de las dos pirámides que descansan en las bases B y B′ tienen por medidas $\frac{BH}{6}$, $\frac{B'H}{6}$, y falta valuar los volúmenes de las pirámides correspondientes á las caras laterales. Sea LMM′L′ una cualquiera de éstas, por ejemplo la que contiene el lado L_1M_1 del polígono $L_1M_1N_1P_1Q_1$: para razonar en general, supongamos que esta cara sea un trapecio (si fuese un triángulo uno de los lados LM ó L′M′, se reduciria á cero). Bajemos del punto S la perpendicular SO sobre el plano de la cara; en el plano de ésta, y por el pié O, tracemos la perpendicular I′OI$_1$ á L_1M_1 y la recta SI_1, que será perpendicular á L_1M_1; tracemos, finalmente,

Fig. 366.

I'K$_1$ perpendicular al plano de la seccion media L$_1$M$_1$N$_1$P$_1$Q$_1$; esta perpendicular será la mitad de la distancia H que hay entre las bases del poliedro. Pues bien, la pirámide SLMM'L' tiene por medida

$$(L_1M_1 \times 2I'I_1) \times \frac{1}{3} SO.$$

Pero el producto $I'I_1 \times SO$ puede ser reemplazado por el producto $SI_1 \times I'K_1$, puesto que uno y otro expresan el doble del área del triángulo $I'I_1S$. Y el volúmen anterior se puede escribir de este modo:

$$\frac{H}{6} \times (2L_1M_1 \times SI_1) = \frac{H}{6} \cdot 4\,(SL_1M_1).$$

Por consiguiente, para tener la suma de los volúmenes de las pirámides que descansan sobre las caras laterales del poliedro que se considera, hay que multiplicar por $\frac{H}{6}$ cuatro veces la suma de los triángulos que tienen por vértice comun el punto S y por bases los lados de la seccion L$_1$M$_1$N$_1$P$_1$Q$_1$; es decir, multiplicar por $\frac{H}{6}$ el cuádruplo del área B'' de esta seccion. (1)

APLICACION.

657. Los montones de piedras puestos de distancia en distancia á lo largo de los caminos, los volquetes, etc., etc., etc., son volúmenes limitados por dos rectángulos paralelos LMNP, L'M'N'P' como bases, y lateralmente por cuatro trapecios LMM'L', MNN'M', NPP'N', PLL'P' *(fig. 367)*. Expresemos este volúmen en funcion de la distancia h entre los planos de los dos rectángulos y de las dimensiones a y b, a' y b' de estos.

La seccion L$_1$M$_1$N$_1$P$_1$ equidistante de las bases es un rectángulo cuyas dimensiones L$_1$M$_1$ y L$_1$P$_1$ son $\frac{1}{2}(a + a')$ y $\frac{1}{2}(b + b')$. El volúmen está, pues, dado, en virtud del teorema precedente, por la fórmula

$$\frac{h}{6}[a.b + a'.b' + (a + a')(b + b')],$$

que puede escribirse del siguiente modo:

$$\frac{bh}{6}(2a + a') + \frac{b'h}{6}(2a' + a).$$

Si $b' = o$, el volúmen se reduce á

$$\frac{bh}{6}(2a + a'),$$

y el cuerpo presenta entónces la figura de las pilas rectangulares de balas.

Fig. 367.

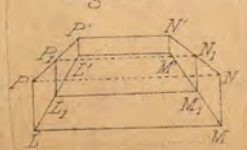


Fig 368

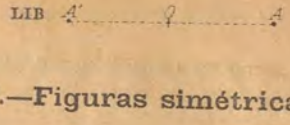


Fig 369

Fig 370

§ V.—Figuras simétricas.

DEFINICIONES.

658. Se dice que dos puntos A y A′ *(fig. 368)* son *simétricos con respecto á un centro* O, cuando este punto O es el medio de la distancia AA′.

Se llaman dos puntos A y A′ simétricos con respecto á un eje *xy (fig. 369)* ó á un plano P *(fig. 370)* cuando este eje ó este plano es perpendicular á AA′ en su punto medio.

Se dice que dos figuras son simétricas con respecto á un centro, un eje ó un plano cuando sus puntos son dos á dos simétricos con respecto al centro, eje ó plano. Los puntos simétricos de las dos figuras, se llaman *homólogos*.

Dos figuras simétricas con respecto á un eje, son iguales; porque, imprimiendo á una de ellas una rotacion de 180° alrededor del eje, llegará á coincidir con la otra.

La simetría con respecto á un eje no ofrece por eso nada de particular. No nos ocuparemos más que de la simetría con respecto á un punto ó á un plano.

TEOREMA.

659. *Dos figuras* F′ *y* F″, *simétricas de una misma figura* F *con respecto á dos centros distintos* O′ *y* O″, *son iguales (figura 371)* (*).

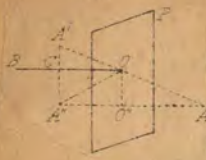
Sea A un punto cualquiera de la figura F, y sean A′ y A″ sus homólogos en las figuras F′ y F″. La recta A′A″ es paralela á O′O″ é igual á 2O′O″, por ser O′ y O″ los puntos medios de AA′ y AA″, y, por consiguiente, la figura F″ no es más que la F′ transportada paralelamente á la direccion O′O″ en una cantidad igual á 2O′O″.

COROLARIO.

660. La posicion del centro de simetría no influye ni en

(*) BRAVAIS, *Journal de Mathématiques*, tomo XIV.

Fig. 371.



la *forma* ni en la *orientacion* de la figura simétrica de una figura dada.

TEOREMA.

661. *Si dos figuras* F *y* F″ *(fig. 371) son simétricas con respecto á un plano* P, *se las puede colocar de tal suerte que sean simétricas con respecto á un punto* O′ *arbitrariamente escogido en dicho plano;* y recíprocamente, *si dos figuras* F *y* F′ *son simétricas con respecto á un centro* O′, *se las puede colocar de tal suerte que sean simétricas con respecto á un plano cualquiera* P *que pase por dicho centro* (*).

Basta hacer girar la figura F″ en el primer caso, ó la figura F′ en el segundo, 180° alrededor de la perpendicular O′CB al plano P en O′.

En efecto, el teorema directo y su recíproco quedarán demostrados á la vez si se hace ver que las figuras F′ y F″ son simétricas con respecto á la perpendicular O′B al plano P en O′ (**658**). Pero A, A′ y A″ son tres puntos homólogos de las figuras F, F′ y F″, y O″, punto de interseccion de AA″ con el plano P, es punto medio de AA″, así como O′ lo es de AA′; y, por tanto, A′A″ será paralela á O′O″ y perpendicular, por consiguiente, á O′B. Está además dividida en dos partes iguales en el punto C, porque O′B es paralela á AA″ y está trazada por el punto medio de AA′. Son, pues, las figuras F′ y F″ simétricas con respecto á la recta O′B.

COROLARIO.

662. Dos figuras simétricas de una misma F, con respecto á dos planos diferentes P y Q, no son otra cosa, en cuanto á la *forma*, que la simétrica de F con respecto á un centro cualquiera (**659**); son, pues, superponibles. Pero su *orientacion* en el espacio no es la misma si los planos P y Q no son paralelos (**).

(*) BRAVAIS, *Journal de Mathématiques*, tomo XIV.

(**) NOTA 26.

663. En resúmen, si se prescinde de la orientacion, atendiendo sólo á la forma se ve *que una figura* F *no tiene más que una simétrica.* Todas las figuras obtenidas como simétricas de F, con respecto á un centro ó plano cualquiera, son superponibles.

Escolio.

664. El teorema precedente (**661**) permite escoger el modo de simetría que facilite más los razonamientos en la demostracion de cualquiera propiedad de dos figuras *simétricas.* Ordinariamente convendrá escoger la simetría respecto á un centro, porque al cambiar este centro de simetría no se altera ni siquiera la orientacion de la figura simétrica (**660**), y esto contribuirá á la sencillez de las demostraciones.

TEOREMA.

665. *La figura simétrica de una línea recta, es otra recta.*

Porque si se toma un punto cualquiera de la misma recta dada como centro de simetría, lo cual no puede alterar en nada el resultado (**660**), aparece ella misma como simétrica de sí propia.

Corolarios.

666. *La distancia de dos puntos, es igual á la de sus simétricos.*

Porque si se escoge como centro de simetría el punto medio de la recta que une los dos dados, se ve que cada uno de éstos es el simétrico del otro, y que las distancias que se consideran son una misma.

667. *El ángulo de dos rectas, es igual al de sus simétricas.*

Porque escogiendo el vértice del ángulo como centro de simetría, se ve que las rectas simétricas forman el ángulo opuesto por el vértice del dado.

Escolio.

668. Importa ver claramente la situacion de dos rectas simétricas con respecto á un centro ó á un plano.

Fig. 372.

Sea AB *(fig. 372)* una recta cuya simétrica, con respecto á un centro dado O', se nos pide. Veamos ántes la simétrica de AB con respecto á su punto medio O: el punto A tendrá en B su simétrico, y el B tendrá por simétrico A; de suerte que la recta simétrica de AB, con respecto á su punto medio O, será BA.—Pues bien, para pasar del centro O al O', bastará (**659**) hacer describir á los puntos A y B rectas BA' y AB' paralelas á OO' é iguales á 2 OO', y se tendrá como simétrica la recta A'B' *paralela á* AB *en sentido contrario y situada á igual distancia que ésta del centro* O' *de simetría.*

Fig. 373

Sea OA *(fig. 373)* una recta cuya simétrica, con respecto al plano P, se nos pide. Tomando ántes la simétrica de OA con respecto al punto O, en que ella corta al plano P, se encuentra su prolongacion OA', y basta (**661**) hacer girar OA' la cantidad angular 180° alrededor de la perpendicular OB al plano P para tener la recta pedida OA''. Se ve que *las dos rectas* OA *y* OA'', *simétricas con respecto á un plano* P, *están igualmente inclinadas sobre este plano, al cual cortan en un mismo punto* O.

TEOREMA.

669. *La figura simétrica de un plano es otro plano.*

Porque si se adopta un punto del plano como centro de simetría, el plano dado es el simétrico de sí mismo.

COROLARIOS.

670. *La figura simétrica de un polígono plano, es otro polígono igual al primero.*

Ante todo es un polígono plano (**669**); es además igual al primero, porque tiene sus lados y ángulos iguales á los lados y ángulos homólogos de éste (**666, 667**).

671. *El ángulo de dos planos es igual al de sus simétricos.*

Porque tomando como centro de simetría un punto de la arista del diedro dado, se ve que los planos simétricos de sus caras forman el diedro que le está opuesto por la arista.

Escolio.

672. Dos planos simétricos con respecto á un centro, son paralelos y equidistantes de dicho centro.

Dos planos simétricos con respecto á un plano, están igualmente inclinados sobre dicho plano, al cual cortan segun la misma recta.

TEOREMA.

673. *Dos poliedros simétricos tienen: 1.°, sus caras iguales una á una; 2.°, sus ángulos diedros homólogos iguales; 3.°, sus ángulos poliedros homólogos simétricos* (**566**).

1.° La igualdad de las caras homólogas resulta del número **670**.

2.° La igualdad de los diedros homólogos resulta del número **671**.

3.° Para mostrar claramente la relación que existe entre un ángulo poliedro A de la primera figura P y el ángulo poliedro A′ de la segunda figura P′, basta construir la figura simétrica de P, tomando por centro de simetría el vértice A del primer ángulo poliedro. Se ve así que el ángulo poliedro A′, es el opuesto por el vértice del ángulo poliedro A.

TEOREMA.

674. *Dos poliedros simétricos* P *y* P′, *son equivalentes.*

Si se descompone el P en tetraedros, á cada uno de ellos corresponderá su simétrico, y el conjunto de éstos formará el poliedro P′. Así, pues, estando compuestos los dos poliedros propuestos de un mismo número de tetraedros simétricos dos á dos, basta demostrar que éstos son equivalentes. Ahora bien, sea SABC *(fig. 374)* un tetraedro cualquiera. Formemos su simétrico SA′B′C′ con respecto al vértice S. Los triángulos ABC, A′B′C′ son iguales (**670**), y sus planos equidistan del punto S (**672**). Por consiguiente, teniendo los dos tetraedros bases y alturas iguales, son equivalentes.

Fig 374.

La simetría respecto á un plano daria en este caso una de-

mostracion igualmente sencilla; porque como la propiedad de que se trata se refiere á *magnitud* y no á *situacion*, se puede escoger como se quiera el plano de simetría (**662**). Y construyendo *(fig. 375)* la figura S'ABC simétrica de SABC con respecto al plano ABC, se ve que los dos tetraedros tienen la misma base ABC y alturas iguales SO y S'O, y queda demostrada su equivalencia.

Fig. 375.

Escolio.

675. Los dos prismas en que se descompone un paralelepípedo por un plano diagonal (**616**), son evidentemente simétricos con relacion al centro O del paralelepípedo *(fig. 343)*. Por eso tienen el mismo volúmen (**674**), aunque no sean en general superponibles. No pueden ser superpuestos más que en el caso de ser rectos.

§ VI.—Poliedros semejantes.

DEFINICIONES.

676. Llámanse *poliedros semejantes* á los que tienen sus ángulos poliedros iguales y están limitados por el mismo número de caras semejantes una á una.

De la igualdad de los ángulos poliedros se deduce la de los ángulos diedros homólogos.

Llámanse *homólogos* los elementos (caras, aristas, diedros, etc.) que se corresponden en dos poliedros semejantes.

677. *Las aristas homólogas de dos poliedros semejantes, son proporcionales.*

En efecto: puesto que en cada poliedro una misma arista pertenece á dos caras adyacentes, es evidente que las caras semejantes tienen la misma relacion de semejanza (**203**), y, por consiguiente, la relacion de dos aristas homólogas cualesquiera es constante.

TEOREMA.

678. *Al cortar una pirámide por un plano paralelo á su base, se determina una segunda pirámide semejante á la primera.*

Fig. 376

Sea la pirámide SABCDE *(fig. 376)* en la que un plano paralelo á su base ha determinado la seccion FGHIK. Las dos pirámides SABCDE, SFGHIK tienen sus caras semejantes, porque los polígonos ABCDE, FGHIK son semejantes (**635**), y las caras laterales SAB y SFG, SBC y SGH, etc., lo son tambien (**204**) por el paralelismo de los lados de estos dos polígonos.

En cuanto á los ángulos poliedros, el S es comun; y dos triedros homólogos, tales como A y F, son iguales (**577, 2.°**) por tener un ángulo diedro comun SA comprendido entre dos caras iguales una á una y semejantemente dispuestas, que son SAB igual á SFG, y SAE igual á SFK.

TEOREMA.

679. *Dos pirámides triangulares son semejantes cuando tienen un diedro igual comprendido entre dos caras semejantes una á una y semejantemente dispuestas.*

Sean las pirámides triangulares SABC y S'A'B'C' *(fig. 377)*, en las que se supone al diedro SA igual á S'A', y las caras SAB y SAC semejantes á las caras S'A'B' y S'A'C', y semejantemente colocadas.

Transportemos la segunda pirámide haciendo que tenga el mismo vértice que la primera, y que las caras homólogas de sus diedros iguales coincidan. Siendo el triángulo S'A'B' semejante á SAB, si el punto A' cae en D sobre SA, S'B' se confundirá con SB, y el punto B' se colocará en una posicion tal que DE sea paralela á AB. Del mismo modo, por ser el triángulo S'A'C' semejante á SAC, S'C' se confundirá con SC, y el punto C' caerá en un punto F' tal que DF sea paralela á AC. La base A'B'C' ocupará, pues, la posicion DEF, y su plano será paralelo al de la base ABC (**506**); y siendo la pirá-

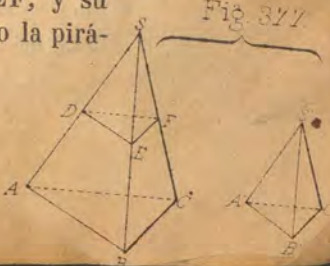
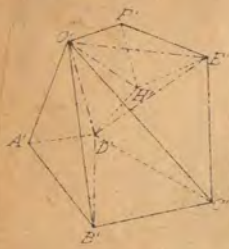


Fig. 377

Fig 378

mide SDEF semejante á SABC (**678**) tambien lo será la S′A′B′C′, que es la misma.

TEOREMA.



680. *Si dos poliedros están compuestos del mismo número de tetraedros semejantes uno á uno y semejantemente dispuestos, son semejantes (fig. 378).*

Sean OABD, OBCD, OCDE, etc., y O′A′B′D′, O′B′C′D′, O′C′D′E′, etc., dos series de tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos; el poliedro formado por los primeros, será semejante al formado por los segundos.

En efecto:

1.° Las caras homólogas son semejantes, como compuestas del mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos. Así, por ejemplo, en la cara ABCD los triángulos ABD, BCD que la constituyen son semejantes á los triángulos A′B′D′, B′C′D′, como caras homólogas de tetraedros semejantes, y por estar los triángulos ABD y BCD en un mismo plano, son suplementarios los diedros OBDA y OBDC de los dos tetraedros OABD, OBCD, y tambien lo serán los ángulos diedros homólogos de los tetraedros semejantes. Por consiguiente, los dos triángulos A′B′D′ y B′C′D′ estarán tambien en un mismo plano, constituyendo en el segundo poliedro una cara A′B′C′D′ semejante á ABCD.

2.° Los ángulos poliedros son iguales por tener todos sus elementos iguales y semejantemente dispuestos. En efecto, sus caras son iguales una á una y semejantemente dispuestas, como ángulos homólogos que son de polígonos semejantes y semejantemente dispuestos. Los ángulos diedros homólogos tambien son iguales, como diedros homólogos de dos tetraedros semejantes, ó como sumas de diedros iguales. Así, por ejemplo, el diedro BCDE, formado por las dos caras ABCD y CDE, es la suma de los dos diedros BCDO, y ECDO, que pertenecen á los tetraedros OBCD, OCDE; y el diedro B′C′D′E′, formado por las dos caras A′B′C′D′ y C′D′E′ del segundo poliedro, es la suma de los dos ángulos diedros B′C′D′O′ y E′C′D′O′, que

pertenecen á los tetraedros O'B'C'D', O'C'D'E', semejantes á los primeros.

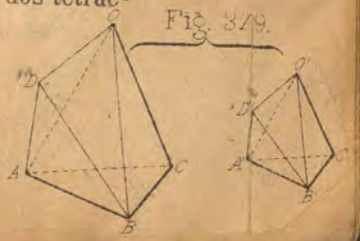
681. RECÍPROCAMENTE, *dos poliedros semejantes pueden ser descompuestos en el mismo número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos (fig. 379).*

Sea O un punto tomado en el interior del primer poliedro; descompongámosle en tetraedros tomando por vértice comun el punto O (**646**), y sea OABC uno de los tetraedros obtenidos. Siendo A'B'C' los puntos homólogos de A, B, C, tracemos un plano A'B'O' que forme con A'B'C' (y hácia el mismo lado que el ABO lo forma con ABC) un diedro igual á éste, y construyamos en ese plano un triángulo A'B'O' semejante al ABO. Tomando el punto O' así obtenido como centro de descomposicion, se descompone el segundo poliedro en tetraedros que corresponden á los del primero, y hay que probar que estos tetraedros son semejantes dos á dos.

Sea D un cuarto vértice del primer poliedro, tal que los dos triángulos ABC, ABD tengan un lado comun y estén situados en la misma cara ó en dos adyacentes. Comparemos los tetraedros OABD, O'A'B'D'. Sus caras OAB, O'A'B' son semejantes como homólogas de los tetraedros semejantes OABC, O'A'B'C'. Las caras ABD, A'B'D' lo son tambien como triángulos homólogos de dos caras semejantes en los poliedros semejantes. Además, si los dos triángulos ABC y ABD están en un mismo plano, los dos diedros OABD, O'A'B'D' serán iguales como suplementos de los diedros iguales (por construccion) OABC, O'A'B'C'; si los dos triángulos no están en un mismo plano, los dos ángulos diedros OABD, O'A'B'D', son tambien iguales como diferencias de los diedros iguales DABC, D'A'B'C' y OABC, O'A'B'C'. En ambos casos, pues, los tetraedros OABD, O'A'B'D' son semejantes (**679**).

La misma demostracion se aplicaria de uno en otro para todos los tetraedros. La semejanza de los últimos que se hayan comparado, permitirá siempre establecer la de los dos tetraedros siguientes.

Fig. 379.



Escolio.

682. Se llaman *homólogos* dos puntos O y O′ relacionados con dos poliedros semejantes; cuando unido uno de ellos O á los vértices consecutivos A, B, C de uno de los poliedros, y el otro O′ á los homólogos A′, B′, C′ del otro poliedro se obtienen dos tetraedros OABC, O′A′B′C′ semejantes y semejantemente dispuestos con relacion á los dos poliedros.

De la demostracion precedente resulta que dos puntos homólogos cualesquiera pueden ser tomados como centros de descomposicion de dos poliedros semejantes en tetraedros semejantes y semejantemente colocados.

Si el punto O es exterior al primer poliedro, su homólogo O′ tambien lo es al segundo; y entónces habria que considerar á los poliedros como compuestos de tetraedros aditivos y tetraedros sustractivos.

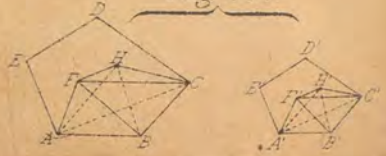
Si el punto O coincide con uno de los vértices A del primer poliedro, su homólogo O′ coincide con el vértice A′ del segundo, y las diagonales homólogas de los dos poliedros relativos á los vértices A y A′ se confunden con las aristas laterales á sus tetraedros homólogos.

683. Se llaman *homólogas* dos rectas relacionadas con dos poliedros semejantes, cuando sus extremos son dos á dos puntos homólogos. Tales son, por ejemplo, las diagonales que unen vértices homólogos.

La relacion de dos rectas homólogas cualesquiera, es igual á la relacion de semejanza de las caras homólogas de los dos poliedros.

Sean ABCDE, A′B′C′D′E′ *(fig. 380)* dos caras homólogas cualesquiera de los poliedros dados y FH y F′H′ dos rectas homólogas cualesquiera. Formemos los tetraedros homólogos FABC, F′A′B′C′; HABC, H′A′B′C′. De la semejanza de estos tetraedros se deduce la de los FHAC, F′H′A′C′. En efecto, las caras FAC, HAC son respectivamente semejantes á las F′A′C′, H′A′C′ y el diedro FACH diferencia de los diedros FACB y HACB es igual al diedro F′A′C′H′, diferencia de los

Fig. 380



F′A′C′B′ y H′A′C′B′. Los dos tetraedros FHAC, F′H′A′C′ son, pues, semejantes, y dan (**677**):

$$\frac{FH}{F'H'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

TEOREMA.

684. *La relacion de los volúmenes de dos poliedros semejantes, es igual al cubo de la relacion de semejanza de sus caras homólogas;* ó en otros términos: *dos poliedros semejantes, son entre sí como los cubos de sus aristas homólogas.*

Sean dos tetraedros semejantes SABC, SDEF *(fig. 381)* que pueden siempre suponerse colocados como indica la figura (**678**), de manera que sus bases sean paralelas.

El volúmen del primer tetraedro SABC tiene por expresion

$$\frac{ABC.SH}{3}.$$

Fig. 381

El del segundo es igual á

$$\frac{DEF.SK}{3}.$$

La relacion es, pues, igual á

$$\frac{ABC}{DEF} \cdot \frac{SH}{SK}.$$

Pero siendo el plano DEF paralelo al ABC, se tiene (**636**, **635**);

$$\frac{ABC}{DEE} = \frac{\overline{SH}^2}{\overline{SK}^2}; \quad \text{y} \quad \frac{SH}{SK} = \frac{SA}{SD} = \frac{AB}{DE}.$$

La relacion de los volúmenes está, pues, representada por

$$\frac{\overline{SH}^3}{\overline{SK}^3} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{DE}^3}.$$

Consideremos ahora dos poliedros semejantes P y P′. La relacion de semejanza de sus caras homólogas será (**677**) la de sus dos aristas homólogas cualesquiera AB y A′B′. Estos dos poliedros pueden ser descompuestos en un mismo número de

tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos (**681**), y la relacion de semejanza de las caras homólogas de dos tetraedros homólogos es igual (**683**) á la relacion $\frac{AB}{A'B'}$. Si el poliedro P se compone de los tetraedros T, T_1, T_2, y el P' de los homólogos T', T'_1, T'_2, se tendrá, pues, por lo que precede,

$$\frac{T}{T'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}; \quad \frac{T_1}{T'_1} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}; \quad \frac{T_2}{T'_2} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3},$$

y por un teorema conocido

$$\frac{T + T_1 + T_2}{T' + T'_1 + T'_2} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3} \quad \text{ó} \quad \frac{P}{P'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}.$$

Escolios.

685. *Las áreas de dos poliedros semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus aristas homólogas.*

686. De la relacion demostrada se deduce recíprocamente

$$\frac{AB}{A'B'} = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}.$$

Luégo cuando se quiera *ampliar* ó *reducir* un poliedro en una relacion dada, *la escala* que habrá que adoptar para ampliar ó reducir las aristas del poliedro, será la raiz cúbica de la relacion dada.

Aplicacion.

687. *Suponiendo que una de las aristas laterales* SA *de una pirámide tiene por longitud 1 m, ¿por qué puntos* a *y* a' *de ella deben trazarse planos paralelos al de la base, para dividir á la pirámide en tres partes equivalentes?*

Observando que las pirámides parciales habrán de ser respectivamente $^1/_3$ y $^2/_3$ de la propuesta, se tendrá

$$\frac{Sa}{SA} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \quad \frac{Sa'}{SA} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Y calculando por logaritmos, y haciendo $SA = 1^m$,

$$Sa = 0^m,693 \quad \text{y} \quad Sa' = 0^m,874$$

en menos de $\frac{1}{2}$ milímetro.

§ VII.—Apéndice.

PROPIEDADES GENERALES DE LOS POLIEDROS.

TEOREMA.

688. *En todo poliedro convexo, el número de aristas, aumentado en dos unidades, es igual al número de caras aumentado en el de vértices.*

Sean A el número de aristas, F el de caras y S el de vértices del poliedro propuesto; debemos demostrar que

$$A + 2 = F + S. \tag{1}$$

Consideremos ante todo una superficie poliedral convexa *abierta* y terminada en una línea quebrada plana ó no. Si se conservan las notaciones que preceden, los elementos análogos de esta superficie abierta satisfarán á la relacion

$$A + 1 = F + S.$$

En efecto, esta fórmula se cumple en el caso de una sola cara, porque en todo polígono el número de lados es igual al de vértices. Bastará, pues, probar que si la fórmula es cierta en el caso de F caras, lo será tambien para F + 1 caras.

Con este fin modifiquemos la línea quebrada que limita la superficie poliedral, añadiendo una cara que tenga m lados y m vértices. Considerando que esta nueva cara deje todavía abierto el poliedro, su contorno no podrá coincidir enteramente con el de la línea que limitaba á la superficie poliedral; y si suponemos que tiene p aristas comunes con ella, tendrá comunes $p + 1$ vértices; de suerte que, designando por F', A', S' los números de caras, aristas y vértices de la nueva superficie poliedral, se tendrá

$$F' = F + 1, \quad A' = A + m - p; \quad S' = S + m - (p + 1).$$

Y como estos valores satisfacen tambien á la relacion $A + 1 = F + S$, queda establecida su generalidad.

Pues bien, volvamos al caso de un poliedro convexo y á la relacion (1).

Si en el poliedro quitamos una cara, los números de aristas y de

vértices no alteran y son siempre A y S; pero el número F de caras se convierte en F — 1; se verificará, pues, la relacion

$$A + 1 = (F - 1) + S;$$

es decir,

$$A + 2 = F + S, \quad (1)$$

que era lo que debíamos demostrar.

Este notable teorema fué descubierto por Euler. La demostracion que hemos dado es de Cauchy.

Corolarios.

689. Sean t el número de caras triangulares de un poliedro, c el de las cuadrangulares, p el de las pentagonales; e, h, o, ..., los números de caras exagonales, heptagonales, octogonales, etc. Siendo cada arista comun á dos caras, se tendrá evidentemente

$$F = t + c + p + e + h + o + \ldots \quad (2)$$

$$2A = 3t + 4c + 5p + 6e + 7h + 8o + \ldots \quad (3)$$

Sean T, C, P, E, H, O, ... los números de ángulos triedros, tetraedros, pentaedros, etc., en el poliedro propuesto; y puesto que cada arista une dos vértices, se tendrá análogamente

$$S = T + C + P + E + H + O + \ldots \quad (4)$$

$$2A = 3T + 4C + 5P + 6E + 7H + 8O + \ldots \quad (5)$$

De la igualdad (3) se deduce que *el número de caras de número impar de lados* (es decir, el número $t + p + h + \ldots$) *es siempre par*. De la (5) se deduce que *el número de ángulos poliedros, ó bien de vértices, cuyo número de aristas es impar* (es decir, T + P + H + ... *es siempre par*.

690. Para expresar F en funcion de T, C, P, H, O, ..., bastaria eliminar S y A entre las relaciones (1), (4), (5), y se tendrá

$$2F = 4 + T + 2C + 3P + 4E + 5H + 6O + \ldots \quad (6)$$

Análogamente, se podria expresar S en funcion de t, c, p, e, h, o, ... eliminando F y A entre las relaciones (1), (2), (3). Así, se obtendria

$$2S = 4 + t + 2c + 3p + 4e + 5h + 6o + \ldots \quad (7)$$

Escolio.

691. *Si se concibe descompuesta la superficie de un poliedro convexo en varias porciones (pudiendo ser cada porcion una cara sola ó el grupo de muchas caras contiguas), el teorema de Euler se verifica tambien para el número de porciones de que se trata, el número de aristas que las limitan*

y el número de vértices situados en los contornos quebrados que sirven de límite á estas mismas porciones.

En efecto, los números que hay que considerar son los mismos, ya sean planos ó alabeados los contornos límites de las porciones. Pero en el primer supuesto se podria formar un nuevo poliedro sustituyendo una cara plana á cada porcion sin alterar el contorno, y el teorema de Euler sería aplicable á ese poliedro.

Todas las fórmulas que hemos establecido subsisten en este caso con solo notar que t es ahora el número de porciones terminadas por contorno triangular, c, p,..., los números de porciones cuyo contorno es cuadrangular, pentagonal, etc.

TEOREMA.

692. *En todo poliedro convexo, el número de caras triangulares, aumentado en el de ángulos triedros, es por lo menos igual á ocho.*

En efecto, si en la relacion (1) que puede escribirse

$$4F + 4S = 4A + 8,$$

se reemplaza F por el valor (2), S por el valor (4) y 4 A por la suma de los valores (3) y (5), se tiene

$$t + T = 8 + (p + P) + 2(e + E) + 3(h + H) + 4(o + O) + \ldots$$

Segun esto, *no existe poliedro alguno convexo que carezca de cara triangular y ángulo triedro.*

TEOREMA.

693. 1.° *No existe poliedro alguno convexo cuyas caras todas tengan más de cinco lados;*

2.° *No existe tampoco poliedro alguno convexo cuyos ángulos poliedros todos tengan más de cinco aristas.*

En efecto:

1.° Si en la desigualdad $2A > 3S$ que resulta de la comparacion de las relaciones (4) y (5) se reemplazan A y S por los valores (3) y (7), se tiene la fórmula

$$3t + 2c + p > 12 + (h + 2o + \ldots), \quad (1)$$

que prueba que t, c y p no pueden á la vez ser cero.

2.° Si en la desigualdad $2A > 3F$ que resulta de la comparacion de las relaciones (2) y (3) se reemplazan A y F por los valores (5) y (6), se tiene la fórmula

$$3T + 2C + P > 12 + (H + 2O + \ldots), \quad (2)$$

que prueba que T, C y P no pueden ser á un mismo tiempo cero.

Escolio.

694. La simetría de la fórmula de Euler con respecto á los números F y S y la semejanza de las ecuaciones (2) y (4), (3) y (5), dan orígen á una correspondencia que el lector habrá notado ya en las relaciones que de ellas puedan deducirse.

TEOREMA.

695. *No pueden existir más que cinco especies de poliedros convexos, cuyas caras tengan todas el mismo número* n *de lados, y cuyos ángulos poliedros todos tengan el mismo número* m *de aristas.*

En efecto, como cada arista pertenece á dos caras y une dos vértices, se tiene

$$(1) \qquad 2A = nF = mS.$$

La eliminacion de A y S entre estas ecuaciones y la fórmula de Euler, da

$$F = \frac{4m}{2(m+n) - mn}.$$

Para $n = 3$, esta relacion es

$$F = \frac{4m}{6 - m},$$

y no pueden darse á m más que los valores 3, 4 y 5 á los que corresponden respectivamente los valores $F = 4$, $F = 8$, $F = 20$.

Para $n = 4$ ó $n = 5$ se tiene

$$F = \frac{2m}{4 - m}, \quad \text{ó} \quad F = \frac{4m}{10 - 3m}.$$

No puede darse á m en uno y otro caso más que el valor 3, y resulta $F = 6$ ó $F = 12$.

Para $n = 6$ se tiene

$$F = \frac{m}{3 - m},$$

y no puede atribuirse á m ningun valor. Lo mismo *à fortiori* para $n > 6$, lo cual estaba ya indicado por el teorema del núm. **693**.

No hay, pues, más que cinco especies de poliedros convexos cuyas caras tengan todas el mismo número de lados y sus ángulos poliedros el mismo número de aristas. Y son: el tetraedro, el octaedro y el icosaedro, de caras triangulares; el exaedro, de cuadriláteros; el dodecaedro, de caras pentagonales.

(TEOREMA.)

696. *Tomando por unidad el ángulo recto, la suma de los ángulos de todas las caras de un poliedro convexo es igual á cuatro veces el número de vértices disminuido en dos unidades.*

Siendo la unidad el recto, se sabe que para una cara cualquiera de n lados la suma de sus ángulos es $2n - 4$. Si se designan por n, n', n'', etc., los números de lados de las diferentes caras, se tendrá, pues, para todas las caras.

$$(2n - 4) + (2n' - 4) + (2n'' - 4) + \ldots$$

Esta suma contendrá F sumandos. La suma de que se trata tiene, pues, por expresion

$$2(n + n' + n'' + \ldots) - 4F.$$

Y como cada lado pertenece á dos caras, el paréntesis vale 2A y se obtiene la fórmula

$$4(A - F) \qquad \text{ó} \qquad 4(S - 2),$$

segun el teorema de Euler.

CONDICIONES DE IGUALDAD
y de semejanza de dos poliedros convexos.

LEMA.

697. *Si en un ángulo poliedro convexo, cuyas caras, á excepcion de una sola, permanecen constantes, uno ó varios ángulos diedros no adyacentes á la cara que puede variar, aumentan ó disminuyen á la vez, esta cara misma aumenta ó disminuye.*

Sea el ángulo poliedro SABCDEF *(fig. 382)* y ASB la única cara que pueda variar. Supongamos primero que un sólo ángulo diedro SD aumente ó disminuya. Tracemos los planos ASD, BSD. Los dos ángulos poliedros SBCD y SADEF no cambian de forma ni de magnitud, puesto que permanecen invariables elementos (caras y diedros) bastantes á determinarlos. Por consiguiente, tendrá que aumentar ó disminuir el diedro ASDB; y como está formado por dos caras invariables de magnitud en el ángulo triedro SADB, la cara opuesta ASB aumenta ó disminuye **(569)** (*).

Si muchos diedros no adyacentes á la cara ASB aumentan ó disminuyen á la vez, tambien aumentará ó disminuirá esta cara; porque se

(*) NOTA 27.

Fig 382

pueden hacer variar aisladamente, y uno tras otro, los ángulos diedros que se consideren, y segun lo que precede, cada cambio parcial producirá siempre uno del mismo género en la cara ASB.

COROLARIO.

698. Si ciertos diedros de un ángulo poliedro cambian, permaneciendo constantes todas las caras, es imposible que todos varíen en el mismo sentido, es decir, que todos aumenten ó todos disminuyan.

LEMA.

699. *Si en un ángulo poliedro convexo que tenga más de tres caras se supone que todos los ángulos diedros varien unos aumentando y otros disminuyendo, permaneciendo convexo el poliedro y sin alteracion las caras, al recorrer sucesivamente y en su órden todas las aristas del ángulo poliedro habrá siempre por lo ménos cuatro variaciones de signo, si se afectan con el signo + las aristas de diedros que hayan aumentado, y con — las de los que hayan disminuido.*

Es imposible que no haya más que dos variaciones de signo, es decir, es imposible que á una serie de signos + suceda una serie de signos — hasta el primer signo +; porque *(fig. 382)* si las aristas SA, SF, SE estuviesen afectadas de +, y todas las siguientes SD, SC, SB de —, la cara ASE que separa los dos ángulos poliedros SAFE, SEDCBA, deberia haber aumentado y disminuido al mismo tiempo **(697)**, lo que es contradictorio.

Y puesto que hay más de dos variaciones de signo, y que para completar la vuelta tendremos que volver al punto de partida, es imposible que el número de variaciones sea impar. Es, pues, por lo ménos igual á 4.

TEOREMA.

700. *En un poliedro convexo cuyas caras son constantes, los diedros tambien lo son.*

«Supongamos, en efecto, que se puedan hacer variar las inclinaciones de las caras entre sí sin destruir el poliedro; y para simplificar la cuestion, supongamos que se puedan hacer variar todos los diedros á la vez aumentando unos, y otros disminuyendo; si recorremos una tras otra las aristas de uno cualquiera de los ángulos poliedros, afectándolas de signo + ó —, segun la alteracion del diedro haya sido positiva ó negativa, se hallarán muchos cambios de signo. Tratemos de determinar el número de estos cambios» (*).

(* CAUCHY, *Journal de l'École Polytechnique*, cuaderno XVI, pág. 96.

El lema precedente nos enseña que cada ángulo poliedro presenta en sus aristas por lo ménos cuatro cambios de signos.

El número de cambios que se obtengan al considerar todos los ángulos poliedros del poliedro, sería pues, por lo ménos 4 S, y es fácil ver que esto es imposible.

En efecto, debe encontrarse el mismo número total de variaciones de signo dando la vuelta alrededor en cada ángulo poliedro, ó haciendo el recorrido por el perímetro de cada cara, porque cada variacion alrededor de un vértice corresponde á dos aristas de signo diferente, que son consecutivas en el perímetro de una misma cara, y recíprocamente.

Ahora bien, en un perímetro el número de variaciones no puede exceder al número de lados, ni puede ser impar, porque, habiendo de volver al punto de partida, cada variacion obliga necesariamente á otra. Por consiguiente, cada cara triangular no puede dar más de dos cambios de signo; los cuadriláteros y pentágonos no pueden dar más de cuatro, ni los exágonos y heptágonos más de seis, y así sucesivamente. En resúmen, no podrá haber más cambios de signo que unidades en la suma

$$2t + 4c + 4p + 6e + 6h + 8o + \ldots$$

Pero esta suma es menor que 4S, porque se tiene **(690)**, segun la fórmula **(7)**,

$$4S = 8 + 2t + 4c + 6p + 8e + 10.h + 12.o + \ldots$$

Concluimos, pues, que es imposible que todos los diedros cambien á la vez.

«Si se supone, en segundo lugar, que no sólo las caras del poliedro »dado, sino tambien algunos diedros, permanezcan constantes y que se »puedan, sin embargo, hacer variar los diedros restantes sin destruir »el poliedro, quedaria patentizado el absurdo de esta hipótesis conci»biendo descompuesta la superficie del poliedro en tantas porciones »cuantos fuesen los contornos diferentes formados por aristas cuyos »diedros hubiesen variado segun el supuesto, y aplicar los mismos razo»namientos precedentes sobre caras, aristas y vértices á las porciones, »aristas que las limitan y vértices de sus contornos» (*). Se conseguirá apoyándose tambien en el lema precedente y en el escolio núm. **691**.

Corolarios.

701. Del teorema precedente se deduce que *dos poliedros convexos cerrados por el mismo número de caras iguales son iguales ó simétricos,* segun que las caras iguales estén ó no semejantemente dispuestas.

(*) Cauchy, *loc. cit.*

702. Tambien se deduce del teorema precedente que, *cuando dos poliedros convexos están limitados por el mismo número de caras semejantes, el segundo es semejante al primero ó al simétrico de este primero*, segun que las caras semejantes estén ó no semejantemente colocadas.

PROBLEMA.

703. *¿Cuál es el número de condiciones necesarias para determinar un poliedro convexo?*

1.° Consideremos un poliedro de naturaleza determinada, es decir, que se conocen para él los números A, F, S, t, c, p, e, h, o, etc.

Tomemos por base una de las caras del poliedro. Si tiene n lados, se requieren $2n - 3$ condiciones para determinarla. Fuera de ella quedan $(S - n)$ vértices, y como para determinar un punto en el espacio se necesitan tres condiciones, se tendrian en suma $(2n - 3) + 3(S - n)$, ó bien $(3S - n - 3)$ condiciones.

Pero los vértices que corresponden á una cara están en un mismo plano, y tres puntos bastan para determinar este plano; por consiguiente, para todos los vértices de una misma cara, despues de los tres primeros, no se necesitan en realidad más que dos condiciones. Así, pues, si designamos por n', n'', n''', ... los números de lados de las $(F - 1)$ caras á que hay que atender sobre la base escogida, es preciso disminuir el número $[3S - n - 3]$ en la suma $(n' - 3) + (n'' - 3) + (n''' - 3) + \ldots$ Luégo el número de condiciones es finalmente:

$$3(S + F - 2) + (n + n' + n'' + n''' + \ldots);$$

pero **(688, 689)**

$$n + n' + n'' + \ldots = 2A \qquad \text{y} \qquad S + F - 2 = A.$$

El número de condiciones es, pues, A. Así, *el número de condiciones necesarias para determinar un poliedro* en el caso indicado, *es igual al número de sus aristas.*

«Nótese, sin embargo, que los datos de que se trata no deben ser »tomados al acaso entre las líneas y los ángulos que constituyen los »elementos del poliedro; porque, aunque se tuvieran tantas ecuaciones »como incógnitas, podria suceder que ciertas relaciones entre las can»tidades conocidas hiciesen indeterminado el problema. Por el teore»ma que acabamos de demostrar parece que el conocimiento de las »aristas solas bastaria en general para determinar un poliedro; pero »hay casos en que este conocimiento es insuficiente. Por ejemplo, dado »un prisma cualquiera no triangular, se podrán formar una infinidad »de prismas que tengan aristas iguales y colocadas del mismo modo; »porque, teniendo la base más de tres lados, se pueden cambiar los án»gulos conservando los lados y dar de este modo á la base una infini-

»dad de formas diferentes; tambien se puede cambiar la inclinacion de »la arista longitudinal del prisma con relacion al plano de la base; y, »finalmente, se pueden combinar estos dos cambios, y siempre resul»tará un prisma cuyas aristas serán las dadas. Se ve, pues, que las »aristas solas no bastan en este caso para determinar el poliedro. Los »datos que conviene tomar son los que no dejen indeterminacion» (*).

2.° Supongamos ahora que la naturaleza del poliedro no esté determinada, y se sepa tan solo el número de sus vértices.

Escojamos á capricho tres de los vértices y construyamos un triángulo en que entran tres de los elementos dados. Si se considera este triángulo como base, hay (S — 3) vértices fuera de esta base y la determinacion de cada uno de ellos exige tres condiciones. El número pedido es, pues, aquí, $3 + 3(S - 3) = 3S - 6$.

Escolio.

704. Si un poliedro de naturaleza conocida se presenta determinado por un lado y (A — 1) ángulos, un lado arbitrario y los mismos ángulos determinarian un poliedro semejante al primero. Luégo *para que dos poliedros de la misma naturaleza sean semejantes, se necesitan* A — 1 *condiciones.*

Si los dos poliedros no son de naturaleza determinada y tienen tan sólo el mismo número S de ángulos poliedros, se requieren (3S — 7) condiciones para que sean semejantes.

RELACION ENTRE LA EXTENSION DE UNA FIGURA PLANA Y LA DE SU PROYECCION ORTOGONAL.

TEOREMA.

705. *La proyeccion de una recta* AB *sobre un eje* XY, *es igual al producto de la longitud* AB *de la recta por el coseno del ángulo agudo* α *que ella hace con el eje.*

Si la recta AB y el eje XY están en un mismo plano *(fig. 383)*, el teorema resulta inmediatamente de la definicion del coseno; porque, trazando por el punto A la paralela AD al eje XY, se tiene en el triángulo rectángulo ABD

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{ab}{AB}; \text{ de donde } ab = AB\cos\alpha.$$

Supongamos ahora que la recta AB y el eje XY no estén en un

(*) Legendre, *Eléments de Géometrie*, 14 edicion, nota 8.ª

Fig. 383.

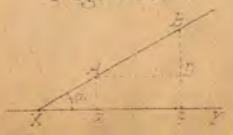
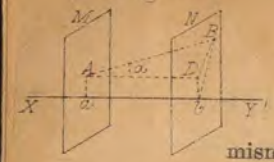
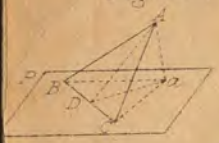


Fig. 384.



mismo plano *(fig. 384)*; la proyeccion ab es en este caso igual á la porcion del eje XY comprendida entre dos planos M y N trazados por A y B perpendicularmente al eje, ó bien á la porcion AD de la paralela al eje trazada por el punto A hasta el encuentro con el plano N. Pero el triángulo rectángulo ABD da

Fig. 385



$$AD = AB \cos \alpha; \text{ de donde } ab = AB \cos \alpha.$$

TEOREMA.

706. *El área de la proyeccion de un triángulo sobre un plano, es igual al área del triángulo multiplicada por el coseno del ángulo agudo que forma el plano del triángulo con el plano de proyeccion.*

Supongamos primero que el triángulo propuesto ABC *(fig. 385)* tenga uno de sus lados BC situado en el plano P de proyeccion. Si de la proyeccion a del vértice A se traza la perpendicular aD sobre BC, la recta AD será, en virtud del teorema de las tres perpendiculares, la altura del triángulo ABC. Pero la relacion de los triángulos aBC y ABC de la misma base BC es igual á la relacion de las alturas aD y AD; es decir, al coseno del ángulo agudo ADa, que mide la inclinacion de los dos planos.

Sea ahora ABC *(fig. 386)* un triángulo colocado de un modo cualquiera con respecto al plano de proyeccion, y tracemos por el vértice B, ménos distante de este plano, otro P' que le sea paralelo. La proyeccion aBc del triángulo ABC sobre el plano P', es igual á la que se obtendría proyectándole sobre el plano primitivo. Ahora bien, sea O el punto en que la prolongacion del lado AC corta al plano P', y α el ángulo del plano ABC con el plano de proyeccion; siendo el triángulo ABC la diferencia de dos triángulos ABO, CBO, que tienen un lado BO en el plano P', se tiene

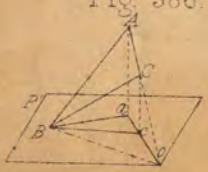
$$aBc = aBO - cBO = ABO \cdot \cos \alpha - CBO \cdot \cos \alpha$$
$$= (ABO - CBO) \cos \alpha = ABC \cdot \cos \alpha.$$

COROLARIO.

707. *El teorema es aplicable á la proyeccion de las áreas de un polígono plano y de una curva plana cerrada.*

Basta hacer ver que la proposicion es cierta para un polígono, puesto que una curva no es más que un polígono de un número infinito de lados infinitamente pequeños. Sean, pues, T, T', T'', ... las áreas de los triángulos que componen el polígono plano P; y t, t', t'', ... los correspondientes del polígono p que sirve de proyeccion á P; cada uno de los triángulos de la segunda serie es evidentemente la proyeccion del triángulo correspondiente de la primera; y si se llama α la inclinacion del plano del polígono P sobre el plano de proyeccion, se tiene

Fig. 386.



$$t = \mathrm{T}\cos\alpha,\ t' = \mathrm{T}'\cos\alpha,\ t'' = \mathrm{T}''\cos\alpha\ \ldots;$$

de donde, sumando

$$t + t' + t'' + \ldots, = (\mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' + \ldots)\cos\alpha \text{ ó } p = \mathrm{P}.\cos\alpha.$$

CÉNTRO DE DISTANCIAS PROPORCIONALES.

708. Sean A y B los puntos dados, α un *coeficiente* ó número fijo (positivo ó negativo) que corresponde al punto A, y $\mathfrak{G}$ un coeficiente relativo al punto B. Se sabe (**306**) que en la recta indefinida que pasa por los puntos A y B existe un punto único M tal que la relacion $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ sea igual en magnitud y signo á $-\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}$.

Proyectemos los tres puntos A, B, M sobre un plano cualquiera P, paralelamente á una direccion dada arbitrariamente, y propongámonos determinar la longitud de la proyectante MM_1, ó z del punto M en funcion de los coeficientes α y $\mathfrak{G}$ y de las proyectantes $\mathrm{AA}_1 = a$ y $\mathrm{BB}_1 = b$ de los puntos A y B.

Hay que distinguir dos casos, segun que los coeficientes α y $\mathfrak{G}$ son del mismo signo ó de signos contrarios.

En el primer caso *(fig. 387)*, la relacion $-\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}$ es negativa, y, por consiguiente (**306, 187**), el punto M está situado entre A y B. Si se traza DME paralela al plano P, se ve que la relacion $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ es igual en valor absoluto á $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}} = \frac{z-a}{b-z}$; se tiene, pues, $-\frac{\mathfrak{G}}{\alpha} = -\frac{z-a}{b-z}$; de donde

$$z = \frac{a\alpha + b\mathfrak{G}}{\alpha + \mathfrak{G}}.$$

En el segundo caso *(fig. 388)*, la relacion $-\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}$ es positiva, y, por consiguiente, el punto M está situado sobre una de las prolongaciones de AB (**306, 187**). Se tiene en este caso

$$-\frac{\mathfrak{G}}{\alpha} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{a-z}{b-z} \quad \text{ó} \quad \frac{z-a}{z-b};$$

de donde

$$(1) \qquad z = \frac{a\alpha + b\mathfrak{G}}{\alpha + \mathfrak{G}}.$$

Es la misma fórmula del primer caso. Y $(\alpha + \mathfrak{G})$ será el coeficiente atribuido al punto M.

709. Hemos supuesto en lo que precede que los puntos A, B, M es-

Fig 387.

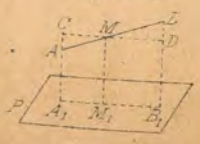
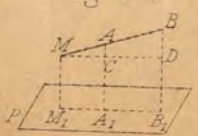


Fig 388.



taban situados á un mismo lado del plano P; pero esta restriccion no es necesaria, y la fórmula (1) subsiste, cualquiera que sea la disposicion de la figura, con tal que se miren los números a, b, z, que miden las proyectantes, como positivos para los puntos situados á un lado del plano P, y como negativos para los situados al lado opuesto.

En efecto, estando situados de cualquier modo los puntos A, B, M con respecto al plano P, tracemos un plano P' paralelo á P y á una distancia h bastante grande para que los tres puntos A, B, M queden por encima del plano P'. Si a', b', z' miden las proyectantes relativas á este plano P', se tendrá (**708**)

$$(\alpha + \beta)\, z' = a'\alpha + b'\beta.$$

Restando de esta igualdad la identidad

$$(\alpha + \beta)\, h = h\alpha + h\beta,$$

se obtiene la relacion

$$(\alpha + \beta)(z' - h) = (a' - h)\,\alpha + (b' - h)\,\beta.$$

Pero atendiendo á los signos de las proyectantes, se tiene siempre

$$z' - h = z,\ a' - h = a,\ b' - h = b,$$

siendo a, b, z las proyectantes sobre el plano P. Luego la fórmula:

$$(\alpha + \beta)\, z = a\alpha + b\beta$$

es cierta en todos los casos.

710. Pues bien; sean A, B, C, D,..., L varios puntos situados de cualquier modo en el espacio; designemos por α, β, γ, δ,..., λ, los coeficientes correspondientes, y por a, b, c, d,..., l los números positivos ó negativos que miden las proyectantes oblicuas ú ortogonales de los puntos A, B, C, D,..., L.

Sobre la recta AB *(fig. 389)* tómese el punto M, al que

$$\frac{M_1 A}{M_1 B} = -\frac{\beta}{\alpha},$$

la proyectante z_1 de este punto será en magnitud y signo

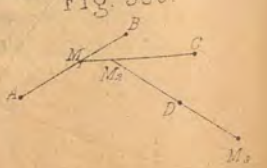
$$z_1 = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha + \beta}.$$

Trácese $M_1 C$, y fíjese sobre esta recta el punto M_2, tal que

$$\frac{M_2 M_1}{M_2 C} = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta},$$

la proyectante z_2 de este punto será:

Fig. 389.



$$z_2 = \frac{z_1(\alpha + \beta) + c\gamma}{(\alpha + \beta) + \gamma} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Trazando del mismo modo $M_2 D$ y tomando sobre esta recta un punto M_3 tal que

$$\frac{M_3 M_2}{M_3 D} = \frac{\delta}{\alpha + \beta + \gamma},$$

y continuando así hasta el último punto L, se obtendrá finalmente un punto M cuya proyectante z tendrá por expresion

$$(2) \qquad z = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots + l\lambda}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda}.$$

Se dice que el punto M es el *centro de las distancias proporcionales* de los puntos dados (A, α), (B, β), (C, γ), ..., (L, λ). Por lo demás, se llega al mismo punto M, cualquiera que sea el órden en que se unan los puntos dados; lo cual se ve en la fórmula (2), que expresa la distancia del punto M á un plano cualquiera P, en la cual no se manifiesta el órden que se ha seguido.

En el caso en que todos los coeficientes α, β, γ, ..., λ son iguales entre sí, el punto M recibe el nombre de *centro de las distancias medias;* su distancia á un plano cualquiera, paralelamente á una direccion arbitraria, está dada por la fórmula

$$z = \frac{a + b + c + \ldots + l}{n}.$$

siendo n el número de puntos que se consideran.

711. La fórmula (2) que puede escribirse:

$$z\Sigma\alpha = \Sigma a\alpha,$$

designando en general por la notacion $\Sigma(\alpha)$ la suma de todos los coeficientes, y por $\Sigma(a\alpha)$ la suma de todos los productos $a\alpha$, $b\beta$, ... $l\gamma$, expresa que *la suma de los productos obtenidos multiplicando la proyectante de cada punto por su coeficiente es igual al producto de la proyectante del centro de las distancias proporcionales por la suma de los coeficientes.*

Para que z sea nulo, es necesario y suficiente que $\Sigma(a\alpha)$ lo sea, porque se supone expresamente que la suma $\Sigma\alpha$ de los coeficientes dados no es cero. Luégo *para que un plano pase por el centro de las distancias proporcionales, es necesario y suficiente que la suma de los produc tos obtenidos, multiplicando la proyectante sobre dicho plano de cada punto por el coeficiente correspondiente, sea igual á cero.* Esta condicion se reduce á $\Sigma a = 0$ cuando se trata del centro de las distancias medias.

712. Notemos, por último, que, en el caso en que todos los puntos dados A, B, C, ..., L están en un mismo plano Q, el centro M está tambien en este plano. Si se toma entonces para direccion de las proyectantes una paralela al plano Q, todos los piés de las proyectantes estarán situados en la interseccion X Y del plano Q con el P de proyeccion; esto equivale á proyectar sobre una recta cualquiera X Y del plano Q.

713. Sean A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ..., dos grupos de puntos; M el centro de las distancias proporcionales del primer grupo, y Z el centro de las distancias proporcionales del sistema formado por todos los puntos de los dos grupos.

Llamemos α_1, α_2, ..., $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ..., los coeficientes; a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., las proyectantes de los puntos dados; y designemos por m y z las proyectantes de M y de Z. Se tendrá, por la fórmula (2)

$$m.\,\Sigma\,(\alpha) = \Sigma.\,(a\alpha), \qquad z.\,[\Sigma\,(\alpha) + \Sigma\,(\mathfrak{B})] = \Sigma\,(a\alpha) + \Sigma\,(b\mathfrak{B}),$$

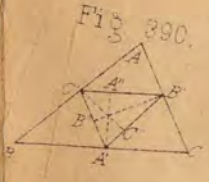
de donde, igualando $\Sigma\alpha = \mu$,

$$z\,[\mu + \Sigma\,(\mathfrak{B})] = m\,\mu + \Sigma\,(b\,\mathfrak{B}).$$

El punto Z es, pues, el centro de las distancias proporcionales de los puntos M_1, B_1, B_2 ... cuando se da á M un coeficiente igual á μ.

Así *en la investigacion del centro de las distancias proporcionales de un sistema de puntos se pueden reemplazar varios de ellos por su centro particular, con tal que se dé á este centro un coeficiente igual á la suma de los coeficientes de los puntos correspondientes.*

Inversamente, *se puede reemplazar un punto por otros varios de los cuales él mismo sea el centro, y cuyos coeficientes sean tales que su suma iguale al coeficiente del punto que se considera.*



CENTRO DE GRAVEDAD.

714. Se llama *centro de gravedad de una línea recta* A B el centro de las distancias medias de sus extremos A y B; es, por consiguiente, el punto medio de la recta.

El *centro de gravedad de una línea quebrada* plana es el centro de las distancias proporcionales de los centros de gravedad de los diversos lados de este contorno poligonal, siendo los coeficientes de estos centros proporcionales á los lados correspondientes.

Segun esto, es fácil ver que el *centro de gravedad del perímetro de un triángulo* ABC *es el centro* O *del círculo inscrito al triángulo* A′ B′ C′, *que se forma uniendo los puntos medios de los lados del triángulo primitivo (fig. 390).* En efecto, si se trazan las tres alturas A′ A″, B′ B″, C′ C″, del triángulo A′ B′ C′, y si se aplica la fórmula (3) proyectando sucesivamente sobre cada uno de los tres lados de este triángulo, se tienen las tres expresiones

Fig. 391.

Fig. 392.

$$\frac{AB.C'C''}{AB+BC+CA}, \quad \frac{BC.A'A''}{AB+BC+CA}, \quad \frac{CA.B'B''}{AB+BC+CA},$$

para las distancias del centro de gravedad á las tres rectas A'B', B'C', C'A'. Y como cada uno de los numeradores de estas tres fracciones representa el área del triángulo ABC, se ve que el centro de gravedad que se busca está equidistante de los tres lados del triángulo A'B'C'.

715. Se llama centro de gravedad del área de un triángulo, ó más brevemente *centro de gravedad de un triángulo*, el centro de las distancias medias de los tres vértices.

Es fácil ver *(fig. 391)* que el *centro de gravedad* G *de un triángulo* ABC *es el punto de concurso de las medianas de este triángulo;* porque para tener este centro es necesario, segun la construccion del número **710**, tomar el punto medio I de BC, y dividir despues IA de tal modo que $\frac{GI}{GA} = -\frac{1}{2}$. Luégo el punto G está sobre la mediana AI á su tercera parte, á contar desde la base, etc.

716. Dado un polígono ABCDE *(fig. 392),* si se le descompone en triángulos uniendo todos sus vértices con un punto O tomado en su plano, y se determina el centro G de las distancias proporcionales de los centros G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 de estos triángulos, atribuyéndoles coeficientes proporcionales á las áreas de los triángulos correspondientes, se tendrá lo que se llama el *centro de gravedad del polígono.* Si se toma el punto O en el interior del polígono, todos los triángulos son aditivos, y se da á todos los coeficientes el siguo +; si se toma el punto en el exterior, hay triángulos aditivos y triángulos sustractivos: los coeficientes de los centros de gravedad de triángulos aditivos serán las áreas de estos triángulos afectadas del signo +, y los coeficientes de los centros que corresponden á los sustractivos serán las áreas de éstos, pero precedidas del signo —.

Para dejar admitida esta definicion, hay que probar que la posicion del centro de gravedad G del polígono es independiente de la posicion que ocupa el punto O en su plano. Para ello proyectemos la figura sobre un plano cualquiera P, dando á las proyectantes una direccion perpendicular al plano ABCDE. Sean g, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 las proyectantes de los puntos G, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, y γ, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5 los coeficientes correspondientes, es decir, las áreas del polígono ABCD y de los triángulos OAB, OBC, OCD, ODE, OEA, tomadas con los signos convenientes.

La fórmula (3) da

$$\gamma \cdot g = \gamma_1 \cdot g_1 + \gamma_2 \cdot g_2 + \gamma_3 \cdot g_3 + \gamma_4 \cdot g_4 + \gamma_5 \cdot g_5,$$

en la cual $\gamma . g$ representa el volúmen del tronco de prisma recto, cuya base es ABCDE. En efecto, la proyectante g_1 del punto G_1 es igual al tercio de la suma de las proyectantes de los puntos O, A, B, puesto que g_1 es el centro de las distancias medias de los tres vértices del triángulo OAB. Luégo $\gamma_1 g_1$ representa (**653**) el volúmen del tronco de prisma recto, cuya base es OAB. Asimismo los productos $\gamma_2 g_2$, $\gamma_3 g_3$, ... representan los volúmenes de los troncos de prisma construidos sobre OBC, OCD,... Se ve, por otra parte, que siendo los factores γ_1, γ_2, γ_3,... positivos ó negativos, segun que los triángulos correspondientes sean aditivos ó sustractivos, los productos $\gamma_1 g_1$, $\gamma_2 g_2$,... tendrán naturalmente el signo + ó el signo —, segun que los troncos de prisma que representan sean aditivos ó sustractivos. Luégo, finalmente, el segundo miembro de la relacion que hemos escrito expresa la medida del volúmen del tronco de prisma construido sobre el polígono ABCDE, y designando por V este volúmen, se tiene

$$\gamma . g = V \quad \text{ó} \quad g = \frac{V}{\gamma}.$$

La distancia del punto G á un plano cualquiera P, contada perpendicularmente al plano ABCDE, es, pues, independiente de la posicion que ocupe el punto O en el plano del polígono.

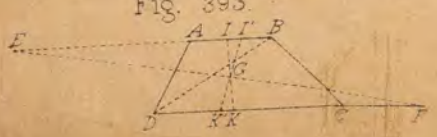
717. Busquemos, como ejemplo, el centro de gravedad de un trapecio ABCD *(fig. 393)*.

Segun el teorema precedente, el punto G es el centro de las distancias proporcionales de los centros de gravedad de los triángulos ABD, BDC, siendo los coeficientes de estos puntos proporcionales á las áreas de estos triángulos, ó bien á sus bases AB y DC, puesto que tienen la misma altura, ó á 2AI y 2KC, siendo los puntos I y K los puntos medios de las bases AB y CD. Pero (**713**) se puede reemplazar el centro de gravedad del triángulo ABD por el sistema de los tres puntos A, B, D, afectando á cada uno de un coeficiente igual á AI, y el centro de gravedad del triángulo BDC por el sistema de los tres puntos B, D, C, afectados de un coeficiente igual á KC.

En suma, hay que tomar el centro de las distancias proporcionales de los cuatro puntos A, B, C, D, afectados respectivamente de coeficientes iguales á AI, AI + KC, KC, AI + KC. Pero los puntos A y B pueden á su vez ser reemplazados por el punto I, cuyo coeficiente sea 2AI+KC, y los puntos D y C por el K, cuyo coeficiente sea 2KC+AI. El centro de gravedad G del trapecio es el centro de las distancias proporcionales de estos dos puntos I, K, y se obtendrá:

$$\frac{GI}{GK} = -\frac{2KC + AI}{2AI + KC} = -\frac{DC + AI}{AB + KC}.$$

Fig. 393.



Si se prolonga, por consiguiente, BA en una longitud AE = DC, y DC en una longitud CF = AB, la recta EF cortará á IK en el punto pedido G (*).

(*) Hay aquí alguna inexactitud. Los puntos A y B no pueden ser reemplazados por el punto medio, I, sino por un punto I' cuyo coeficiente sea 2AI + CK, pero tal que

$$(1) \qquad \frac{AI'}{BI'} = \frac{AI + CK}{AI};$$

análogamente, los puntos C y D no pueden ser reemplazados por el punto medio K, sino por un punto K' cuyo coeficiente sea 2CK + AI, pero tal que

$$(2) \qquad \frac{CK'}{DK'} = \frac{AI + CK}{CK}.$$

El centro de gravedad G ha de dividir á la recta I'K' en dos segmentos tales que

$$\frac{GI'}{GK'} = -\frac{2CK + AI}{2AI + CK} = -\frac{CD + AI}{AB + CK}.$$

Ahora bien, este punto G debe ser el punto de interseccion de I'K' con IK: en efecto, el punto de interseccion es tal que

$$\frac{GI'}{GK} = -\frac{II'}{KK'} = -\frac{AI' - BI'}{CK' - DK'};$$

pero de las proporciones (1) y (2) se deduce

$$\frac{AI' - BI'}{BI'} = \frac{CK}{AI} \quad \text{y} \quad \frac{CK' - DK'}{DK'} = \frac{AI}{CK};$$

y, por consiguiente,

$$\frac{AI' - BI'}{CK' - DK'} = \left(\frac{CK}{AI}\right)^2 \cdot \frac{BI'}{DK'};$$

de las mismas proporciones (1) y (2) se deduce tambien

$$\frac{AB}{BI'} = \frac{2AI + CK}{AI} \quad \text{y} \quad \frac{CD}{DK'} = \frac{2CK + AI}{CK};$$

y por consiguiente,

$$\frac{2CK + AI}{2AI + CK} = \frac{CK}{AI} \cdot \frac{CD}{AB} \cdot \frac{BI'}{DK'} = \left(\frac{CK}{AI}\right)^2 \cdot \frac{BI'}{DK'}.$$

718. Para determinar los centros de gravedad de los volúmenes, se sigue una marcha enteramente análoga á la que se acaba de exponer.

Despues de haber definido el *centro de gravedad de un tetraedro* como el centro de las distancias medias de sus vértices, se definirá el *centro de gravedad de un poliedro* cualquiera como el centro de las distancias proporcionales de los centros de gravedad de los tetraedros aditivos ó sustractivos, que se obtienen uniendo todos los vértices del poliedro con un punto O arbitrario en el espacio; cada uno de estos centros de gravedad debe ser afectado de un coeficiente proporcional al volúmen del tetraedro correspondiente. Por un razonamiento análogo al del núm. **716**, se demostraria que la posicion del centro de gravedad así definido no depende de la posicion del punto O.

Dejamos al lector el cuidado de desenvolver esto y hacer aplicaciones. Los problemas de este género pertenecen propiamente á la Estática, en donde se percibe mejor su utilidad. Los centros de gravedad desempeñan poco papel en la Geometría pura; intervienen, sin embargo, de un modo interesante en la determinacion de ciertas áreas y volúmenes, como vamos á ver inmediatamente, para el tronco de un prisma cualquiera, y como veremos más tarde despues de estudiar los cuerpos redondos.

Digamos algo, sin embargo, sobre el *centro de gravedad del tetraedro.* Si se reemplazan *(fig. 394)* los dos vértices A y B por el punto medio I de la arista que los une, afectado de un coeficiente 2, y del mismo modo se reemplazan los C y D por el punto K con el coeficiente 2, se ve que el *centro de gravedad* G *del tetraedro está en el punto medio de la recta que une los puntos medios de dos aristas opuestas.*

Fig. 394.

Si procediendo de otro modo se reemplazan los tres puntos B, C, D por el centro de gravedad O del triángulo B, C, D, afectado del coeficiente 3, se ve que el centro de gravedad G está sobre la recta A O y en un punto tal que

---

Se ve, pues, que

$$\frac{2CK + AI}{2AI + CK} = \frac{AI' - BI'}{CK' - DK'};$$

es decir, que el centro de gravedad es el punto de interseccion de I' K' con I K. Este punto divide á la recta IK en la misma relacion

$$\frac{CD + AI}{AB + CK}$$

en que divide á I' K', y por esto la construccion final que indican los autores es exacta.

(Nota de A. Portuondo.)

$$\frac{GO}{GA} = -\frac{1}{3}, \qquad \text{es decir,} \qquad GO = \frac{AO}{4}.$$

Reuniendo estos dos resultados, se llega á la proposicion siguiente:

En todo tetraedro, las tres rectas que unen los puntos medios de dos aristas opuestas, y las cuatro rectas que unen cada vértice con el punto de interseccion de las medianas de la cara opuesta, pasan por un mismo punto; este punto es medio en las tres primeras rectas, y en cada una de las otras cuatro está á las tres cuartas partes de su longitud, contadas desde el vértice correspondiente.

TEOREMA.

719. *El área lateral de un tronco de prisma cualquiera, es igual al producto del perímetro de la seccion recta por la paralela á las aristas, trazada por el centro de gravedad del contorno de esta seccion y comprendida entre las dos bases del tronco (fig. 395).*

Sean A′B′C′D′E′ A″B″C″D″E″ el tronco de prisma y ABCDE una seccion recta, hecha, por ejemplo, encima de las dos bases. Concibamos por los puntos medios L, M, N, P, R de los lados de la seccion recta y por el centro de gravedad G del contorno de esta seccion paralelas á las aristas del prisma, y designemos respectivamente por l', m', n', p', r', g' las longitudes de estas paralelas prolongadas hasta el plano de la base A′B′C′D′E′, y l'', m'', n'', p'', r'', g'' las longitudes de las mismas paralelas hasta el plano de la base A″B″C″D″E″. Siendo λ, μ, ν, π, ρ los lados AB, BC, CD, DE, EA de la seccion recta, se tendrá por la fórmula **(3)**

$$(\lambda + \mu + \nu + \pi + \rho)\, g' = \lambda l' + \mu . m' + \nu . n' + \pi p' + \rho r',$$

$$(\lambda + \mu + \nu + \pi + \rho)\, g'' = \lambda l'' + \mu . m'' + \nu . n'' + \pi p'' + \rho r'',$$

y restando

$$(\lambda + \mu + \nu + \pi + \rho)\,(g'' - g')$$

$$= \lambda (l'' - l') + \mu (m'' - m') + \nu (n'' - n') + \pi (p'' - p') + \rho (r'' - r').$$

El segundo miembro representa evidentemente la suma de las áreas de las caras laterales del tronco de prisma; el primer miembro es el producto del perímetro $(\lambda + \mu + \nu + \pi + \rho)$ de la seccion recta por la porcion $(g'' - g')$ de la paralela á las aristas del prisma trazada, por G y comprendida entre los planos A′B′C′D′E′ y A″B″C″D″E″. Queda, pues, demostrado el teorema.

TEOREMA.

720. *Los centros de gravedad de las áreas de todas las secciones planas de un prisma, están situados sobre una misma paralela á las aristas del prisma.*

El teorema es evidente para el prisma triangular, porque cuando se proyecta un triángulo oblicua ú ortogonalmente sobre un plano, cada mediana del triángulo primitivo tiene por proyeccion una mediana del nuevo triángulo.

Considerando un prisma cualquiera, sea ABCDE *(fig. 392)* su seccion recta, que ha sido descompuesta en triángulos uniendo sus vértices con un punto O de su plano; sea P el plano de una seccion cualquiera que forme un ángulo α con el de la seccion recta. Conservemos todas las notaciones del núm. **716,** y designemos por A', B', C', D', E', O', G', G'_1, G'_2, G'_3, G'_4, G'_5 los puntos en que las aristas del prisma y las paralelas á ellas trazadas por los puntos O, G, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 cortan al plano P. Siendo G el centro de gravedad de la seccion recta; se tiene

$$\gamma.g = \gamma_1.g_1 + \gamma_2.g_2 + \gamma_3.g_3 + \gamma_4.g_4 + \gamma_5.g_5,$$

y multiplicando por cos α,

$$\gamma \cos\alpha.g = \gamma_1 \cos\alpha.g_1 + \gamma_2 \cos\alpha.g_2 + \gamma_3 \cos\alpha.g_3 + \gamma_4 \cos\alpha.g_4 + \gamma_5 \cos\alpha.g_5.$$

Pero los puntos G'_1, G'_2, G'_3, G'_4, G'_5 son los centros de gravedad de los triángulos O'A'B', O'B'C', O'C'D', O'D'E', O'E'A', que componen la seccion por el plano P; y $\gamma_1 \cos\alpha$, $\gamma_2 \cos\alpha$, $\gamma_3 \cos\alpha$, $\gamma_4 \cos\alpha$, $\gamma_5 \cos\alpha$ son **(706)** las áreas de estos triángulos tomadas con signo + ó —, segun que estos triángulos son aditivos ó sustractivos. Luégo la última relacion expresa que el punto G' es el centro de gravedad de la seccion oblicua.

721. El teorema correspondiente sobre los centros de gravedad de los *perímetros* de las diversas secciones planas de un prisma, no es cierto. Se comprende, sí, que los centros de los perímetros de las secciones por una serie de planos paralelos, están situados en una misma recta paralela á las aristas; pero esta recta varía cuando la direccion de los planos paralelos es otra.

TEOREMA.

722. *El volúmen de un tronco de prisma cualquiera, es igual al pro-*

Fig. 395.

ducto del área de la seccion recta por la distancia entre los centros de gravedad de las dos bases.

El teorema resulta inmediatamente de lo dicho en los números **716** y **720**, en el caso en que una de las bases del tronco es seccion recta. Se ha visto, en efecto, en el núm. **716** que, designando para ese caso por V el volúmen del tronco, por γ el área de la seccion recta y por g la paralela á las aristas del prisma, trazada por el centro de gravedad de esta seccion recta hasta la otra base, se tendría $V = g.\gamma$; y segun el núm. **720**, se sabe que esta recta g une los centros de gravedad de las dos bases.

Consideremos ahora un prisma cuyas aristas sean oblicuas sobre las bases A′B′C′D′E′ y A″B″C″D″E″ *(fig. 395)*. Designemos por V su volúmen; tracemos una seccion recta ABCDE por encima de las dos bases, y llamemos S, V′, V″ el área de esta seccion, y los volúmenes de los dos troncos comprendidos entre esta seccion y cada una de las bases primitivas. Si se observa que los centros de gravedad G, G′, G″ de la seccion recta y de las dos bases están sobre una misma paralela á las aristas, se tiene

$$V'' = S.GG'', \qquad V' = S.GG';$$

y restando

$$V'' - V' = S\,(GG'' - GG') \qquad \text{ó} \qquad V = S.G'G''.$$

Escolio.

723. Sea G″K *(fig. 395)* la perpendicular desde el centro de gravedad de una de las bases sobre la otra; siendo α el ángulo en G″ del triángulo rectángulo KG″G′, se tiene

$$G''K = G'G'' \cos \alpha;$$

pero el ángulo α es igual al ángulo del plano de la seccion recta ABCDE y del plano de la base A′B′C′D′E′, cuya área designaremos por B; se tiene, pues **(707)**

$$S = B.\cos a;$$

y, por tanto,

$$V = S.G'G'' = B \cos \alpha . \frac{G''K}{\cos \alpha} = B.G''K.$$

De aquí este otro enunciado:

El volúmen de un tronco de prisma cualquiera, es igual al producto de una de las bases por la perpendicular bajada desde el centro de gravedad de la otra base sobre el plano de la primera.

724. Debemos llamar la atencion del lector sobre el método de

demostracion empleado en el núm. **716**. Este método *por los sólidos auxiliares*, que así se llama, consiste en hacer intervenir la Geometría del espacio en la solucion de un problema de Geometría plana, y se distingue por el carácter intuitivo de las demostraciones que proporciona. Los trabajos de Desargues, Monge y Poncelet, ofrecen numerosos y notables ejemplos de esto.

MÉTODO FUNDADO SOBRE LA PROYECCION CENTRAL.

725. Cuando dos figuras planas son la una perspectiva **(586)** de la otra, ciertas propiedades de la primera figura lo son tambien de la segunda; las propiedades que se conservan así en proyeccion, se llaman *proyectivas*.

Todas las propiedades descriptivas son proyectivas, porque si varios puntos están en línea recta, sus proyecciones tambien lo están; y si varias rectas concurren en un mismo punto, sus proyecciones pasan por la proyeccion de dicho punto.

No sucede lo mismo con las relaciones métricas. Algunas (como la proporcion armónica) son proyectivas; pero la mayor parte de ellas, áun las más sencillas, no lo son. Así, la igualdad entre los dos segmentos de una línea recta no es proyectiva más que en el caso muy particular en que hay paralelismo entre las proyectantes, ó bien entre la recta que se considera y su proyeccion.

Para demostrar en una figura dada una propiedad que se sabe ser proyectiva, basta probar que la propiedad es cierta en una cualquiera de las proyecciones de la figura. La aplicacion de este principio evidente constituye un método de investigacion conocido con el nombre de *método por proyeccion*, y es el más fecundo de los procedimientos en que se hace intervenir la Geometría del espacio para las cuestiones de Geometría plana.

Sin embargo, como no se hace así otra cosa que reducir un problema á otro, importa elegir el centro y el plano de proyeccion, de modo que la nueva figura ofrezca circunstancias adecuadas á la investigacion de que se trata. *Para obtener una proyeccion más sencilla que la figura propuesta, se proyecta ésta ordinariamente de tal modo que uno de sus puntos ó una de sus rectas pase al infinito en la proyeccion.*

Para esto basta evidentemente que el plano de proyeccion sea paralelo á la proyectante del punto, ó al plano proyectante de la recta que se quiere en proyeccion alejar al infinito. Así es cómo *un cuadrilátero completo da un paralelógramo cuando se le proyecta sobre un plano paralelo al que pasa por el centro* S *de proyeccion y por una de sus tres diagonales;* y áun como uno de los ángulos de este paralelógramo es igual al ángulo bajo el cual se ve desde el punto S la diagonal que se

considera, se puede elegir convenientemente el centro S para dar al paralelógramo obtenido un ángulo de la magnitud que se quiera (entre 0 y 180°).

726. Apliquemos el método por proyeccion á tres teoremas, que ya hemos demostrado de otro modo (**315, 331, 330**).

1.° *En un cuadrilátero completo* ABCDEF, *cada diagonal* AC *está dividida armónicamente por las otras dos* BD *y* EF *(fig. 206).* Proyectando la figura de tal modo que la proyeccion de EF se aleje al infinito, se obtiene un paralelógramo *abcd*, en el cual la propiedad enunciada es evidente; porque siendo la recta *ac* cortada por BD en su punto medio y por la tercera diagonal en el infinito, se encuentra dividida armónicamente (**336**).

2.° *Cuando dos triángulos* ABC, A′B′C′ *son tales que sus lados homólogos se cortan dos á dos en tres puntos* α, β, γ, *situados en línea recta, las rectas que unen los vértices homólogos concurren en un mismo punto* O *(fig. 211).* Proyectando la figura de manera que la proyeccion de la recta $\alpha\beta\gamma$ pase al infinito, hay que demostrar la misma propiedad para dos triángulos *abc*, *a′b′c′*, que tienen sus lados homólogos paralelos, y se sabe que dos triángulos de este género son homotéticos (**369**).

3.° *Cuando dos triángulos* ABC, A′B′C′ *son tales que las rectas que unen sus vértices homólogos concurren en un mismo punto* O, *los lados homólogos se cortan dos á dos en tres puntos* α, β, γ, *situados en línea recta (fig. 211).* Proyectando la figura de tal suerte que la recta que une los dos puntos α y β tenga su proyeccion en el infinito, se obtienen dos triángulos *abc*, *a′b′c′* que, como los primeros, tienen sus vértices homólogos situados en radios que parten de un mismo punto *o* (proyeccion de O), pero que tienen además dos pares *cb* y *c′b′*, *ca* y *c′a′* de lados homólogos paralelos; basta, pues, probar el paralelismo de *ab* y *a′b′*; esto resulta de que la relacion de *oa′* á *oa* es igual á la de *ob′* á *ob*, puesto que cada una de estas relaciones equivale á la de *oc′* á *oc*.

727. Estos ejemplos bastan para hacer comprender el espíritu del método, cuyo alcance se aprecia en el estudio de las cónicas.

Hé aquí, para terminar, una regla importante que permite reconocer á simple vista que ciertas relaciones métricas son proyectivas.

Una fraccion cuyos dos términos, numerador y denominador, son cada uno el producto de factores que expresan simples distancias AB, CD,... *entre los diversos puntos de una figura plana, es proyectiva si aparecen las mismas letras de esos diversos puntos en los factores lineales que componen los dos términos de la fraccion, y si á cada distancia que pertenece á uno de los términos de la fraccion corresponde en el otro término una distancia que esté en la misma recta que la primera.*

Sean, en efecto, A, B, C, D,... los diversos puntos de una figura plana, y A', B', C',... los correspondientes de su proyeccion sobre otro plano. Designemos por a, b, c, d,... las longitudes de las proyectantes SA, SB, SC,..., y por p, q,... las distancias del centro S de proyeccion á las rectas AB, CD,... Igualando dos expresiones bien conocidas del área del triángulo ASB, se tiene

$$AB.p = a.b.\ \text{sen ASB; de donde } AB = \frac{a.b}{p}\ \text{sen AS}$$

y del mismo modo se tendría

$$CD = \frac{c.d}{q}\ \text{sen CSD,...}$$

Pero cuando se sustituya á los factores lineales AB, CD,... los valores anteriores, se suprimirán en numerador y denominador las cantidades a, b,..., en virtud de la primera condicion, y lo mismo sucederá con las cantidades p, q,..., en virtud de la segunda. No quedará, pues, más que una fraccion, que se deducirá de la propuesta reemplazando en ella cada factor AB, CD,... por el seno del ángulo bajo el cual es visto desde el punto S cada segmento correspondiente AB, CD,... El valor de la fraccion que se considera no depende, pues, más que de los valores de los ángulos de las proyectantes, y de ningun modo de la posicion del plano de la figura ABCD; de suerte que la fraccion compuesta de la misma manera con los segmentos homólogos A'B', B'C',... de la figura A'B'C'D',... tendrá el mismo valor.

Esta proposicion contiene evidentemente como caso particular la del núm. **322**, porque la expresion

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DA} \quad \text{ó} \quad \frac{CA.DB}{CB.DA}$$

cumple las condiciones prescritas en la regla precedente. No sólo se demuestra así de un modo nuevo que *la relacion anarmónica de cuatro puntos en línea recta es proyectiva*, sino que tambien se encuentra un valor

$$\frac{\text{sen CSA}}{\text{sen CSB}} : \frac{\text{sen DSA}}{\text{sen DSB}}$$

de la relacion anarmónica de un haz de cuatro rectas SA, SB, SC, SD, situadas en un mismo plano; relacion que no depende más que de los ángulos de estas rectas, y que no exige la consideracion de una transversal auxiliar.

Digamos tambien que la relacion anarmónica de cuatro planos A, B, C, D que pasan por una misma recta es susceptible de la expresion análoga.

$$\frac{\text{sen } \overset{\frown}{CA}}{\text{sen } \overset{\frown}{CB}} : \frac{\text{sen } \overset{\frown}{DA}}{\text{sen } \overset{\frown}{DB}},$$

representando por $\overset{\frown}{CA}$ el ángulo de los planos C y A, y así los demas. Se deduce esta propiedad recordando que la relacion armónica de un haz de cuatro planos es igual á la del haz de las cuatro rectas, segun las cuales son cortados esos planos por un plano perpendicular á su comun interseccion.

FIGURAS HOMOLÓGICAS.

728. Con el método por proyeccion se enlaza directamente la teoría de las figuras homológicas, que es debida á Poncelet; teoría importante por el papel que desempeña en la Geometría pura, y por el gran partido que de ella puede sacarse en la Geometría descriptiva.

Se dice que *dos figuras situadas en un mismo plano son homológicas cuando se corresponden punto por punto y recta por recta, de tal manera que los puntos homólogos cualesquiera estén en línea recta con un punto fijo y que dos rectas homólogas cualesquiera se corten sobre una recta fija.* El punto fijo recibe el nombre de *centro de homología,* y la recta fija el de *eje de homología.*

Basta que se cumpla una de las dos últimas condiciones enunciadas en la definicion para que la otra quede satisfecha. Así:

Dos figuras son homológicas si se corresponden punto por punto y recta por recta, de tal modo que dos puntos homólogos cualesquiera estén en línea recta con un punto fijo.

En efecto, basta probar que si β es el punto de interseccion de un primer par (A C, A′C′) de rectas homólogas *(fig. 211)*, y γ es el de interseccion de un segundo par (A B, A′B′), el punto de interseccion α de un tercer par (B C, B′C′) está situado sobre la recta $\beta\gamma$. Pero esto queda demostrado en el teorema de los números **330**, etc.

Dos figuras son homológicas si se corresponden punto por punto y recta por recta, de tal modo que dos rectas homólogas cualesquiera se corten sobre una recta fija.

En efecto, basta probar que si O es el punto de interseccion de las rectas A A′, B B′, que unen dos primeros pares de puntos homólogos (A, A′) (B, B′), la recta C C′ que une un tercer par cualquiera (C, C′) pasa por O. Pero esto queda demostrado en el teorema de los números **331**, etc.

Poncelet llegó á la nocion de figuras homológicas *(Traité des proprié-*

tés proyectives, seccion 3.ª, capítulo I) proyectando sobre un plano cualquiera P dos figuras homotéticas situadas en otro plano Q. Es evidente en efecto, que en las dos nuevas figuras la recta que une dos puntos homólogos cualesquiera pasa por la perspectiva del centro de semejanza de las figuras primitivas, y que dos rectas homólogas cualesquiera que provienen de la perspectiva de dos rectas paralelas tienen su punto de concurso (**588**) en la línea de fuga del plano Q.

729. La transformada homológica F′ de una figura F, queda determinada *(fig. 396)* tan luego como se da el centro O y el eje X de homología, y además el punto a' homólogo de un primer punto a de la figura F, porque, para obtener el homólogo m' de un punto cualquiera m de la figura F, basta determinar el punto ε en que la recta am corta al eje X de homología, trazar la recta $\varepsilon a'$, homóloga de εa, y hallar la interseccion m' del radio Om con la recta $\varepsilon a'$.

A veces el centro ó el eje de homología está fuera de los límites del dibujo, y conviene saber determinar el homólogo m' de un punto cualquiera m de la primera figura sin emplear más que el centro O de homología y dos pares de rectas correspondientes, ó bien no empleando más que el eje de homología y dos pares de puntos correspondientes. Hé aquí el procedimiento:

1.° Sean O *(fig. 397)* el centro de homología y $(ap, a'p')$, $(aq, a'q')$ dos pares de rectas homólogas. Se determinará un tercer par $(bc, b'c')$ de rectas homólogas por medio de dos radios cualesquiera Obb', Occ', trazados por O; el punto g, comun á am y bc, tendrá por homólogo el g', comun á $b'c'$ y al radio Og, y trazando $a'g'$ homóloga de ag, su interseccion m' con el radio Om será el punto homólogo de m.

2.° Sean X *(fig. 398)* el eje de homología y (a, a') (b, b') dos pares de puntos correspondientes. Trácese la recta am hasta que corte en α al eje de homología; únase el punto a' con α, y se tendrá la homóloga de $a\alpha$; análogamente se obtendrá la homóloga $b'\beta$ de $b\beta$; el punto m' de interseccion de $a'\alpha$ y $b'\beta$ será, pues, el homólogo del punto m.

Nótese que todas estas construcciones no requieren más que el empleo de la regla.

730. Es evidente: 1.° que toda recta que pasa por el centro de homología se corresponde consigo misma; 2.°, que el centro de homología coincide con su homólogo, y que de esta propiedad gozan tambien todos los puntos del eje de homología.

Fig. 396.

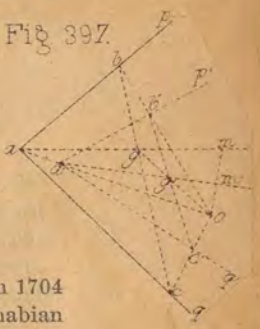
Puesto que dos rectas homólogas cortan al eje de homología en el mismo punto, á la recta en el infinito de la primera figura F debe corresponder en la segunda figura F′ una recta J′, paralela al eje de homología; y análogamente, á la recta en el infinito de la figura F′ corres-

ponde en la figura F una recta I paralela al eje X; esta recta I recibe el nombre de *recta límite* de la figura F, así como la recta J′ se llama *recta límite* de la figura F′ *(fig. 399)*.

Nada más sencillo que construir la figura F′ cuando son conocidas la figura F, su recta límite I, el centro O y el eje X de homología; sea m un punto cualquiera de la figura F; trácese por m una recta cualquiera mi, únase el centro O con el punto i, en que esta recta corta á I, y por el punto ε en que esta misma recta corta á X, trácese la paralela á Oi; esta paralela $\varepsilon m'$ (que es evidentemente la homóloga de la recta εmi) cortará al radio Om en el punto pedido m'.

En la figura se ve inmediatamente la relacion

Fig. 397.



$$\frac{Om'}{i\varepsilon} = \frac{Om}{im} = \frac{m'm}{\varepsilon m},$$

de donde se deducen las dos fórmulas:

$$Om' = i\varepsilon \frac{mO}{mi}; \qquad m'm = Om. \frac{m\varepsilon}{mi},$$

que nos serán útiles más tarde. La segunda fué ya descubierta en 1704 por el geómetra belga Le Poivre, quien habia estudiado (como lo habian hecho de la Hire y Newton) algunos casos particulares de la transformacion homológica mucho ántes de que Poncelet creara la teoría completa de estas figuras.

731. *Cuando dos figuras son homológicas:* 1.°, *la relacion anarmónica de cuatro puntos* a, b, c, d *en línea recta es igual á la relacion anarmónica de los cuatro puntos homólogos* a′, b′, c′, d′; porque estas relaciones son iguales una y otra á la del haz Oaa', Obb', Occ', Odd'; 2.°, *la relacion anarmónica de un haz* SA, SB, SC, SD *de cuatro rectas, es igual á la relacion anarmónica del haz formado por las cuatro rectas homólogas* SA′, SB′, SC′, SD′, porque los radios homólogos de los dos haces se cortan sobre el eje de homología, y las relaciones anarmónicas son una y otra iguales á la de la seccion comun hecha por el eje de homología.

732. Consideremos dos figuras homológicas; sean *(fig. 396)* O el centro y X el eje de homología (a, a') y (m, m') dos pares de puntos homólogos, μ y α los puntos en que los radios Omm' y Oaa' cortan al eje X, y ε el punto de concurso de am y $a'm'$. El haz $(\varepsilon O, \varepsilon a, \varepsilon X, \varepsilon a')$ es cortado por las dos transversales Omm', Oaa', y se tiene

$$\frac{mO}{m\mu} : \frac{m'O}{m'\mu} = \frac{aO}{a\alpha} : \frac{a'O}{a'\alpha}.$$

Fig. 398

Fig. 399

La relacion anarmónica $(O\eta mm')$ *tiene, pues, un valor constante.* A esta constante, que designaremos por λ, se da el nombre de *coeficiente de homología.*

La recíproca de esta proposicion es cierta y conduce á una nueva definicion de las figuras homológicas.

Si, dados en un plano un punto fijo O *y una recta fija* X *(fig. 396) se marcan sobre cada radio* $O\eta$ *dos puntos* m *y* m′ *tales que la relacion anarmónica* $(O\eta mm')$ *tenga un valor constante* λ, *los puntos* m *y* m′ *describen dos figuras homológicas.*

En efecto, por la definicion misma, dos puntos homólogos cualesquiera m y m' están en línea recta con el punto fijo O; basta, pues, probar que si el punto m describe una recta $a\varepsilon$, el punto m' describe á su vez una recta que corta el eje X en el mismo punto ε que la primera. En efecto, tracemos por el punto O una recta cualquiera, y designemos por a, α, a' los puntos en que corta á las rectas εm, εX, $\varepsilon m'$; el haz $(\varepsilon O, \varepsilon m, \varepsilon X, \varepsilon m')$ cortado por las dos transversales $O\mu$, $O\alpha$ dará las relaciones anarmónicas iguales $(O\mu mm')$, $(O\alpha aa')$: la segunda tendrá, por consiguiente, el mismo valor λ que la primera, lo cual indica que el punto a' (situado sobre $\varepsilon m'$) sería la posicion que tomaria el punto m' cuando m coincidiese con a.

La constante λ *es igual á la relacion de las distancias de la recta límite* I *al centro y al eje de homología.* Porque designando por c y γ las proyecciones ortogonales del centro O sobre las rectas I y X, y aplicando el teorema precedente al sistema formado por los cuatro puntos O, γ, c, c', el último de los cuales está en el infinito, se tiene

$$\frac{cO}{c\gamma} : \frac{\infty' O}{\infty' \gamma} = \lambda \qquad \text{ó} \qquad \frac{cO}{c\gamma} = \lambda.$$

Del mismo modo se veria que la relacion de las distancias de la recta límite J′ al centro y al eje de homología es igual á $\frac{1}{\lambda}$.

Cuando la constante λ es -1, las dos rectas límites coinciden con la recta única, que está equidistante del centro y del eje de homología: este género particular de homología toma el nombre de *homología armónica.*

Cuando el eje de homología está en el infinito, la relación anarmónica $(O\mu mm')$ se reduce á $\frac{mO}{m'O}$, y la relacion

$$\frac{mO}{m'O} = \lambda$$

muestra que la *homología* se convierte en *homotecia;* el punto O es el centro de semejanza y λ es la relacion de semejanza.

Finalmente, si el centro de homología se aleja al infinito, la relacion anarmónica $(O\mu mm')$ se reduce á $\frac{m'\mu}{m\mu}$ y la relacion

$$\frac{m'\mu}{m\mu} = \lambda$$

muestra que la segunda figura resulta de la primera *prolongando* en una relacion constante las *ordenadas* bajadas desde sus diversos puntos sobre el eje fijo X en una direccion dada: algunos geómetras dan á este género de homología, que se presenta frecuentemente, el nombre de *afinidad*.

733. Terminaremos este Apéndice por un teorema muy importante, que muestra la concordancia entre la transformacion homológica y la perspectiva.

La proyeccion F *y el rebatimiento* F_1 *de una figura plana* φ, *son dos figuras homológicas;* y recíprocamente, *dos figuras homológicas* F *y* F_1 *situadas en un mismo plano, pueden siempre ser consideradas como la proyeccion y el rebatimiento de una misma figura plana (fig. 400).*

Fig. 400

Sean φ una figura situada en un plano $\tilde{\omega}$, y F la figura que se obtiene proyectando la primera sobre un segundo plano P por medio de proyectantes que partan de un punto cualquiera S. Rebatamos el plano $\tilde{\omega}$ sobre el P haciéndole girar alrededor de la interseccion X de los dos planos, y sea F_1 la posicion que la figura φ toma en el plano P: se trata de probar que las figuras F y F_1 son homológicas. En efecto, sea μ un punto cualquiera de la figura φ, y sean m su proyeccion y m_1 su rebatimiento sobre el plano P; designemos por ω y O los puntos en que los planos $\tilde{\omega}$ y P son cortados por la perpendicular bajada desde S sobre el plano bisector del diedro que forman los planos P y $\tilde{\omega}$; finalmente, sea α el punto en que la recta $\mu\omega$ corta á X; el punto α será comun al rebatimiento y á la proyeccion de la recta $\mu\omega$; lo mismo sucederá evidentemente al punto O, sobre el cual se proyecta y se rebate tambien el punto ω; luego los puntos m y m_1, proyeccion y rebatimiento del punto μ, estarán sobre la recta $O\alpha$, y, por consiguiente, en línea recta con el punto O. Por otra parte, es evidente que dos rectas homólogas cualesquiera se cortan sobre la recta X, puesto que la recta del plano $\tilde{\omega}$, que tiene por proyeccion una de ellas y la otra por rebatimiento, corta á la recta X en un punto que es á la vez rebatimiento y proyeccion de sí mismo.

Recíprocamente, consideremos dos figuras homológicas F y F_1 situadas en un plano P; sean $\tilde{\omega}$ un segundo plano trazado arbitrariamente por el eje de homología X, y φ la posicion de la figura F_1 cuando se la lleva al plano $\tilde{\omega}$ por una rotacion alrededor de X. Designemos por

m y m_1 dos puntos homólogos de F y F_1, por μ la posicion del punto m_1 despues del giro, y por ω la posicion á que llega el centro O de homología; las rectas mm_1 O y $\omega\mu$ cortan á X en el mismo punto α, y la recta Oω es perpendicular al plano bisector del diedro que forman los planos P y $\acute{\omega}$. Pues bien; sea S el punto de interseccion de las rectas $m\mu$ y Oω: si se proyecta desde el punto S la figura φ sobre el plano P, se obtendrá una figura F', que, segun el teorema directo, será homológico de F_1, siendo O el centro y X el eje de homología, y m_1 y m un par de puntos homólogos; pero estas condiciones determinan enteramente (**729**) la figura homológica de F_1, y la figura F las cumple por hipótesis. Luego las figuras F' y F coinciden, y, por consiguiente, F es la proyeccion de la figura φ, cuyo rebatimiento es F_1.

Dejamos al lector la demostracion del siguiente teorema, que es la generalizacion del que precede: *Cuando dos figuras planas son la una perspectiva de la otra, sus proyecciones sobre un plano cualquiera son homológicas y recíprocamente.*

LIBRO VII.

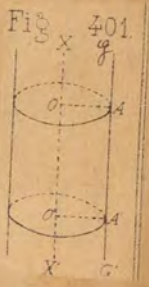
CUERPOS REDONDOS.

---

§ I.—Cilindro de revolucion.

DEFINICIONES.

734. Llámase *superficie cilíndrica de revolucion* la superficie engendrada por una recta GG′, que gira alrededor de otra fija XX′, á la cual se conserva paralela é invariablemente unida *(fig. 401)*.



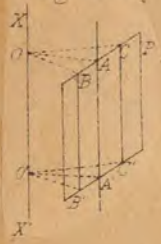
La recta fija XX′ se llama *eje* de la superficie, y la recta móvil recibe el nombre de *generatriz* ó *arista*.

735. Todo punto A de la recta GG′ describe una circunferencia, cuyo plano es perpendicular al eje y cuyo centro se halla en este eje, porque durante la rotacion la perpendicular AO á XX′, bajada desde A, se conserva perpendicular á dicho eje y de longitud constante.

Se llama *seccion recta* toda seccion por un plano perpendicular al eje. De las consideraciones que preceden resulta que *las diversas secciones rectas de una misma superficie cilíndrica son circunferencias iguales*. El radio de estos círculos, es decir, la distancia entre las paralelas XX′ y GG′, se llama *radio de la superficie cilíndrica*, y se ve que *el lugar de los puntos del espacio que distan de una recta fija una longitud dada, es la superficie cilíndrica de revolucion, cuyo eje es esta recta y cuyo radio es la longitud dada.*

736. Consideremos una recta fija XX′ y un plano P paralelo á ella, y sea R la distancia entre la recta y el plano, esto es, la distancia de la recta á su proyeccion AA′ sobre el plano *(fig. 402)*. El lugar de los puntos del plano P, situados á una distancia δ de la recta XX′, lo forman las dos rectas BB′ y CC′ paralelas á XX′, á uno y otro lado de AA′ y distantes de ésta una longitud AB, que es cateto de un triángulo rectángulo OAB, cuya hipotenusa OB es igual á δ, siendo igual á R el otro cateto OA. Todo esto en la hipótesis de que δ sea mayor que R; si δ fuese igual ó menor que R, el lugar se reduciria á la recta AA′ ó no existiria.

Fig. 402.



En vista de esto (**735**), un plano paralelo al eje de una superficie cilíndrica de revolucion contiene dos generatrices de ella ó una sola, ó no tiene punto comun con dicha superficie, segun que la distancia del plano al eje sea menor, igual ó mayor que el radio de la superficie.

737. Examinemos el caso en que el plano y la superficie no tienen más que una sola generatriz AC comun *(fig. 403)*.

En este caso, el plano puede ser considerado como la posicion límite de un plano móvil que, pasando por la generatriz fija AC y por otra A′C′, gire alrededor de la primera hasta que la segunda A′C′ (ocupando posiciones sucesivas sobre la superficie) llegue á confundirse con AC. Pues bien, si BB′ es una curva cualquiera trazada sobre la superficie cilíndrica, la secante BB′, que une los puntos B y B′ en que la curva corta á las generatrices AC y A′C′, estará constantemente situada en el plano variable ACA′C′; y como esta secante se convierte en la tangente BN á la curva BB′, cuando la generatriz móvil A′C′ llega á confundirse con AC, es decir, cuando el plano variable ACA′C′ llega á su posicion límite, se deduce que este plano límite contiene á la tangente BN. Así, el plano límite que se considera contiene las tangentes á todas las curvas situadas en la superficie cuyos puntos de contacto sean los puntos en que dichas curvas corten á la generatriz AC; se le llama *plano tangente á lo largo de la generatriz* AC.

Fig. 403.

La generatriz AC y la tangente á una curva cualquiera trazada sobre la superficie en el punto en que corte á AC, basta para determinar el plano tangente á lo largo de dicha generatriz. Escogiendo la tangente AM á la seccion recta AA', se descubre que *el plano tangente es perpendicular al determinado por el eje y la generatriz de contacto*, porque el plano tangente contiene la recta AM, y ésta, como perpendicular á las rectas OA y AC, lo es á su plano CAOX.

738. Llámase *cilindro de revolucion* el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica de revolucion y dos planos perpendiculares á su eje; ó en otros términos: el cuerpo engendrado por la rotacion de un rectángulo AA'O'O alrededor de uno de sus lados OO' *(fig. 404)*.

Fig. 404

La superficie cilíndrica que engendra el lado AA', es la *superficie lateral* del cilindro; los círculos descritos por OA y O'A' son sus *bases*, y la recta OO' es su *altura*.

739. Si se construye un prisma recto de la misma altura que el cilindro, y cuya base sea un polígono inscrito ó circunscrito al círculo que sirve de base al cilindro, se obtiene un *prisma inscrito* ó *circunscrito* al cilindro *(fig. 405)*. El plano de cada una de las caras laterales del prisma circunscrito, es tangente al cilindro (**737**). Si el polígono inscrito ó circunscrito al círculo es regular, el prisma que se obtenga, inscrito ó circunscrito, es regular.

Fig. 405

Si se considera un cilindro de revolucion y un prisma regular inscrito, como el área lateral del prisma se obtiene multiplicando el perímetro de su base por su altura (**609**), y cuando se hace crecer indefinidamente el número de lados del polígono base el perímetro de éste tiende hácia un límite fijo é independiente de la ley, segun la cual tienden sus lados hácia cero (**290**), y, por otra parte, la altura del prisma es constantemente igual á la del cilindro, se deduce que el área lateral del prisma inscrito tiende hácia un límite fijo é independiente de la ley, segun la cual los lados de su base tienden hácia cero: *este límite es lo que se llama área lateral del cilindro.*

Si se consideran un cilindro de revolucion y dos prismas regulares de bases semejantes, uno inscrito y otro circunscrito al cilindro *(figu-*

ra 405), se ve que el volúmen del cilindro está comprendido entre los volúmenes de los dos prismas. Pero estos dos prismas tienen la misma altura, y la relacion de las áreas de sus bases tiene por límite la unidad (**447**) cuando el número de sus lados crece indefinidamente; por consiguiente, la relacion de los volúmenes de los dos prismas tiende hácia la unidad, y *à fortiori* la relacion del volúmen del cilindro al de uno cualquiera de estos prismas tendrá por límite la unidad. Luégo *el volúmen de un cilindro de revolucion es el límite comun de los volúmenes de dos prismas regulares de bases semejantes inscrito y circunscrito, cuyo número de caras se hace crecer indefinidamente.*

Importa notar que este último enunciado es un verdadero *teorema*, miéntras que el del párrafo anterior relativo al área no es más que una *definicion*.

740. Se dice que son *semejantes* dos cilindros de revolucion cuando son engendrados por rectángulos semejantes; es decir, cuando sus alturas son entre sí como los radios de sus bases.

TEOREMA.

741. *El área lateral de un cilindro de revolucion, tiene por medida el producto de la circunferencia de su base por su altura.*

El área lateral del cilindro es el límite de las áreas laterales de los prismas regulares inscritos, cuyo número de caras crece indefinidamente. Designando, pues, por S, C, H el área lateral, la circunferencia de base y la altura del cilindro que se considera, y s, p el área lateral y perímetro de la base de un prisma regular inscrito, se tiene (**609**)

$$s = p.\mathrm{H}.$$

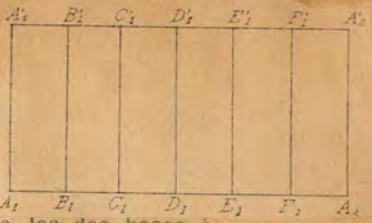
Si se hace crecer indefinidamente el número de lados de la base del prisma, s tiende hácia S y p hácia C, y se tiene, por tanto, en el límite

$$\mathrm{S} = \mathrm{C}.\mathrm{H}.$$

COROLARIOS.

742. Si R es el radio del cilindro, se tiene $\mathrm{C} = 2\pi\mathrm{R}$, y, por consiguiente,

Fig. 407



$$S = 2\pi R.H.$$

Añadiendo á esta área lateral las áreas de las dos bases ó el doble del área de una de ellas, se obtiene para el área total del cilindro

$$T = 2\pi R.H + 2.\pi R^2 = 2\pi R\,(R + H).$$

743. Sean S y S′ las áreas laterales, T y T′ las totales, R y R′ los radios, y H y H′ las alturas de dos cilindros de revolucion semejantes. Se tendrá (**740**)

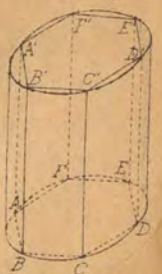
$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{H'} = \frac{R+H}{R'+H'},$$

y, por tanto,

$$\frac{S}{S'} = \frac{RH}{R'H'} = \frac{R}{R'} \times \frac{H}{H'} = \frac{H^2}{H'^2} = \frac{R^2}{R'^2},$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{R\,(R+H)}{R'\,(R'+H')} = \frac{R}{R'} \times \frac{R+H}{R'+H'} = \frac{H^2}{H'^2} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Fig. 406



Luégo *las áreas laterales ó totales de dos cilindros de revolucion semejantes, son entre sí como los cuadrados de los radios ó de las alturas.*

Escolio.

744. Consideremos un cilindro de revolucion y un prisma regular inscrito ABCDEF; A′B′C′D′E′F′ *(fig. 406)*; llevemos la cara ABB′A′ á estar en prolongacion de la cara BCC′B′ por una rotacion alrededor de la arista BB′; despues, por un giro alrededor de CC′, coloquemos las dos ya unidas en prolongacion de la cara siguiente CDD′C′, y así sucesivamente, hasta que todas las caras laterales del prisma estén en el plano de la última cara AFF′A′. En el primer movimiento alrededor de la arista BB′, el lado AB se conserva perpendicular á la arista y se coloca por tanto en prolongacion de CB; del mismo modo la recta ABC, formada por la reunion de AB y BC, se pone en prolongacion de DC, y así sucesivamente. Sobre el último plano se obtiene, pues un rectángulo $A_1 A_2 A'_2 A'_1$ *(fig. 407)*, cuya altura es igual á la del prisma recto y cuya base es igual al perímetro de la base del prisma. Este rectángulo es el *desarrollo* del área lateral del prisma.

Si el número de caras del prisma regular inscrito en el cilindro

crece indefinidamente, el rectángulo $A_1 A_2 A'_2 A'_1$ conserva la misma altura, y la longitud de su base $A_1 A_2$ tiende hácia la circunferencia base del cilindro.

El rectángulo límite que tiene una altura igual á la del cilindro, y una base igual á la circunferencia de la base del cilindro, se llama el *desarrollo* del área lateral de este cilindro.

TEOREMA.

745. *El volúmen de un cilindro de revolucion, tiene por medida el producto de su base por su altura.*

El volúmen del cilindro es el límite de los de prismas regulares inscritos, cuyo número de caras crece indefinidamente. Si designamos por V, B, H el volúmen del cilindro, el área de su base y su altura, y por v y b el volúmen y el área de la base de un prisma regular inscrito en el cilindro, se tiene (**626**)

$$v = b.H;$$

pero v tiene por límite V, y b tiende hácia B; luego en el límite

$$V = B.H.$$

Corolarios.

746. Si R es el radio del cilindro que se considera, se tiene $B = \pi R^2$, y, por tanto,

$$V = \pi R^2.H.$$

747. Si designamos por V y V′ los volumenes de dos cilindros de revolucion semejantes, R y R′ sus radios, y H y H′ sus alturas, se tendrá (**740**)

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{H'},$$

y por consiguiente,

$$\frac{V}{V'} = \frac{R^2.H}{R'^2.H'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 \cdot \frac{H}{H'} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{H^3}{H'^3}.$$

Luégo *los volúmenes de dos cilindros de revolucion semejan-*

tes son entre sí como los cubos de los radios ó los cubos de sus alturas.

748. EJEMPLO.

Calcular las dimensiones del litro (1 decímetro cúbico) para un vaso en forma de cilindro de revolucion cuya altura sea doble del diámetro.

Consideremos la altura H como la incógnita del problema. El radio del cilindro será $\frac{H}{4}$, y tomando por unidad de longitud el decímetro, se tiene

$$\pi\left(\frac{H}{4}\right)^2 . H = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{\pi H^3}{16} = 1;$$

de donde se saca

$$H = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}} = 1^{dm},720.$$

El litro es, pues, un cilindro de revolucion, cuya altura es de 172 milímetros y su radio de 42 milímetros.

§ II.—Cono de revolucion.

DEFINICIONES.

749. Se llama *superficie cónica de revolucion* la engendrada por una recta GSG′ *(fig. 408)*, que gira alrededor de otra fija XSX′, á la cual corta en un punto S, estando invariablemente unida con ella.

La recta fija XX′ se llama *eje* de la superficie, y la móvil GG′ *generatriz* ó *arista*. El punto S, que se llama *vértice*, divide á la superficie cónica en dos partes indefinidas, que se llaman *hojas*.

El lugar geométrico de las rectas que, pasando por un punto dado S, forman un ángulo α con una recta dada D, es una superficie cónica de revolucion que tiene por vértice el punto S y por eje la paralela á D por el punto S.

Un punto cualquiera A de la recta GG′ describe una circunferencia, cuyo centro está en el eje y cuyo plano es perpen-

Fig. 409.

...icular á este eje (**735**). Por consiguiente, todas las secciones por planos perpendiculares al eje son circunferencias, y el lugar de sus centros es el eje mismo. La semejanza de los triángulos SOA, SO'A' prueba que los radios OA, O'A' son proporcionales á las distancias SO, SO' de sus planos al *vértice*, y tambien proporcionales á los segmentos correspondientes SA, SA' de la generatriz GSG'. Sus áreas son, pues, proporcionales á los cuadrados de estas líneas.

750. Si consideramos una recta fija XSX' y un plano P *(fig. 409)* que pasa por un punto S de esta recta, designando por α el ángulo que forman la recta y el plano, es decir, el ángulo agudo de la recta SX con su proyeccion SA sobre el plano P, se observa que por el punto S se pueden trazar dos rectas SB y SC, situadas en el plano P (**537**), y que formen con la SX un ángulo agudo ω: esas dos rectas son simétricas con respecto á AA'. Esto tendrá lugar siempre que ω sea mayor que α; si ω fuese igual á α, las dos rectas se confundirian con la misma SA, y finalmente, no podrian existir si ω fuese menor que α.

Segun esto, un plano que pasa por el vértice de una superficie cónica de revolucion contiene dos generatrices de la superficie ó una sola, ó no tiene comun con la superficie más que el vértice, segun que la inclinacion del plano con respecto al eje es menor, igual ó mayor que el ángulo agudo de la generatriz con el eje; es decir, que el *semi-ángulo en el vértice* de la superficie cónica.

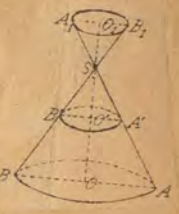
En el caso en que el plano dado no tiene más que una generatriz SA comun con la superficie *(fig. 410)*, se le puede considerar como la posicion límite de un plano variable que, pasando por la generatriz SA y por otra SA', gira alrededor de SA hasta que SA' llegue á coincidir con SA. Se ve por un razonamiento idéntico al hecho para el cilindro (**737**) que este plano contiene las tangentes AM, BN, ... á todas las curvas AA', BB', ... que pueden trazarse sobre la superficie en los puntos A, B, ... en que la generatriz SA las corta. Se da

Fig. 410.

á este plano el nombre de *plano tangente á lo largo de la generatriz* SA.

La generatriz SA y la tangente á una curva cualquiera trazada sobre la superficie en el punto en que esta curva corta á SA, bastan para determinar el plano tangente á lo largo de la generatriz. Si se escoge la tangente AM á una seccion AA' perpendicular al eje, se ve, como para el cilindro, que *el plano tangente es perpendicular al plano determinado por el eje y la generatriz de contacto.*

Fig. 411.



751. Se llama *cono de revolucion* el cuerpo engendrado por la rotacion de un triángulo rectángulo SOA alrededor de uno de sus catetos SO *(fig. 411)*.

La superficie cónica engendrada por la hipotenusa SA es la *superficie lateral* del cono, el círculo descrito por el cateto OA es *su base*, la recta SO es *su altura*, y la hipotenusa SA es *el lado* ó *la apotema* del cono.

752. Si se corta una superficie cónica de revolucion *(figura 411)* por dos planos AB, A'B' perpendiculares al eje y situados á un mismo lado del vértice S, se obtiene un volúmen limitado por una porcion de superficie cónica y por los dos círculos AB, A'B'. Este cuerpo que se llama *tronco de cono de bases paralelas*, es la diferencia de dos conos SAB y SA'B'. Tambien se le puede considerar como engendrado por la rotacion del trapecio rectángulo AOO'A' alrededor del lado OO'. La recta OO' es *la altura* del tronco; los círculos AB, A'B' son *sus bases*, y AA' es *su lado* ó *su apotema*.

Si se corta una superficie cónica de revolucion por dos planos AB y A_1B_1 perpendiculares al eje, pero situados á diferente lado del vértice S *(fig. 411)*, se obtiene un cuerpo que es la suma de dos conos SAB, SA_1B_1. Conviene dar tambien á este cuerpo el nombre de *tronco de cono;* pero para distinguirle del tronco de cono propiamente dicho que hemos definido en el párrafo anterior, le llamaremos *tronco de cono de segunda especie* **(650)**.

753. Construyendo una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono y por base un polígono inscrito ó circunscrito

Fig. 412.

á la base del cono *(fig. 412)*, se obtiene una pirámide *inscrita* ó *circunscrita* al cono. El plano de una cualquiera de las caras laterales de la pirámide circunscrita es tangente al cono. Si el polígono es regular, la pirámide inscrita ó circunscrita es regular.

Se llama *área lateral de un cono* el límite del área lateral de una pirámide regular inscrita cuyo número de caras crece indefinidamente. Será legítima esta *definicion* si se demuestra que el límite de que se habla existe y es independiente de la ley, segun la cual tienden hácia cero los lados de la base de la pirámide. El razonamiento es análogo al que se ha empleado para el cilindro **(739)**; notemos solamente que en el prisma inscrito en el cilindro la altura es constante, miéntras que la apotema de la pirámide regular inscrita en el cono es variable y tiene por límite la apotema del cono.

Se *demuestra*, absolutamente lo mismo que en el caso del cilindro, que: *el volúmen de un cono de revolucion es el límite comun de los volúmenes de pirámides regulares de bases semejantes inscrita y circunscrita, cuyo número de caras se hace crecer indefinidamente.*

754. Se llaman *semejantes* dos conos de revolucion cuando están engendrados por triángulos rectángulos semejantes; es decir, cuando sus alturas son entre sí como los radios de las bases.

TEOREMA.

755. *El área lateral de un cono de revolucion, tiene por medida el producto de la circunferencia de su base por la mitad de su apotema.*

El área lateral del cono es el límite de las áreas laterales de pirámides regulares inscritas, cuyo número de caras crece indefinidamente. Así, pues, si S, C, A representan el área lateral, la circunferencia de la base y la apotema del cono, y s, p, a el área lateral, el perímetro de la base y la apotema de una pirámide regular inscrita, se tiene **(640)**

$$s = p \cdot \frac{1}{2} a.$$

Pero s tiende hácia S, p hácia C, y a hácia A; luégo se tiene en el límite

$$S = C \cdot \frac{1}{2} A.$$

COROLARIO.

756. Si R es el radio de la base del cono, se tiene $C = 2\pi R$, y, por tanto,

$$S = \pi R . A.$$

Si á esto se añade la base πR^2, se tiene para el área total

$$T = \pi RA + \pi R^2 = \pi R (A + R).$$

757. Razonando como en el núm. **743**, se reconoce que *las áreas laterales ó totales de dos conos de revolucion semejantes son entre sí como los cuadrados de los radios, de las apotemas ó de las alturas.*

758. Consideremos un cono de revolucion y una pirámide regular inscrita SABCDEF *(fig. 413)*. Por una rotacion alrededor de la arista SB, llévese la cara ASB á ser prolongacion de la SBC; despues, por una rotacion alrededor de SC, se llevan las dos caras ya unidas á ser prolongacion de la cara siguiente CSD, y así sucesivamente hasta que todas las caras laterales de la pirámide estén reunidas en el plano de la última FSA. Se obtendrá así un sector poligonal regular $S_1 A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 A_2$ *(fig. 414)*, cuyo radio es la arista de la pirámide regular; es decir, la apotema del cono, y cuya base es una línea quebrada regular, igual al perímetro de la base de la pirámide.

Si el número de caras de la pirámide regular inscrita en el cono crece indefinidamente, el sector $S_1 A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 A_2$ conserva el mismo radio y su base degenera en un arco de círculo cuya longitud es igual á la circunferencia del cono. El sector circular $S_1 A_1 D_1 A_2$ así obtenido, se llama *el desarrollo* del área lateral del cono. Es fácil calcular el número n de grados contenidos en el ángulo $A_1 S_1 A_2$ de este sector circular.

Siendo A la apotema del cono, y R el radio de su base, se tiene

$$\frac{n}{360} = \frac{\text{arco } A_1 A_2}{2\pi . S_1 A_1} = \frac{2\pi R}{2\pi A}, \quad \text{de donde,} \quad n = 360^\circ \frac{R}{A}.$$

Para $A = 2R$, se tiene $n = 180^\circ$; de suerte que su desarrollo es un semicírculo. El cono correspondiente se llama *equilátero;* su seccion por un plano que pase por el eje SO, es un triángulo equilátero SAI

Fig. 415

TEOREMA.

759. *El área lateral de un tronco de cono de revolucion de bases paralelas, tiene por medida el producto de la semisuma de las circunferencias de sus bases por su apotema.*

El área lateral del tronco de cono A D D' A' *(fig. 415)* es la diferencia de los conos S A D, S A' D'. Si inscribimos en el cono S A D una pirámide regular S A B C D E F, el plano A' D' de la base superior del tronco de cono descompone esta pirámide en dos partes, que son: la una S A' B' C' D' E' F', una pirámide regular inscrita en el cono S A' D'; la otra, A B C D E F A' B' C' D' E' F', un tronco de pirámide regular inscrita en el tronco de cono A D D' A'. Pero siendo las áreas laterales de los conos S A D, S A' D' los límites de las áreas laterales de las pirámides S A B C D E F, S A' B' C' D' E' F' cuando el número de sus caras crece indefinidamente, el área lateral del tronco de cono será el límite del área lateral del tronco de pirámide regular. Siendo s, a, p, p' el área lateral, la apotema y los perímetros de las bases del tronco de pirámide, y análogamente S, A, C, C' el área lateral, la apotema y las circunferencias, bases del tronco de cono, se tendrá (**641**)

$$s = \frac{1}{2}(p + p')\,a.$$

Pero en el límite s tiende hácia S, p hácia C, p' hácia C' y a hácia A; luégo se tiene

$$S = \frac{1}{2}(C + C')\,A.$$

COROLARIO.

760. Si R y R' son los radios de las bases del tronco, se tiene $C = 2\pi R$, $C' = 2\pi R'$, y, por tanto,

$$S = \pi\,(R + R')\,A.$$

761. Si por el medio A_1 del lado A A' *(fig. 416)* se traza un plano paralelo á las bases del tronco del cono, el radio $A_1 O_1$ de

Fig 416

la seccion circular determinada por este plano es paralelo (**495**) á los radios AO, A'O' de las bases, y, por consiguiente, (**433**) igual á la semisuma de estos radios. Luégo la circunferencia A_1D_1 es la media aritmética de las circunferencias bases y puede decirse que *el área lateral de un tronco de cono de revolucion de bases paralelas tiene por medida el producto de la apotema por la circunferencia equidistante de las bases.*

Este último enunciado se aplica tambien al cilindro y al cono, porque la circunferencia equidistante de las bases es igual en el cilindro á la de la base, y en el cono á la mitad de la de la base.

TEOREMA.

762. *El volúmen de un cono de revolucion, tiene por medida el producto de su base por el tercio de su altura.*

El volúmen del cono es el límite de los de pirámides regulares inscritas, cuyo número de caras crece indefinidamente. Así, pues, si V, B, H son el volúmen del cono, el área de su base y su altura, y son v, b el volúmen y el área de la base de una pirámide regular inscrita en el cono, se tiene (**643**)

$$v = \frac{1}{3}\, b.H.$$

Pero v tiende hácia V, y b hacia B. Luégo en el límite se tiene

$$V = \frac{1}{3}\, B.H.$$

COROLARIOS.

763. Si R es el radio de la base del cono, se tiene $B = \pi R^2$, y, por tanto,

$$V = \frac{1}{3}\, \pi R^2.H.$$

Se ve, como en el núm. **747**, que *los volúmenes de dos conos de revolucion semejantes están en la relacion de los cubos de sus alturas ó los cubos de los radios de sus bases.*

764. Cuando un rectángulo ABCD gira alrededor de uno de sus lados AB *(fig. 417)*, el triángulo ABC engendra un cono, cuyo volúmen es el tercio (**745**, **762**) del volúmen del cilindro engendrado por el rectángulo ABCD. Por consiguiente, el volúmen que engendra al mismo tiempo el triángulo ADC equivale á los dos tercios del mismo cilindro. Esta observacion nos será útil más tarde.

Fig. 417.

TEOREMA.

765. *El volúmen de un tronco de cono de revolucion de bases paralelas, es igual á la suma de los volúmenes de tres conos cuya altura comun es la del tronco, siendo sus bases respectivas la inferior del cono, la superior y una media proporcional entre ellas.*

Consideremos, como en el núm. **759**, un tronco de pirámide regular inscrito en el tronco de cono. Los volúmenes de las dos pirámides cuya diferencia es el tronco, tienen respectivamente por límites los de los dos conos, cuya diferencia es el tronco de cono propuesto, y, por consiguiente, se tendrá el volúmen de este tronco de cono tomando el límite del volúmen del tronco de pirámide. Si V, b, B, H son el volúmen, las bases y la altura del tronco de cono, y son v_1, b_1, B_1 el volúmen y las bases del tronco de pirámide inscrita, se tendrá (**648**)

$$v_1 = \frac{H}{3}(B_1 + b_1 + \sqrt{B_1 . b_1}).$$

Pero v_1 tiende hácia V, b_1 hácia b, B_1 hácia B, y se tiene en el límite

$$V = \frac{H}{3}(B + b + \sqrt{B . b}),$$

cuya traduccion al lenguaje vulgar es el enunciado del teorema.

COROLARIOS.

766. Si R es el radio de la base inferior B, y r el de la superior b, se tiene $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$, y, por consiguiente,

$$(1) \qquad V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

767. El razonamiento que precede se aplica al tronco de *segunda especie;* basta sustituir la palabra *suma* á la palabra *diferencia* y observar que el tronco de pirámide inscrito en el tronco de cono es de *segunda especie*, y, por tanto, el radical que figura en la expresion de v_1 debe tener el signo — (**650**). De este modo se obtiene para el volúmen del tronco de cono de segunda especie la fórmula

$$V = \frac{H}{3}(B + b - \sqrt{Bb}) = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 - Rr).$$

768. Á veces en la práctica (por ejemplo, en la cubicacion de los troncos de árboles *rollizos*) las bases difieren tan poco que se puede asimilar sin inconveniente el cono truncado á un cilindro cuya altura sea la del tronco y cuya base sea la seccion hecha á igual distancia de las dos del tronco. El error que así se comete es fácil de valuar restando el volúmen cilíndrico.

$$(2) \qquad v = \pi . H \left(\frac{R + r}{2}\right)^2$$

del volúmen del cono truncado dado por la fórmula (1). Así, pues,

$$V - v = \frac{1}{3}\pi H \left(\frac{R + r}{2}\right)^2.$$

El error cometido es, pues, igual al volúmen de un cono que tuviese por altura la del tronco, y por radio de su base la semidiferencia de los radios de las del tronco.

Cuando se quiera aplicar la fórmula (2) á la cubicacion de un tronco de árbol, convendrá prepararla del siguiente modo:

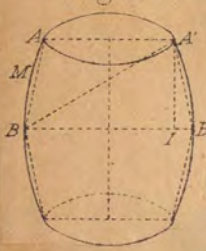
designando por C la longitud de la circunferencia media (que se mide con un cordon métrico), el radio de esta circunferencia será $\left(\frac{C}{2\pi}\right)$ y el volúmen será, por consiguiente,

$$v = \pi H \cdot \frac{C^2}{4\pi^2} = \frac{HC^2}{4\pi}.$$

Supongamos que sea $1^m,80$ la longitud de la circunferencia media, y $6^m,50$ la altura; se tendrá para el volúmen

$$\frac{6,5 \times (1,8)^2}{4\pi} = \frac{6,5 \times (0,9)^2}{\pi} = 1^{mc},676.$$

Fig. 418



769. La medida de la *capacidad de un tonel*, es un caso particular de medida de troncos de cono.

Considerando el tonel *(fig. 418)* como la suma de dos troncos de cono idénticos unidos por su base mayor, se tendrá la fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi H\,(R^2 + r^2 + Rr),$$

en la cual H es la altura total del doble tronco, r el radio del *fondo* AA', y R el radio de la base mayor BB'. Pero en esta fórmula se comete un error por defecto, porque se desprecia dos veces el volúmen que engendra por la rotacion el segmento AMB, comprendido entre la recta AB y el arco AMB. Reemplazando en el paréntesis Rr por R^2, se obtiene una fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi H\,(2R^2 + r^2),$$

que da, por el contrario, un resultado excesivo. La fórmula que mejor se adapta á la forma general de los toneles, es la siguiente: (*)

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left[2R^2 + r^2 - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)\right].$$

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tomo XLVIII, página 96.

Para $H = 0^m,756$, $R = 0^m,345$, $r = 0^m,305$, la primera fórmula da 250 litros, la segunda 261, y la tercera 254.

Indicaremos, finalmente, la fórmula

$$V = 0{,}625 . D^3,$$

que permite apreciar la capacidad de los toneles ordinarios de un modo rápido y suficientemente aproximado con solo medir la diagonal $BA' = D$ que va del agujero B al punto mas bajo A' de uno de los fondos. Calculando de antemano los valores de V que corresponden á diversos valores de D, y marcándolos en la varilla de hierro que se introduce en el tonel, se obtiene la capacidad de éste por una simple lectura.

Para comparar esta última fórmula con la precedente, basta observar que se tiene en el triángulo rectángulo BA'I

$$\overline{BA'}^2 = \overline{A'I}^2 + \overline{BI}^2, \text{ ó } D^2 = \frac{1}{4} H^2 + (R + r)^2.$$

La capacidad del tonel que consideramos en el ejemplo anterior, sería por esta fórmula de 257 litros.

§ III.—Primeras nociones sobre la esfera (*).

DEFINICIONES.

770. Llámase *superficie esférica* la engendrada por la rotacion de una semicircunferencia ABA' alrededor del diámetro AA' que la termina *(fig. 419)*.

En este movimiento todo punto de la semicircunferencia describe un círculo, cuyo centro está en el eje de rotacion AA' y cuyo plano le es perpendicular.

La *esfera* es el cuerpo limitado por una superficie esférica. Al hablar se confunden con frecuencia las palabras *esfera* y *superficie esférica*, como en Geometría plana se dice á veces *círculo* por *circunferencia de círculo*.

(*) NOTA 28.

771. Consideremos la esfera engendrada por la rotacion del semicírculo ABA′ alrededor del diámetro AA′, y un punto cualquiera del espacio. Cuando el semicírculo generador llegue á colocarse en la posicion ACA′, cuyo plano esté determinado por AA′ y el punto que se considera, puede suceder que el punto esté, como E, fuera del círculo ACA′, ó como I en el interior, ó, finalmente, como M, en la circunferencia misma.

Fig. 419.

En el primer caso, el punto E es *exterior* á la esfera, y su distancia al centro O del círculo ACA′ es mayor que el radio R de este círculo; en el segundo, el punto I es *interior* á la esfera, y la distancia OI es menor que R; finalmente, el punto M está en la superficie esférica en el tercer caso, y la distancia OM es igual á R.

La *superficie esférica* puede, pues, definirse tambien: el *lugar geométrico de los puntos equidistantes de uno fijo.*

Este punto fijo se llama *el centro* de la esfera. Llámase *radio* toda recta como OA ú OM trazada desde el centro á la superficie. *Todos los radios de una misma esfera son iguales.* Se llama *diámetro* toda recta, tal como MN, que pasa por el centro y está limitada en la superficie esférica. *Todos los diámetros de una misma esfera son iguales,* porque cada uno de ellos es la suma de dos radios.

Dos esferas del mismo radio son iguales.

772. La definicion dada en el núm. **111** para la tangente á las curvas planas, es aplicable á la del espacio. Es fácil ver segun esto, que *la tangente* MT *á una curva cualquiera* AMB *trazada en la superficie esférica es perpendicular en su extremo al radio* OM *trazado al punto de contacto.* En efecto *(fig. 420),* tomemos sobre la curva AMB un punto M′ y tracemos la secante MM′, y unamos el centro O con el punto medio I de la cuerda MM′. El triángulo MOM′ es isósceles, y la recta OI es perpendicular á MM′. Pero cuando la secante MM′S gira alrededor del punto M para convertirse en el límite en la tangente MT, el punto I medio de MM′ se confunde con M, al mismo tiempo que M′. El ángulo OMT, posicion lí-

Fig. 420.

mite del ángulo recto OIS, es, pues, tambien ángulo recto.

TEOREMA.

773. *Toda seccion plana de la esfera es un círculo.*

En efecto, puesto que los puntos de la seccion pertenecen á la superficie esférica, están situados á la misma distancia del centro de esta, y se sabe (**92, 524**) que el lugar de los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo es una circunferencia de círculo.

COROLARIOS.

774. Si el punto fijo O, que es aquí *(fig. 421)* el centro de la esfera, está situado en el plano secante, este punto es el centro mismo de la seccion ACB, cuyo radio no es otro que el de la esfera.

Fig. 421.

Si el punto fijo O es exterior al plano secante, el centro I de la seccion DEF es la proyeccion del centro O de la esfera sobre el plano secante (**524**). El radio IE = r de la seccion es el cateto de un triángulo rectángulo OIE, cuya hipotenusa OE es el radio R de la esfera, siendo el otro cateto OI la distancia d del centro de la esfera al plano secante. Este radio r resulta, pues, de la fórmula

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

Hay, pues, que considerar dos clases de secciones planas en la esfera: los *círculos máximos*, cuyos planos pasan por el centro de la esfera, y que son todos iguales entre sí, puesto que tienen por radio el de la esfera, y los *círculos menores*, cuyos planos no pasan por el centro de la esfera, y cuyos radios, menores que el de la esfera, decrecen á medida que sus planos se alejan del centro de la esfera.

Dos círculos menores equidistantes del centro de la esfera son iguales; y de dos círculos menores no equidistantes del centro de la esfera, el que ménos diste será el mayor.

Se ve tambien que se necesitan *tres puntos* de la superficie esférica para determinar un círculo menor (**11, 492**), mién-

tras que *dos puntos* bastan para determinar un círculo máximo, puesto que ya el centro es obligado; sin embargo, en este último caso los dos puntos dados no deben estar en línea recta con el centro, porque en tal caso el plano del círculo máximo podria ocupar una infinidad de posiciones (**492**), como sujeto tan solo á pasar por un diámetro.

775. *Todo círculo máximo divide á la superficie esférica y á la esfera en dos partes iguales.* Porque si despues de haber separado las dos partes se hacen coincidir sus bases, pero de tal modo que las convexidades de ambas partes queden en el mismo sentido, las dos superficies coincidirán; porque, si no, todos los puntos de la superficie esférica no estarian á la misma distancia del centro.

Fig. 422.

776. *Dos círculos máximos* APBP', ABC *(fig. 422), se cortan mutuamente en partes iguales,* porque el centro O de la esfera está á la vez en los planos de los dos círculos, y por tanto en su interseccion, que es por esta razon su diámetro.

777. *Una recta no puede cortar á la superficie esférica en más de dos puntos.* Porque esta recta no puede tener más de dos puntos comunes con la circunferencia de círculo máximo situada en el plano que determinan dicha recta y el centro de la esfera.

778. *La esfera es de revolucion alrededor de un diámetro cualquiera* AB. Porque la circunferencia ACB, situada en un plano cualquiera que pase por AB, tiene el mismo centro O y el mismo radio OA que la superficie esférica, y engendraria evidentemente esta misma superficie si girase alrededor de AB *(fig. 422).*

779. Llámanse *polos* de un círculo de la esfera las extremidades del diámetro de la esfera que es perpendicular al plano del círculo.

Dos círculos DFE, ACB *(fig. 423)*, cuyos planos son paralelos, tienen los mismos polos P y P'.

El centro I de un círculo cualquiera DE, sus polos P y P' y el centro O de la esfera, son puntos que están en una misma perpendicular al plano del círculo.

Todo círculo máximo PFCP' que pasa por los polos P y P' de otro menor DFE, tiene su plano perpendicular al de éste, puesto que pasa por la recta PP', que lo es.

Fig 423.

TEOREMA.

780. *Todos los puntos de la circunferencia de un círculo* DFE *de la esfera, están á igual distancia de uno cualquiera de sus polos* P *y* P'.

En efecto, siendo la recta PI (que une el punto P al centro I del círculo DFE) perpendicular al plano DFE, las rectas PD, PF, PE, ... son oblicuas, cuyos piés están equidistantes del pié I de la perpendicular, y, por consiguiente, iguales.

Se ve tambien que los arcos de círculo máximo PD, PF, PE, ... son iguales, como subtendidos por cuerdas iguales.

Y, finalmente, la propiedad subsiste en el caso en que el círculo DFE de que se trata sea máximo; pero los arcos PA, PC, PB, ... son iguales en tal caso á un cuadrante, porque los ángulos rectos POA, POC, POB tienen sus vértices en el centro de los círculos máximos PAP', PCP', PBP' ...

Escolios.

781. Cuando no hagamos advertencia alguna y hablemos del polo de un círculo menor DFE, entenderemos siempre que se trata del P, que es el más próximo á su plano. Llamaremos *distancia polar* de este círculo á la distancia rectilínea PD á que se halla del polo uno cualquiera de los puntos D de la circunferencia DFE, y á la longitud del arco de círculo máximo PD que va del polo á un punto cualquiera D de la circunferencia DFE le daremos el nombre de *radio esférico* de este círculo.

El radio esférico de un círculo máximo es igual al cuadrante

de la circunferencia de este círculo, y su distancia polar será la cuerda de este cuadrante; es decir, el lado del cuadrado inscrito en un círculo máximo.

782. El teorema precedente permite trazar circunferencias sobre una esfera sólida como se trazan sobre un plano. Se emplea para ello un *compás de piernas curvas*, á fin de que no estorbe la convexidad de la esfera. Se da al compás una abertura (distancia entre sus dos puntas) igual á la distancia polar que se quiera, y se coloca la punta fija en el punto asignado como polo, con lo cual la otra punta describe la circunferencia pedida.

Para describir una de círculo máximo, se necesita tener la distancia polar; es decir, la cuerda de un cuadrante de círculo máximo, lo cual exige el conocimiento del radio de la esfera.

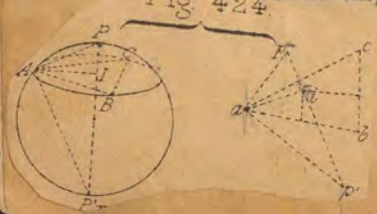
PROBLEMA.

783. *Hallar el radio de una esfera sólida (fig. 424).*

Desde un punto P de la superficie esférica como polo y con una abertura de compás arbitraria, descríbase una circunferencia ABC. Sáquense con el compás las tres distancias rectilíneas AB, BC, CA, y constrúyase en el papel un triángulo *abc* que tenga por lados estas tres longitudes. Determínese el centro *i* del círculo circunscrito al triángulo *abc*, y la recta *ai* es igual al radio AI del círculo ABC. Por consiguiente, si del punto *a* como centro, y con una abertura de compás igual á la que ha servido para trazar la circunferencia ABC sobre la superficie esférica, se describe un arco hasta el encuentro en *p* de la perpendicular *pip'* levantada en *i* sobre A*i* se forma un triángulo *api* igual á API, y no queda más que levantar la perpendicular *ap'* sobre *ap* para tener en *pp'* el diámetro PP' de la esfera.

Para obtener resultados precisos cuando no se tiene disponible más que una porcion de la esfera, será necesario: elegir el punto P en medio próximamente de la porcion de superficie de que se dispone; tomar una distancia polar PA tan grande

Fig. 424.



como sea posible, y, finalmente, escoger los puntos A, B, C sobre la circunferencia ABC, de tal modo que el triángulo ABC sea próximamente equilátero.

Escolio.

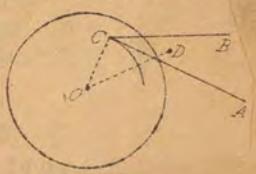
784. Se emplea á veces un instrumento especial que se llama *esferómetro*. Este instrumento hace conocer el radio $AI = r$ del círculo ABC y la flecha $PI = h$. La construccion gráfica en un plano será la misma; pero en vez de determinar el punto p por medio de un arco de círculo descrito desde a, se toma $Ip = h$. Entónces se prefiere el cálculo á la construccion gráfica. Siendo R el radio desconocido de la esfera, el triángulo rectángulo PAP' da

$$\overline{AI}^2 = IP.IP', \quad \text{ó} \quad r^2 = h\,(2R - h);$$

de donde se deduce

$$R = \frac{1}{2}\left(h + \frac{r^2}{h}\right).$$

Fig. 425.



TEOREMA.

785. *Todo plano* ACB *perpendicular á un radio* OC *en su extremo, es tangente á la superficie esférica;* y, recíprocamente, *todo plano* ACB *tangente á la superficie esférica es perpendicular en su extremo* C *al radio* OC *que va al punto de contacto* C *(fig. 245).*

Se dice que un plano ACB es *tangente* á la esfera cuando no tiene con la superficie de ésta más que un punto comun C, que se llama *punto de contacto.*

Pues bien, sea ACB un plano perpendicular en el extremo de un radio OC. Si D es un punto cualquiera de este plano diferente de C, OD es oblícua á éste y se tiene $OD > OC$; de suerte que el punto D es exterior á la esfera. No teniendo el plano ACB más que el punto C comun con la superficie esférica, es tangente á ésta.

Inversamente, si ABC es un plano tangente á la superficie esférica en el punto C, todo punto D diferente de C será

exterior y se tiene OD > OC; luégo siendo OC la más corta distancia del centro O al plano ACB, será perpendicular á este plano.

COROLARIOS.

786. *Por un punto tomado sobre la superficie esférica, se puede siempre trazar á ella un plano tangente, y sólo uno* (**516**).

787. El plano tangente á la superficie esférica en un punto C, contiene las tangentes en este punto á todas las curvas que pasando por él puedan trazarse sobre la superficie (**772**, **521**).

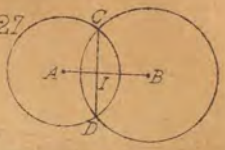
Fig. 426

788. Consideremos una esfera O y un punto exterior S *(fig. 426)*. Tracemos por la recta OS un plano cualquiera que determinará en la esfera un círculo máximo PAP', y tracemos por S una tangente SA á esta circunferencia. Miéntras que el semicírculo PAP', girando alrededor del eje SO, engendra la esfera, la tangente SA engendra un cono de revolucion que tiene comun con la superficie esférica la circunferencia AB descrita por el punto A. Además, en todo punto M de esta circunferencia el cono y la superficie tienen el mismo plano tangente, porque la generatriz SM y la tangente MT á la circunferencia AB que determinán el plano tangente al cono (**750**) están una y otra (**787**) en el plano tangente á la superficie esférica. Por esto se dice que *el cono está circunscrito á la esfera*, y la *esfera está inscrita en el cono* á lo largo de la circunferencia comun AB.

Se ve tambien *que por un punto exterior* S *se pueden trazar una infinidad de planos tangentes á una esfera* O, y que *todas las tangentes* SA, SM, SB, ... *á la esfera que parten del mismo punto* S *son iguales*.

Si el punto S se aleja indefinidamente sobre la recta PP', el cono degenera *en un cilindro circunscrito*, y el lugar de los puntos de contacto de la esfera y el cilindro de revolucion es el círculo máximo perpendicular á la direccion PP' de las generatrices del cilindro.

Fig. 427.



TEOREMA.

789. *La interseccion de dos superficies esféricas es una circunferencia de círculo cuyo plano es perpendicular á la línea de los centros de las dos esferas, y cuyo centro está en esta línea (fig. 427).*

Porque esta interseccion no es otra cosa que la circunferencia engendrada por la rotacion alrededor de AB del punto C, comun á las dos circunferencias de interseccion de las dos esferas con un plano cualquiera que pase por AB.

Escolio.

790. Cuando dos superficies esféricas no tienen más que un punto comun, se dice que son tangentes en este punto, que se llama *punto de contacto*. El punto de contacto está situado en la línea de los centros, y las esferas tienen en este punto el mismo plano tangente (**120**).

Cinco es el número de posiciones relativas de dos esferas (**122**), y las relaciones entre la distancia de centros y los radios son las mismas que para las circunferencias de círculo máximo, determinadas en las esferas por un plano cualquiera que contenga la línea de los centros.

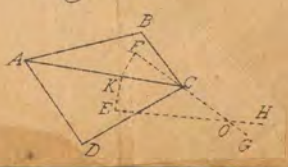
TEOREMA.

791. *Por cuatro puntos* A, B, C, D *no situados en un mismo plano, se puede hacer pasar una superficie esférica, y sólo una (fig. 428).*

Se trata de probar que existe un punto, y sólo uno, situado á igual distancia de los cuatro puntos A, B, C, D.

En efecto, todo punto equidistante de A, B, C, D debe hallarse en la perpendicular levantada al plano ABC por el centro F del círculo circunscrito al triángulo ABC, puesto que esa perpendicular es el lugar de los puntos equidistantes de A, B, C (**524**); debe tambien hallarse el punto pedido en la perpendicular EG levantada al plano ACD por el centro E

Fig. 428.



BIBLIOTECA DEL C.O.A.M.

del círculo circunscrito al triángulo ACD. Y puesto que dos rectas FH y EG no pueden tener más que un punto comun, se ve desde luego que no podria haber más que un punto equidistante de A, B, C, D. Y existe este punto si los cuatro A, B, C, D no están en un mismo plano, como se ha supuesto; en efecto, las dos rectas EG y FH están contenidas en el plano perpendicular á AC en su punto medio K, porque este plano es el lugar de todos los puntos equidistantes de A y C; pero este plano corta á los dos ABC y ADC, segun rectas distintas KF y KE, puesto que distintos son por hipótesis los planos ABC y ADC; luego las dos rectas EG y FH, situadas en un mismo plano EKF, y perpendiculares á dos rectas que se cortan KF y KE, habrán de cortarse tambien en un punto O, que es el centro de la esfera pedida.

COROLARIOS.

792. Dos superficies esféricas que tienen comunes cuatro puntos no situados en un mismo plano, se confunden en una misma.

793. Las perpendiculares levantadas á las cuatro caras de un tetraedro por los centros de los círculos circunscritos á ellas, concurren en un mismo punto.

§ IV.—Propiedades de los triángulos esféricos.

DEFINICIONES.

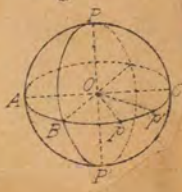
794. Llámase *ángulo de dos curvas* que pasan por un mismo punto el ángulo de sus tangentes en dicho punto. *El ángulo de dos curvas situadas en la superficie esférica es, pues, igual al ángulo de los planos determinados por el centro de la superficie y las tangentes á las curvas en su punto de interseccion;* porque siendo estas tangentes perpendiculares al radio que corresponde al punto de interseccion (**772**), su ángulo es

la medida del diedro que consideramos. Y, en particular, *el ángulo de dos arcos de círculo máximo es igual al ángulo de sus planos.*

TEOREMA.

795. *El ángulo* APB *de dos arcos de círculo máximo* PAP′, PBP′ *tiene por medida el arco del círculo máximo* AB *descrito desde su vértice* P *como polo y comprendido entre sus lados, ó tambien el arco de círculo máximo que une los polos de sus lados (fig. 429).*

Fig. 429.



En efecto:

1.° Siendo cuadrantes los arcos PA y PB, los ángulos POA y POB son rectos y el AOB es el ángulo plano que mide el diedro formado por los planos de los dos círculos máximos. Pero (**794**) este diedro es igual al ángulo APB de los dos arcos de círculo máximo, y el ángulo en el centro AOB tiene por medida el arco AB; luego ésta es tambien la medida del ángulo APB.

2.° Tomemos, á partir de los puntos A y B, *en el mismo sentido*, sobre la circunferencia ABC, dos arcos Ap y Bp_1 iguales á un cuadrante; el arco pp_1 es evidentemente igual á AB, y para justificar el segundo enunciado del teorema basta probar que p y p_1 son los polos de los círculos PAP′, PBP′. Y, en efecto, la recta Op es perpendicular á OA, puesto que el arco Ap es un cuadrante, y perpendicular tambien á OP por estar en el plano ABC; luégo lo es al plano del círculo máximo PAP′, y p es, por tanto, el polo de éste. Del mismo modo se ve que p_1 es el polo del círculo máximo PBP′.

Hemos dicho que se tomasen los cuadrantes Ap y Bp_1 en el mismo sentido, á partir de A y B; si se tomaran en sentidos contrarios, el arco pp_1 seria el suplemento del ángulo de los dos círculos máximos. Hay, pues, que tener en la aplicacion del segundo enunciado la precaucion de considerar para uno de los círculos máximos PAP′ el polo p, que está del mismo lado que el otro PBP′ y para éste el polo p_1, que no está hácia el mismo lado que el primer semicírculo PAP′.

COROLARIOS.

796. El lugar geométrico de los polos de los círculos máximos que forman un ángulo dado con otro máximo fijo, se compone de dos circunferencias, cuyos polos son los mismos de éste. El radio esférico de estas circunferencias es igual al arco de círculo máximo que mide el ángulo dado.

797. Para que dos círculos máximos se corten en ángulo recto, es necesario y suficiente que cada uno de ellos pase por los polos del otro.

798. Dos círculos máximos APC, BPD *(fig. 429)* forman, al cortarse en el punto P, cuatro ángulos APB, BPC, CPD. DPA; los adyacentes son suplementarios, y los opuestos por el vértice son iguales.

DEFINICIONES.

799. Llámase *polígono esférico* á la porcion de superficie esférica ABCDE comprendida entre varios arcos de círculo máximo. Estos arcos AB, BC, CD, DE, EA *(fig. 430)* son sus *lados;* los ángulos ABC, BCD,..., que forman, y los vértices B, C,... de estos ángulos, son los *ángulos* y los *vértices* del polígono.

Se dice que es *convexo* un polígono esférico cuando, prolongado uno cualquiera de los lados, deja todo el polígono en un solo hemisferio.

Cada uno de los lados de un polígono esférico convexo, es menor que una semicircunferencia de círculo máximo. Porque si el lado AB fuese, por ejemplo, mayor que una semicircunferencia, se podría tomar sobre AB entre A y B un punto I tal que AI fuese igual á una semicircunferencia, y entónces la circunferencia del círculo máximo, de que es una parte el lado AE, pasaria por el punto I (**776**) y no estaria todo el polígono en uno de los dos hemisferios que determina este círculo máximo AE.

Fig. 430.

El perímetro de un polígono esférico convexo no puede ser

cortado en más de dos puntos por un arco de círculo máximo (**73**).

800. El polígono esférico más sencillo es el *triángulo esférico*, que es la porcion de superficie esférica comprendida entre tres arcos de círculo máximo AB, BC, CA, *cada uno de los cuales es menor que media circunferencia*. Así, pues, un triángulo esférico es siempre convexo *(fig. 431)*.

Podrian admitirse lados mayores que media circunferencia y llamar tambien triángulo esférico á la figura formada por arcos, tales como AB, AC, BDC, siendo este último mayor que media circunferencia. Pero sería incómodo é inútil: incómodo porque estas nuevas figuras presentarian ángulos como A mayores que dos rectos; inútil, porque el conocimiento de los elementos del triángulo esférico propiamente dicho ABC da todos los de la figura formada por los arcos AB, AC, BDC.

Un triángulo esférico es *isóscelcs*, *equilátero* ó *rectángulo* en los mismos casos que un triángulo rectilíneo (**27**).

801. Uniendo los vértices de un triángulo esférico ABC *(fig. 432)* con el centro O de la esfera, se forma un ángulo triedro OABC, cuyas caras AOB, BOC, ... tienen las mismas medidas (**136**) que los lados correspondientes AB, BC, ... del triángulo esférico, y cuyos ángulos diedros OA, OB, ... tienen las mismas medidas (**794**) que los ángulos A, B, ... del triángulo. La misma observacion es aplicable á un polígono esférico ABCD *(fig. 433)* y al ángulo poliedro OABCD.

Segun esto, *á cada propiedad de los ángulos triedros ó poliedros corresponde una análoga de los triángulos ó polígonos esféricos;* y para enunciar ésta, basta sustituir respectivamente á las palabras *cara* y *ángulo diedro*, las palabras *lado* y *ángulo*.

Así se establecen las primeras propiedades de las figuras esféricas. Pero para propiedades ménos sencillas es generalmente preferible hacer lo inverso; es decir, establecer directamente las de las figuras esféricas, y deducir de éstas las propiedades de los ángulos poliedros correspondientes, porque

Fig. 431

Fig. 432.

se razona sobre una superficie, y particularmente sobre la esférica, casi tan fácilmente como sobre un plano, miéntras que se requiere un cierto esfuerzo para representarse una figura algo complicada en el espacio. El estudio de la Astronomía no deja duda en este punto, y la concepcion de la esfera celeste es uno de los más felices artificios geométricos que se han imaginado.

802. Si se prolongan las aristas del ángulo poliedro OABCD *(fig. 433)* hácia el otro lado del vértice O, se forma un ángulo poliedro simétrico OA'B'C'D' que determina en la superficie de la esfera un polígono A'B'C'D'. Los dos polígonos ABCD, A'B'C'D', cuyos vértices están diametralmente opuestos dos á dos, se llaman *polígonos esféricos simétricos*. Las consideraciones hechas en el núm. **566** conducen á las propiedades siguientes:

1.° *Dos polígonos simétricos tienen sus ángulos y lados iguales dos á dos;* 2.°, *estos polígonos no son en general superponibles, por estar dispuestas en órden inverso las partes respectivamente iguales;* 3.°, *para que un triángulo esférico sea superponible á su simétrico (fig. 432), es necesario y suficiente que tenga dos de sus ángulos iguales; y en tal caso los lados opuestos á ángulos iguales son tambien iguales;* en otros términos: el triángulo es *isósceles*.

TEOREMA.

803. *En todo polígono esférico, un lado cualquiera es menor que la suma de todos los demás.*

Sea ABCD el polígono propuesto *(fig. 433)*. En el ángulo poliedro correspondiente OABCD se tiene (**567**)

$$AOB < BOC + COD + DOA.$$

Luégo (**136**)

$$\text{arco } AB < \text{arco } BC + \text{arco } CD + \text{arco } DA.$$

Fig. 433.

ESCOLIOS.

804. *En todo triángulo esférico* ABC, *(fig. 434), á mayor ángulo se opone mayor lado.*

Esto resulta de la propiedad análoga del ángulo triedro (**568**). Pero se puede tambien demostrar como para el triángulo rectilíneo (**36**, 2.°). En efecto, sea ABC el ángulo mayor que C; se podrá trazar en el ángulo ABC un arco de círculo máximo BD que forme con BC un ángulo DBC igual á C; y habiendo dos ángulos DCB y DBC iguales en el triángulo BDC, se tendrá (**802**) BD = DC. Pero en el triángulo ABD (**803**)

Fig. 434.

$$AB < AD + BD,$$

y reemplazando el lado BD por su igual DC,

$$AB < AD + DC, \quad \text{ó} \quad AB < AC.$$

Enlazando este teorema con el demostrado en el núm. **802** (3.°) y razonando como en el núm. **37**, se ve que, recíprocamente, *si un triángulo esférico es isósceles, los ángulos opuestos á los lados iguales son tambien iguales; y si dos lados son desiguales, á mayor lado se opone mayor ángulo.*

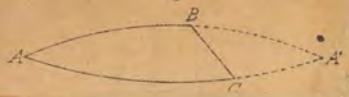
805. Siendo un triángulo esférico isósceles superponible á su simétrico, se ve, como en el núm. **38**, que, *en todo triángulo esférico isósceles, el arco de círculo máximo que une el vértice al punto medio de la base es perpendicular á esta base y divide al ángulo del vértice en dos partes iguales.*

806. Finalmente, las propiedades del triángulo rectilíneo demostradas en los números **31**, **32** y **33** son tambien del triángulo esférico, y se demuestran del mismo modo; basta reemplazar la palabra *recta* por *arco de círculo máximo.*

TEOREMA.

807. *En todo polígono esférico convexo, la suma de los lados es menor que una circunferencia.*

Fig. 435



Porque la suma de las caras del ángulo poliedro correspondiente es menor que cuatro ángulos rectos (**570**).

La demostracion directa es fácil. Consideremos primero un triángulo esférico ABC *(fig. 435)* y prolonguemos los lados AB y AC hasta su encuentro en A'; los dos arcos ABA' y ACA' son semicircunferencias de círculo máximo (**776**); y como en el triángulo BCA' el lado BC es menor que BA' + CA', la suma AB + AC + BC será menor que ABA' + ACA'; es decir, menor que una circunferencia de círculo máximo.

Procediendo de un modo análogo con un polígono, es decir, reemplazando un lado por las prolongaciones de los dos que le son adyacentes, se ve que si la proposicion es cierta para un polígono convexo, subsiste para el que tiene un lado más; luégo es general.

TEOREMA.

808. *Si un triángulo esférico* A'B'C' *es el polar de otro dado* ABC, *recíprocamente éste será el polar de* A'B'C'.

Para comprender bien la definicion de triángulo polar y el objeto del presente teorema, conviene hacer una observacion.

Sea EIF un arco de círculo máximo *(fig. 436)*, P uno de sus polos y M un punto cualquiera de la superficie esférica. Si P y M están á un mismo lado del círculo máximo EF, el (menor) arco de círculo máximo que va de P á M es menor que un cuadrante; y si P y M se hallan á uno y otro lado de EF, el (menor) arco de círculo máximo que va de P á M es mayor que un cuadrante.

Pues bien, se llama *triángulo polar* de uno dado ABC á otro A'B'C' *(fig. 437)* cuyos vértices son: A', el de los dos polos del círculo máximo BC, que está hácia el mismo lado de éste que el vértice A; B' es análogamente el polo de AC, que queda con respecto á éste del mismo lado que B; y C' el polo de AB, que está del mismo lado que C.

Pues bien, se trata de demostrar que, recíprocamente, el triángulo ABC es el polar de A'B'C'. Y, en efecto, si se atiende á uno cualquiera C de sus vértices, se ve que el arco de

Fig. 436

Fig. 437.

círculo máximo que uniera C con A' sería un cuadrante, por ser A' polo de BC, y el arco de círculo máximo B'C sería tambien cuadrante, por ser B' polo de CA; luégo el punto C (**780**) es polo de A'B'. Además, siendo C' el polo de AB, que queda del mismo lado que C con respecto á AB, el (menor) arco de círculo máximo que va de C á C' es menor que un cuadrante, y, por consiguiente, es C el polo de A'B' que convenia.

Escolio.

809. Segun esto, el triángulo polar A'B'C' de uno dado ABC puede obtenerse describiendo desde los vértices A, B, C como polos tres circunferencias del círculo máximo. Estas tres circunferencias dividen á la superficie esférica *(fig. 437)* en ocho triángulos, uno de los cuales es el polar de ABC; y basta para precisarlo notar que A y A' deberán estar á un mismo lado de BC, B y B' á un mismo lado de AC, y C y C' á un mismo lado de AB.

Los dos triedros OABC, OA'B'C' que corresponden á dos triángulos polares ABC, A'B'C' son suplementarios (**572**). En efecto, por la determinacion del punto C', por ejemplo, se ve que la arista OC' es perpendicular (**779**) al plano AOB y está situada del mismo lado que OC con respecto á este plano, y análogamente las otras dos aristas OB' y OA'. Cada ángulo de uno de los triángulos ABC, A'B'C' debe, pues (**573**), ser suplemento del lado opuesto del otro triángulo. Pero esta propiedad, por la cual dos triángulos polares se llaman tambien *triángulos suplementarios*, merece ser demostrada directamente como sigue:

TEOREMA.

810. *Si* ABC, A'B'C' *son dos triángulos polares, cada ángulo del uno tiene por medida una semicircunferencia de círculo máximo disminuida en el lado opuesto del otro triángulo (figura 438).*

Consideremos, en efecto, el ángulo A, por ejemplo, y prolonguemos los lados AB y AC (si es necesario) hasta su en-

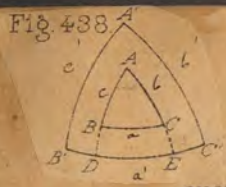


Fig. 438

cuentro con el lado B'C'; puesto que el punto A es el polo de B'C', el ángulo A tiene por medida el arco DE (**795**); pero se tiene evidentemente

$$DE = B'E + DC' - B'C'.$$

Por otra parte, B'E y DC' son cuadrantes, puesto que B' es el polo de AC y C' es el polo de AB; luego

$$DE = \frac{1}{2} \text{ circ.}^{a} \text{ de circ.}^{o} \text{ máximo} - B'C'.$$

Del mismo modo se procederia con los ángulos B y C.

Los triángulos ABC y A'B'C' resultan uno de otro por la misma construccion (**808**), y, por consiguiente, la propiedad que acabamos de demostrar para los ángulos A, B, C del primer triángulo es aplicable á los ángulos A', B', C' del segundo. Se podría tambien demostrar directamente que el ángulo A', por ejemplo, tiene por medida el suplemento de BC, prolongando BC hasta el encuentro de A'B' y de A'C'.

Fig. 439.

Escolio.

811. Las propiedades de los triángulos polares, son aplicables á polígonos y curvas esféricas. Sea un polígono esférico convexo ABCDE *(fig. 439)*; tomemos de los dos polos del arco de círculo máximo EA el A', que está en el mismo hemisferio que el polígono ABCDE con respecto á EA; de un modo análogo tomemos los polos B', C', D', E' de los lados AB, BC, CD, DE. El polígono A'B'C'D'E' será el polígono *polar* del propuesto, y se demostrará, como en los números **808** y **810**: 1.°, que *si un polígono esférico* A'B'C'D'E' *es el polar de otro dado* ABCDE, *recíprocamente* ABCDE *es el polar de* A'B'C'D'E'; 2.°, que *en dos polígonos polares, todo ángulo del uno es el suplemento del lado del otro que tiene por polo el vértice del ángulo que se considera.*

812. Se dice que *un arco de círculo máximo es tangente en un punto* M *á una curva esférica* AMN *(fig. 440)* cuando es el límite de las posiciones que toma el círculo máximo trazado por el punto M y otro N de la curva, si este segundo tiende hácia el primero. Una curva esférica es *convexa* si el círculo máximo tangente en uno de sus puntos deja toda la curva en un mismo hemisferio (**799**). Una curva esférica convexa no puede ser cortada por un arco de círculo máximo en más de dos puntos, y el *menor* arco de círculo máximo que une dos puntos de

Fig. 440

la curva (menor siempre que una semicircunferencia) está en el *interior* de la curva.

Pues bien, sea A'M' *(fig. 440)* una curva esférica convexa; tracemos el círculo máximo tangente en uno cualquiera M' de sus puntos, y tomemos el polo M de este círculo que esté en el mismo hemisferio que la curva A'M': el lugar de los puntos M es la *curva polar* de A'M'. Inversamente, A'M' es la curva polar de AM; ó en otros términos: el punto M' es el polo del arco de círculo máximo tangente en M á la curva AM; porque si N es el polo del arco de círculo máximo N'T' tangente á la curva A'M' en un punto N' próximo á M', el punto T' será el polo (**780**) del arco secante MN; y cuando éste se haga tangente en M, el punto T' se confundirá con M'. Así, los puntos M y M' de las dos curvas se corresponden dos á dos, de tal suerte que M es el polo del arco de círculo máximo tangente en M', y M' es el polo del arco de círculo máximo tangente en M.

Dos figuras esféricas polares son correlativas: á todo punto de la una corresponde un arco de círculo máximo en la otra, de tal modo que si tres puntos de la primera estuvieran en un mismo arco de círculo máximo, los tres arcos de círculo máximo correspondientes en la segunda pasarian por un mismo punto, que sería el polo de aquél. Todo teorema da orígen inmediatamente á otro. Esta correlacion de las figuras esféricas fué la que sugirió la idea del principio general de *dualidad*.

COROLARIOS.

813. *En todo triángulo esférico:* **1.°**, *la suma de los ángulos es mayor que dos rectos y menor que seis;* **2.°**, *el menor ángulo aumentado en dos rectos, excede á la suma de los otros dos.*

La demostracion es la misma que para los ángulos triedros (**575**), y las propiedades enunciadas pueden considerarse como una consecuencia de las correspondientes en los triedros.

De ellas resulta que un triángulo esférico puede tener uno, dos ó tres ángulos rectos. Cuando el triángulo es *birectángulo*, el vértice del ángulo no recto es polo del lado opuesto, y los lados que comprenden ese ángulo son cuadrantes. En el triángulo esférico *trirectángulo* todos los lados son cuadrantes. Este triángulo esférico es la *octava* parte de la superficie esférica á que pertenece, lo cual se ve inmediatamente prolongando los arcos de círculo máximo que forman los lados del triángulo.

TEOREMA.

814. *Dos triángulos esféricos pertenecientes á una misma superficie esférica ó á dos iguales, tienen todos sus elementos iguales cuando se sabe que son respectivamente iguales:*

1.° *Un lado y los dos ángulos adyacentes;*

2.° *Un ángulo y los dos lados que lo comprenden;*

3.° *Los tres lados;*

4.° *Los tres ángulos.*

En todos los casos son los triángulos iguales ó simétricos, segun que la disposicion de los elementos es la misma ó inversa.

Este teorema es una consecuencia de las propiedades análogas (**577, 578**) de ángulos triedros. Tambien se puede demostrar directamente.

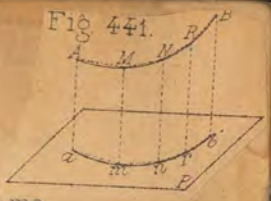
En efecto, suponiendo que la disposicion de los elementos sea la misma en los dos triángulos, se demostrará la igualdad de éstos razonando para los tres primeros casos como en el número **34** de la Geometría plana. El cuarto caso resulta del tercero por la consideracion del triángulo polar (**810**). Nótese tambien que los dos primeros casos son correlativos uno de otro.

Si la disposicion de los elementos dados es inversa, el primer triángulo y el simétrico del segundo tendrán sus elementos igualmente dispuestos; serán, pues, iguales en virtud de los datos, y, por consiguiente, los triángulos propuestos serán simétricos.

815. Un triedro cuyo vértice esté en el centro comun de dos esferas concéntricas determina evidentemente sobre ellas dos triángulos esféricos, cuyos ángulos son respectivamente iguales y sus lados proporcionales (**296**). Estos triángulos se llaman *semejantes*.

TEOREMA.

816. *El camino más corto de un punto á otro sobre la super-*



ficie de una esfera, es el arco de círculo máximo (menor que media circunferencia) *que los une.*

1.° Ante todo, es necesario definir *la longitud de un arco de curva alabeada;* es decir, cuyos puntos no están situados en un mismo plano. Esta longitud se define como la de un arco de curva plana: *es el límite del perímetro de una línea quebrada inscrita en este arco, y cuyos lados tienden hácia cero.* Vamos á probar que este límite existe y que es único; es decir, independiente de la ley, segun la cual tienden hácia cero los lados de la línea quebrada.

Sean *(fig. 441)* AB un arco de curva alabeada, ab su proyeccion ortogonal sobre un plano cualquiera P, M un punto cualquiera de AB y m la proyeccion de este punto. Tracemos en un plano arbitrario una recta $x_1 y_1$ *(fig. 442)* y tomemos sobre ella, á partir de un punto cualquiera a_1, una longitud $a_1 m_1$ igual á la longitud del arco am; despues, en el punto m_1, levantemos una perpendicular á $x_1 y_1$, y tomemos sobre ella una longitud $m_1 M_1$ igual á la proyectante mM. De esta suerte, á cada punto M de la curva AB corresponderá uno M_1, y cuando el punto M describa el arco AB, el punto M_1 describirá un arco de curva plana $A_1 B_1$, cuya longitud designaremos por l.

Pues bien, si AMNRB es una línea quebrada cualquiera inscrita en el arco AB, y $amnrb$, $A_1 M_1 N_1 R_1 B_1$ son las líneas quebradas correspondientes en la proyeccion ab y en la línea plana $A_1 B_1$, el valor de la relacion

$$(1) \qquad \frac{AM + MN + NR + RB}{A_1M_1 + M_1N_1 + N_1R_1 + R_1B_1}$$

está comprendido entre los valores de la mayor y la menor de las relaciones

$$(2) \qquad \frac{AM}{A_1M_1}, \quad \frac{MN}{M_1N_1}, \quad \frac{NR}{N_1R_1}, \quad \frac{RB}{R_1B_1}.$$

Por consiguiente, si se puede probar que cada una de estas relaciones tiene por límite la unidad, lo mismo sucederá á la relacion (1); y como el denominador de esta relacion tiene por límite la cantidad bien definida l, cualquiera que sea la ley segun la cual tiendan hácia cero los lados de la línea quebrada AMNRB **(289, 290),** se deduce que el numerador tiene tambien l por límite, cualquiera que sea la ley.

Tomemos, pues, una cualquiera de las relaciones (2), $\frac{MN}{M_1N_1}$ por ejemplo. Designemos por δ la diferencia $Nn - Mm$ ó su igual $N_1n_1 - M_1m_1$. El cuadrado de la relacion que se considera tendrá por expresion.

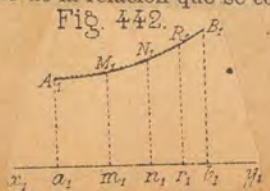
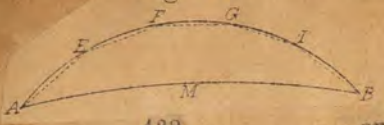


Fig. 443.



$$\frac{\overline{mn}^2 + \delta^2}{\overline{m_1 n_1}^2 + \delta^2}.$$

El valor de este cuadrado está, pues, comprendido entre

$$\frac{\overline{mn}^2}{\overline{m_1 n_1}^2} \quad \text{y} \quad \frac{\delta^2}{\delta^2} = 1.$$

Pero $m_1 n_1$ es igual al arco de curva plana cuya cuerda es mn, y, por tanto, la relacion $\frac{mn}{m_1 n_1}$ tiene por límite la unidad (**291**) cuando mn tiende hácia cero.

El límite de $\frac{MN}{M_1 N_1}$ es, pues, igual á 1.

2.° *La longitud de un arco de curva esférica es igual al límite del perímetro de una línea quebrada esférica inscrita en este arco, y cuyos lados tienden hácia cero.*

Sean, en efecto, AGB *(fig. 443)* un arco de curva cualquiera trazado sobre la superficie esférica, y AEFGIB una línea quebrada esférica inscrita en este arco; es decir, una línea que, teniendo sus extremos en A y B, y sus vértices intermedios situados en el arco de curva AGB, esté formada de arcos de círculo máximo.

La línea quebrada esférica es la suma de los arcos de círculo máximo; si éstos tienden separadamente hácia cero segun una ley cualquiera, la relacion de cada uno de estos arcos á su cuerda tendrá por límite la unidad. Lo mismo sucederá á la relacion de longitud de la línea quebrada á la suma de las cuerdas, y como (1.°) la suma de éstas tiene por límite la longitud del arco de curva AGB, se ve que la longitud de la línea quebrada esférica inscrita en el arco de curva cualquiera AGB tiene por límite la longitud de este arco.

3.° Ahora es muy fácil hallar el camino más corto entre dos puntos A y B sobre la superficie esférica *(fig. 443)*.

Sean AMB el arco de círculo máximo (menor que media circunferencia) que une los puntos A y B, y AGB una curva esférica cualquiera entre estos dos puntos. Siendo AEFGIB una porcion de polígono esférico inscrita en esta curva, se tendrá (**803**)

$$\text{AMB} < \text{AE} + \text{EF} + \text{FG} + \text{GI} + \text{IB}.$$

Pero si se hacen tender hácia cero los lados del polígono inscrito, el segundo miembro tiene por límite (2.°) la longitud de la curva AGB. Luégo el arco de círculo máximo AMB es

menor que cualquiera otra curva esférica de A á B; es, pues, el camino más corto del punto A al punto B sobre la superficie esférica.

TEOREMA.

817. *Si desde un punto* O *de la superficie esférica (fig. 444) caen sobre un arco de círculo máximo* AB *otro* OI *perpendicular y menor que un cuadrante, y varios oblicuos* OC, OD, OE, ..., *se verifica:*

1.º *El arco perpendicular* OI *es menor que cualquier oblicuo* OC.

2.º *Dos oblicuos* OC *y* OE, *cuyos piés* C *y* E *equidistan del pié* I *del arco perpendicular, son iguales.*

3.º *De dos arcos oblicuos* OC *y* OD, *ú* OE *y* OD, *aquel cuyo pié dista más del pié del arco perpendicular es el mayor.*

Observemos ante todo que desde el punto O se puede siempre bajar un círculo máximo, y sólo uno, que sea perpendicular á AB, y es el que pasa por el punto O y el polo P del círculo máximo AB (**797**). Por consiguiente, desde el punto O se pueden trazar en el hemisferio OAB dos arcos de círculo máximo perpendiculáres á AB: uno OI menor que un cuadrante, y otro OPI′ mayor que un cuadrante. En el teorema enunciado se considera el arco OI.

La demostracion de este teorema es idéntica á la del núm. **41** de la *Geometría plana,* y hasta hemos empleado las mismas letras á fin de que el texto citado pueda servir; nótese tan sólo que los triángulos que aquí intervienen son simétricos en vez de ser iguales.

COROLARIOS.

818. *El arco de círculo máximo* OI *(menor que un cuadrante) perpendicular á una circunferencia de círculo máximo* AB *desde un punto* O, *es la línea más corta de las que pueden trazarse sobre la superficie del punto* O *á esta circunferencia* AB (**816, 817**); daremos por esto al arco OI el nombre de *distancia esférica* del punto O á la circunferencia AB.

El arco OPI′ es el mayor de todos los de círculo máximo que bajan del punto O sobre la circunferencia AB en el hemisferio OAB.

Las recíprocas de las proposiciones anteriores son ciertas (**40**).

El lugar geométrico de los puntos de la superficie esférica equidistantes de dos dados en ella, es la circunferencia de círculo máximo perpendicular en el punto medio al arco de círculo máximo que los une (**48**).

Dos triángulos esféricos rectángulos son iguales ó simétricos cuando tienen respectivamente iguales:

1.º *La hipotenusa y un ángulo oblicuo;*

2.º *La hipotenusa y un cateto* (**50**).

El arco de círculo máximo bisector del ángulo de dos arcos de círculo

Fig. 445.

máximo, es el lugar de los puntos de la superficie esférica equidistantes de los dos lados del ángulo (**53**).

819. Hé aquí dos observaciones importantes:

1.ª *En todo triángulo esférico rectángulo, el número de los lados mayores que un cuadrante es par.* Sean, en efecto, APB, AIB, PIP' *(figura 445)* tres círculos máximos perpendiculares entre sí dos á dos. Tomemos sobre AP un arco AC menor que un cuadrante, y unamos el punto C á uno cualquiera D de AIB por un arco de círculo máximo CD. En el triángulo rectángulo CAD el lado AC es agudo, y se ve que, miéntras AD sea tambien agudo, es decir, menor que el cuadrante AI, CD es menor que CI; es decir, que un cuadrante. Si AD es obtuso como AD_1, el arco CD_1 es mayor que CI; es decir, que un cuadrante. El triángulo ACD tiene, pues, sus tres lados agudos, ó uno agudo y dos obtusos. Igualmente se probaria que el triángulo rectángulo CDB, cuyo lado BPC es obtuso, tiene siempre dos lados obtusos y uno agudo, porque, siendo obtuso BD, CD es agudo; y siendo agudo BD_1, CD_1 es obtuso.

2.ª *En todo triángulo esférico rectángulo, un ángulo oblicuo es de la misma especie que el lado opuesto.* En efecto, siendo el ángulo ACI recto, el ACD es agudo y el ACD_1 es obtuso; luégo AD es agudo y AD_1 obtuso.

TEOREMA.

820. *El arco de círculo máximo* MT *tangente á una circunferencia de círculo menor, es perpendicular al radio esférico* PM, *que corresponde al punto de contacto (fig. 446).*

En efecto, tracemos por el punto M un arco de círculo máximo MM'S que corte en otro M' á la circunferencia dada de círculo menor, y unamos el polo de éste con el punto medio I de MM' por un arco de círculo máximo. Siendo el punto M el límite de las posiciones de I cuando el M' se acerca indefinidamente á M, el ángulo PMT será el límite del ángulo PIS; pero este último es siempre recto, puesto que el triángulo PMM' es isósceles (**805**); luégo el ángulo PMT es recto.

Escolio.

821. *Cuando dos circunferencias menores de una superficie esférica se cortan, el arco de círculo máximo que une sus polos es perpendicular en el punto medio al arco de círculo máximo que une los dos de interseccion.*

Cuando dos circunferencias menores de una superficie esférica son tangentes, su punto de contacto está situado en la circunferencia de círculo máximo que pasa por sus polos, y el arco de círculo máximo que por el punto de contacto se trace perpendicular al que une los polos será tangente á las dos circunferencias menores.

Fig. 446.

Designando por R y r los radios esféricos de dos círculos menores, y por D el arco de círculo máximo (menor que media circunferencia) que une sus polos:

Si dos circunferencias son exteriores, se tiene

$$D > R + r.$$

Si son tangentes exteriormente,

$$D = R + r.$$

Si son secantes,

$$R + r > D > R - r.$$

Si son tangentes interiormente,

$$D = R - r.$$

Si uno es interior al otro,

$$D < R - r.$$

Los razonamientos son idénticos á los de la *Geometría plana* (**119, 120, 121, 122, 123**).

Las cantidades D, R y r deben satisfacer aquí en todos los casos á una condicion general, cualquiera que sea la posicion relativa de los dos círculos, y es la siguiente:

$$D + R + r < 4,$$

tomando por unidad de longitud el cuadrante de una circunferencia de círculo máximo. En efecto, D es siempre menor que 2, y R y r son siempre menores que 1. Así, *la suma de la distancia esférica de los dos polos con los radios esféricos de los dos círculos menores es menor que una circunferencia de círculo máximo.*

TEOREMA.

822. *El lugar geométrico de los vértices* C *de los triángulos esféricos que tengan una base comun* DE, *y en los cuales la diferencia entre el ángulo* C *y la suma* D + E *de los ángulos en la base sea constante, es un arco de círculo menor que pasa por los puntos* D *y* E *(fig. 447).*

En efecto, siendo DEC uno de los triángulos que satisfacen á la cuestion, y P el polo del círculo menor circunscrito al triángulo, los tres PDC, PCE, PED son isósceles; por consiguiente, la diferencia (D + E) — C es igual á la suma de los ángulos PDE y PED; es decir, al doble de uno de ellos. Estos últimos, son pues, constantes, y resulta de esto que el triángulo PDE es fijo, y tambien, por tanto, el punto P; y siendo la distancia PC = PD constante, el vértice C está siempre sobre la circunferencia descrita desde el punto P como polo con un radio esférico igual á PD.

Fig. 447.

Este teorema es análogo al de la *Geometría plana,* núm. **143**, porque cuando en un triángulo rectilíneo se da un ángulo C, queda conocida la suma D + E, y, por tanto, la diferencia (D + E — C), que es así constante.

PROBLEMA.

823. *Trazar sobre la superficie esférica un círculo máximo que pase por dos puntos dados* A *y* B *(fig. 448).*

Fig. 448.

La incógnita del problema es el polo P del círculo pedido, y notando que su distancia á cada uno de los puntos A y B es igual á la cuerda del cuadrante (**780**), se obtendrá describiendo dos arcos de círculo desde los puntos A y B como polos con una distancia polar igual á la cuerda del cuadrante.

PROBLEMA.

824. *Trazar por un punto dado* A *sobre la superficie esférica un arco de círculo máximo perpendicular á otro dado* B P *(fig. 449).*

Fig. 449.

La incógnita es el polo del arco pedido. Pero este polo debe estar en la circunferencia BP (**797**) y á una distancia de A igual á la cuerda del cuadrante; luego describiendo desde el punto A como polo, y con una distancia polar igual á la cuerda del cuadrante, un arco de círculo, su punto de interseccion con el arco BP será el punto P que se necesita.

PROBLEMA.

825. *Trazar un arco de círculo máximo perpendicular á otro dado* A B *en su punto medio;* ó en otros términos: *dividir un arco de círculo máximo* A B *en dos partes iguales por medio de otro perpendicular (fig. 450).*

Fig. 450.

Basta describir desde los puntos A y B como polos, y con la misma abertura de compás, dos arcos que se corten en C y D, y hacer pasar despues por estos dos puntos un arco de círculo máximo.

Nótese que esta circunferencia de círculo máximo CD divide tambien en dos partes iguales á todos los arcos de círculo menor cuyos extremos sean A y B.

PROBLEMA.

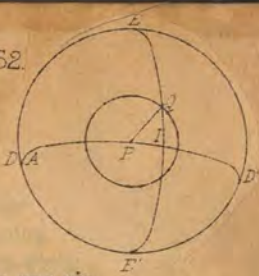
826. *Hallar el polo del círculo menor que pasa por tres puntos dados* A, B, C *sobre la superficie de una esfera (fig. 451).*

Fig. 451.

Estando equidistante el polo P de A, B, C, se hallará en la interseccion de los arcos de círculo máximo levantados perpendicularmente á los arcos de círculo máximo A B y A C en sus puntos medios (**825**).

Conocido el polo, se trazará la circunferencia de círculo menor con una abertura de compás igual á P A.

Fig. 452.



PROBLEMA.

827. *Por un punto* A *dado en la superficie esférica, trazar una circunferencia de círculo máximo que forme un ángulo dado con otra circunferencia de círculo máximo* DED' *(fig. 452).*

Sea P el polo del círculo máximo dado que está en el mismo hemisferio que A, y sea α el arco de círculo máximo que mide el ángulo dado; este ángulo puede suponerse siempre agudo.

El polo Q del círculo desconocido debe estar en la circunferencia de círculo máximo EE', cuyo polo es A, puesto que el arco pedido ha de pasar por A. El polo Q debe estar tambien en la circunferencia de círculo menor descrita desde P como polo y con un radio esférico igual á α, puesto que esta circunferencia de círculo menor es el lugar de los polos de los círculos máximos que corta· al círculo máximo DED' con la inclinacion dada (**796**).

Se describirán, pues, dos circunferencias, una desde el punto A como polo con una abertura de compás igual á la cuerda del cuadrante, y la otra desde el punto P como polo con una abertura de compás igual á la cuerda del arco α. El punto comun Q á estas dos circunferencias, será el polo de un círculo máximo que satisface al problema.

Para que el problema sea posible, es decir, para que las circunferencias auxiliares se corten, es necesario y suficiente (puesto que el ángulo dado es agudo) que se tenga

$$PQ > PI \quad \text{ó} \quad \alpha > \delta,$$

designando por δ la distancia esférica AD desde el punto dado A al círculo máximo DED'.

Cuando el punto A está sobre la circunferencia dada DED', la circunferencia máxima EE' pasa por P, y basta para tener el punto Q llevar una abertura de compás igual á la cuerda del arco α sobre la circunferencia máxima EPE', á partir del punto P.

PROBLEMA.

828. *Construir un triángulo esférico rectángulo conociendo: 1.°, un cateto y la hipotenusa; 2.°, un ángulo y el cateto opuesto.*

1.° Despues de haber trazado dos circunferencias de círculo máximo DAD', EAE' *(fig. 453)* perpendiculares entre sí, es decir, tales que el polo del uno esté en el otro, se llevará sobre uno de ellos DD', y á partir del punto de interseccion A, un arco AC igual al lado dado *b;* y despues, desde el punto C como polo y con un radio esférico igual á la hipotenusa dada *a*, se describirá un arco de círculo BB', que cortará al máximo EE' en dos puntos simétricos con respecto á DCD'; trazando.

Fig. 453.

Fig. 454.

finalmente, los arcos de círculo máximo CB y CB', se tendrán dos triángulos esféricos, que resuelven el problema propuesto.

Para que el problema sea posible, es necesario y suficiente que el número a que mide la hipotenusa esté comprendido entre los números b y $(2 - b)$, que miden las distancias esféricas mínima y máxima del punto C á la circunferencia de círculo máximo EE'.

2.° Se empezará por trazar dos circunferencias de círculo máximo BAB' y BCB' *(fig. 454)* que formen entre sí el ángulo dado B. Sea P el polo del primero y EPE' el círculo máximo perpendicular á los dos; el problema queda reducido á trazar un círculo máximo perpendicular á BAB'; es decir, que pase por P, y tal que la parte CA, interceptada en el huso BEB'D, sea igual al cateto dado b. Pero PC habrá de ser igual á $(1 - b)$, por lo cual bastará describir desde el punto P, y con un radio esférico igual á $(1 - b)$, un arco de círculo que cortará á BDB' en dos puntos; siendo C uno de ellos, el triángulo BCA resolverá el problema lo mismo que el triángulo B'CA.

La condicion de posibilidad es que

$$PC > PD, \quad \text{ó bien} \quad 1 - b > 1 - B;$$

es decir,

$$b < B.$$

Hemos supuesto que el ángulo B fuera agudo; si fuera obtuso, se obtendria

$$PC = b - 1, \quad PD = B - 1,$$

y la condicion de la posibilidad sería

$$b > B.$$

PROBLEMA.

829. *Construir un triángulo esférico conociendo tres cualesquiera de sus seis elementos* (ángulos ó lados).

Este problema ofrece seis casos distintos. Pueden darse: 1.°, los tres lados ó los tres ángulos; 2.°, dos lados y el ángulo comprendido, ó un lado y los dos ángulos adyacentes; 3.°, dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, ó dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos.

En esta enumeracion hemos reunido dos á dos los casos correlativos; es decir, que se reducen uno á otro por la consideracion del triángulo polar. No hay, pues, que considerar directamente más que tres casos:

1.° *Se dan los tres lados* a, b, c.

Supongamos, para fijar las ideas, $a > b > c$. Tracemos un círculo máximo en la superficie esférica y tomemos sobre él un arco $BC = a$. Desde el punto B como polo, y con una abertura de compás igual á la

cuerda de c, tracemos un arco de círculo; y desde el punto C como polo, con la abertura de la cuerda b describamos otro. Siendo A uno de sus puntos de interseccion, el triángulo ABC será el pedido.

Los dos arcos se cortan generalmente en dos puntos A y A′, situados á uno y otro lado del arco de círculo máximo BC; de aquí dos soluciones: el triángulo ABC y el A′BC simétrico del primero.

Para que el problema sea posible, es necesario y suficiente que los dos círculos se corten; es decir, que se tenga, suponiendo a, b, c expresados en grados,

$$a < b + c,\ a > b - c,\ a + b + c < 360^\circ.$$

La segunda está cumplida, puesto que hemos supuesto $a > b > c$; las condiciones se reducen, pues, á dos:

$$a < b + c,\ \text{y}\ a + b + c < 360^\circ.$$

Luégo *para que se pueda construir un triángulo esférico con tres lados dados, es necesario y suficiente que el mayor sea menor que la suma de los otros dos, y que la suma de los tres sea menor que una circunferencia de círculo máximo.* Sabíamos ya que estas condiciones eran necesarias **(803, 807)**.

Para que se pueda construir un triángulo esférico con tres ángulos dados A, B, C, es necesario y suficiente que su polar, cuyos lados son $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$, sea posible. Segun el párrafo anterior suponiendo, para fijar las ideas $A < B < C$, y, por tanto,

$$180^\circ - A > 180^\circ - B > 180^\circ - C,$$

será necesario y suficiente que

$$180^\circ - A < 180^\circ - B + 180^\circ - C,$$

y

$$180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - C < 360^\circ,$$

ó bien

$$A + 180^\circ > B + C,\ \text{y}\ A + B + C > 180^\circ.$$

Sabíamos ya (**813**) que estas condiciones eran necesarias.

2.° *Se dan dos lados* a *y* b *y el ángulo comprendido* C.

La misma solucion que en *Geometría plana* (**156**).

3.° *Se dan dos lados* a *y* b *y el ángulo* A *opuesto á uno de ellos* a *(figura 455).*

Construyamos sobre la superficie esférica dos círculos máximos que formen un ángulo igual á A (**827**). Tomemos, á partir del vértice, sobre uno de ellos un arco $AC = b$, y desde el punto C como polo, y con una abertura igual á la cuerda de a, describamos un arco de círculo; siendo B el punto de interseccion de este círculo con el segundo lado del ángulo, el triángulo ABC será el pedido.

La discusion de este problema requiere alguna atencion.

«Completemos el huso A, y desde el punto C bajemos el arco CD perpendicular sobre el otro lado del ángulo. En el triángulo esférico rectángulo ACD, el arco perpendicular CD será agudo ú obtuso, segun que el ángulo dado A sea agudo ú obtuso (**819**, 2.°). Si el arco CD es agudo, será el menor de todos los arcos que se podrian bajar desde el punto C á los diversos puntos del arco ABA', y los arcos oblicuos aumentarán al alejarse del pié del arco perpendicular; si el arco CD es obtuso, será por el contrario, el mayor de los trazados desde el punto C, y los arcos oblicuos disminuirán al alejarse del pié de la perpendicular (**817, 818**).

»Pues bien, *para que el triángulo propuesto sea posible será preciso que el lado opuesto* a *sea por lo menos igual al arco perpendicular si el ángulo dado* A *es agudo, ó á lo más igual al arco si el ángulo dado es obtuso*. Esta primera condicion de posibilidad está evidentemente satisfecha cuando el ángulo dado A y el lado opuesto *a*, tambien dado, son de distinta naturaleza.

»Digo ahora que:

»*Siendo* A *y* a *de naturaleza diferente, el problema, si es posible no tiene más que una solucion.*

»*Y que siendo* A *y* a *de la misma naturaleza, el problema, si es posible, tiene una ó dos soluciones.*

»En efecto, sean por ejemplo A *agudo* y a *obtuso*. Si se puede trazar en el huso por el punto C un arco oblicuo CB igual al lado *a*, no se podrá encontrar más que del lado de la oblicua extrema (b ó $180^\circ - b$) que sea de la misma naturaleza que *a;* y así, el problema no puede tener más que una solucion. *Esta solucion existirá* si *a* es menor que el de su misma naturaleza de los extremos b ó $180^\circ - b$; *el triángulo será imposible* si *a* es siquiera igual al de los arcos b ó $180^\circ - b$ de su misma naturaleza.

»Si se supusiera A *obtuso* y a *agudo,* se llegaría á las mismas conclusiones, pero invirtiendo los signos de desigualdad, porque el arco perpendicular CD sería obtuso.

»Sean A y a *agudos*. Siendo entónces tambien agudo el arco perpendicular CD, se ve que podrá existir en el huso una oblicua CB' igual á *a* del lado del arco extremo (b ó $180^\circ - b$) que sea agudo, y que *à fortiori* existirá entónces otro CB del lado del obtuso. Así, el problema podrá tener dos soluciones. *Estas dos existirán* si *a* es menor que el de los arcos extremos (b ó $180^\circ - b$) de su misma naturaleza; *una de las soluciones no será posible* si *a* es siquera igual al de los extremos (b ó $180^\circ - b$) que tiene su misma naturaleza. *El triángulo será imposible* si *a* es menor que el arco perpendicular CD.

»Si se supusiera A y a *obtusos,* se llegaria á las mismas conclusiones

Fig. 455.

Fig. 456.

»pero invirtiendo los signos, porque el arco perpendicular CD sería »obtuso.» (*)

PROBLEMA.

830. *Trazar por un punto dado un arco de círculo máximo tangente á una circunferencia de círculo menor dada (fig. 456).*

Si el punto dado está sobre la circunferencia dada, basta levantar por él un arco de círculo máximo perpendicular al radio esférico correspondiente (**820**).

Supongamos, en segundo lugar, que el punto dado A sea exterior á la circunferencia de círculo menor; es decir, que esté situado en el mayor de los dos casquetes esféricos separados por el círculo menor. Consideremos el problema resuelto; sea P el polo del círculo menor, B el punto de contacto del arco BA, y prolonguemos el radio esférico PB una longitud BC = PB. El punto C estará sobre una circunferencia descrita desde el punto P como polo y con una abertura de compás igual á la cuerda de un arco de círculo máximo doble del radio esférico r del círculo menor. El punto C estará tambien situado en otra circunferencia descrita desde el punto A como polo y con una abertura de compás igual á la cuerda del arco PA = d; porque siendo BA perpendicular en el punto medio de PBC, el punto A equidista de P y de C.

Obtenido ya el punto C por medio de esas dos circunferencias auxiliares, se trazará el arco de círculo máximo PC, que cortará al menor dado en B; y uniendo este punto con A por un arco de círculo máximo, se obtendrá la tangente pedida.

Para que el problema sea posible, es necesario y suficiente que las dos circunferencias auxiliares se corten; es decir, que se tenga (**821**)

$$D < D + 2r, \quad D > 2r - D, \quad D + D + 2r < 4.$$

La primera se cumple siempre, y las otras dos equivalen á

$$r < D < (2 - r),$$

que expresan que el punto A debe estar situado fuera del casquete esférico PB, y tambien fuera del casquete simétrico.

Las circunferencias auxiliares se cortan en dos puntos C y C′; de aquí dos soluciones: AB y AB′. Las dos circunferencias de AB y AB′ son tambien tangentes á la circunferencia simétrica de PB, porque ésta y su simétrica pertenecen á las dos hojas de un mismo cono, cuyo vértice es el centro de la esfera, y cada una de las circunferencias AB y AB′ tiene su plano tangente á este cono.

(*) LENTHÉRIC, *Nouvelles Annales*, tomo II, 1.ª serie.

La construccion que acabamos de indicar se aplica al problema análogo de *Geometría plana*, pero exige más espacio en el dibujo que la del núm. **169**.

PROBLEMA.

831. *Describir una circunferencia de círculo máximo tangente á dos menores dadas.*

Nos limitaremos á indicar la solucion y las condiciones de posibilidad, dejando al lector el cuidado de completar la discusion.

Sean P y P′ los polos de los dos círculos menores, R y R′ sus radios esféricos, y D la distancia esférica PP′; consideremos valuadas D, R, R′ con relacion al cuadrante como unidad.

Consideremos primeramente un círculo máximo tangente y que corte al arco PP′ en su prolongacion; si A y A′ son los puntos de contacto con las circunferencias P y P′, su polo estará sobre las circunferencias de círculo máximo PA y P′A′, y será, por consiguiente, vértice de un triángulo, cuyos otros dos vértices son P y P′, y del cual se conocen los tres lados D, 1 — R, 1 — R′.

Las condiciones de posibilidad son:

$$D > R - R' \quad y \quad D + R + R' < 2.$$

Consideremos en segundo lugar un círculo máximo tangente y que corte al arco PP′ entre P y P′. Se ve que su polo es el tercer vértice de un triángulo cuyos otros dos vértices son P y P′, y cuyos tres lados son D, 1 — R, 1 + R′. Son, pues, las condiciones de posibilidad, que

$$D > R + R', \quad D + R - R' < 2,$$

Las condiciones halladas pueden interpretarse geométricamente. Las primeras significan que el mayor de los dos casquetes esféricos R y R′ no contenga al menor y sea exterior al simétrico de éste. Las últimas significan que el mayor de los dos casquetes esféricos R y R′ sea exterior al menor y no contenga al simétrico de éste.

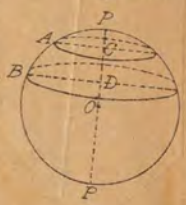
§ V.—Áreas en la superficie esférica.

DEFINICIONES.

832. Llámase zona la porcion de superficie esférica comprendida entre dos circunferencias cuyos planos son paralelos.—Estas circunferencias son las *bases* de la zona, y la distancia entre sus planos es la *altura*. Así, mientras que la se-

micircunferencia PABP' engendra una superficie esférica al girar alrededor de su diámetro PP' *(fig. 457)*, el arco AB engendra una zona, cuyas bases son las circunferencias AC y BD descritas por los puntos A y B, y cuya altura es la proyeccion CD del arco AB sobre el eje PP'.

Fig. 457.

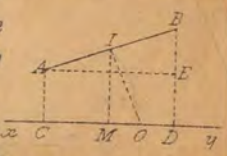


Si uno de los planos es tangente á la superficie esférica, una de las circunferencias dichas se reduce á un punto, y la zona que no tiene ya más que una base recibe el nombre de *casquete esférico*. Así, girando el arco PA alrededor de PP' engendra un casquete esférico, cuya base es la circunferencia AC y cuya altura es PC.

TEOREMA.

833. *Cuando una recta* AB *gira alrededor de un eje* xy *situado con ella en un mismo plano, el área engendrada tiene por medida el producto de la proyeccion* CD *de la recta sobre el eje por la circunferencia, cuyo radio es la perpendicular* IO *levantada á la recta* AB *en su punto medio hasta el encuentro con el eje.*

Fig. 458.



Supongamos que la recta AB esté toda ella al mismo lado de *xy*. Cualquiera que sea entónces la posicion relativa de AB y *xy*, el área engendrada por AB tiene por medida (**761**)

$$2\pi IM.AB, \qquad (1)$$

siendo IM la perpendicular bajada del punto I sobre *xy*.

Si la recta AB es paralela á *xy* *(fig. 460)*, el teorema queda demostrado; si así no fuese, hay que transformar la expresion (1), para lo cual trazaremos AE paralela á *xy* hasta su interseccion con la proyectante BD *(fig. 458)*, y los triángulos ABE, IMO son semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares, y dan:

$$\frac{IM}{AE} = \frac{IO}{AB}, \text{ de donde } IM.AB = IO.AE.$$

La expresion (1) equivale, pues, á

Fig. 459.

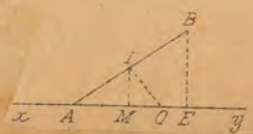
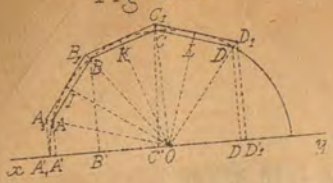


Fig. 460.

Fig. 461.



$2\pi IO.AE$ ó $2\pi IO.CD$,

lo cual demuestra el teorema.

Si el punto A está situado en el eje *xy (fig. 459)*, se repite el razonamiento anterior: AE coincide entónces con el eje.

TEOREMA.

834. *El área engendrada por una línea quebrada regular* ABCD *que gire alrededor de un diámetro* xy *que no la corte, tiene por medida el producto de la circunferencia inscrita en ella por la proyeccion* A'D' *de la quebrada sobre el eje (fig. 461).*

Sean O el cèntro y OI = OK = OL la apotema de la línea quebrada regular ABCD; se tiene, segun el teorema precedente,

área eng. por AB = A'B'. circ.ª OI,
» » » BC = B'C'. circ.ª OI,
» » » CD = C'D'. circ.ª OI;

luégo sumando

área eng. por ABCD = (A'B' + B'C' + C'D')
circ.ª OI = circ.ª OI.A'D'.

Corolario.

835. Consideremos un arco de círculo AD y una línea quebrada regular ABCD inscrita en él; al girar el arco AD alrededor del diámetro xOy, la línea quebrada engendra una área que tiende hácia un límite independiente de la ley segun la cual tiendan hácia cero sus lados, porque en el producto A'D'. circ.ª OI que mide esta área, el primer factor A'D' es constante, y el segundo circ.ª OI tiene siempre por límite circ.ª OA. Este límite del área engendrada por una línea quebrada regular inscrita, es lo que se llama *área de la zona* engendrada por el arco AD.

836. Se ve que la línea quebrada $A_1B_1C_1D_1$, circunscrita al mismo arco y semejante á la inscrita ABCD, engendra una área que tiende hácia el mismo límite. En efecto, se tiene

$$\frac{\text{área eng. por } A_1B_1C_1D_1}{\text{área eng. por ABCD}} = \frac{A'_1D'_1 . \text{ circ.}^a\ OA}{A'D' . \text{ circ.}^a\ OI};$$

pero la relacion $\frac{\text{circ.}^a\ OA}{\text{circ.}^a\ OI} = \frac{OA}{OI}$ tiende hácia la unidad cuando el número de lados de las líneas quebradas crece indefinidamente, y lo mismo sucede á la relacion $\frac{A'_1D'_1}{A'D'}$, que, en virtud de la semejanza de los polígonos A'ABCDD' y $A'_1A_1B_1C_1D_1D'_1$, es tambien igual á $\frac{OA}{OI}$.

TEOREMA.

837. *El área de una zona esférica tiene por medida el producto de su altura por la circunferencia de un círculo máximo.*

El área de la zona es, por definicion, el límite hácia el cual tiende el área engendrada por una línea quebrada regular inscrita en el arco generador de la zona cuando el número de lados de esta línea crece indefinidamente. Sean S el área de la zona, H su altura y R el radio del arco generador; es decir, el radio de la superficie esférica á que pertenece la zona; sean s el área engendrada por una línea quebrada regular inscrita en el arco generador, y a la apotema de esta línea quebrada. Se tiene (**834**)

$$s = H . 2\pi a,$$

puesto que la proyeccion sobre el eje de la línea quebrada es tambien igual á H. Pero cuando se hace crecer indefinidamente el número de lados de la línea quebrada, H permanece constante, s tiende hácia S y a hácia R. Se tiene, pues, en el límite

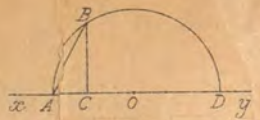
$$S = H . 2\pi R.$$

COROLARIOS.

838. En esferas iguales, dos zonas son entre sí como sus alturas, y, por consiguiente, dos zonas de la misma altura son equivalentes.

839. Consideremos el casquete esférico engendrado por el

Fig. 462.



arco AB *(fig. 462)* girando alrededor del diámetro AD. En virtud del teorema precedente, el área de este casquete tiene por medida

$$2\pi AO.AC = \pi AD.AC = \overline{\pi AB}^2 \text{ (223)}.$$

Luégo *un casquete esférico cualquiera equivale á un círculo cuyo radio sea igual á la cuerda del arco generador del casquete.*

TEOREMA.

840. *El área de la superficie esférica tiene por medida el producto de su diámetro por la circunferencia de un círculo máximo.*

Porque esta área puede ser considerada como la de una zona cuya altura sea un diámetro de la esfera. Por lo demás, el razonamiento hecho para la zona puede repetirse para este caso particular.

COROLARIOS.

841. Siendo S el área de una superficie esférica de radio R ó de diámetro D, se tiene

$$S = 2R.2\pi R = 4\pi R^2 = \pi D^2.$$

Luégo *el área de una superficie esférica equivale á cuatro círculos máximos ó á un círculo cuyo radio sea el diámetro de la esfera.*

842. *Las áreas de dos superficies esféricas son entre sí como los cuadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

843. *Problemas numéricos.*

1.° *Determinar en ménos de un miriámetro cuadrado la superficie del globo terrestre.*

Se sabe por la definicion del metro que la circunferencia de un círculo máximo del globo tiene 40 millones de metros ó 4000 miriámetros; su diámetro es, pues, igual á $\frac{4000}{\pi}$, y, por consiguiente (**841**), el área del globo es

$$\pi\left(\frac{4000}{\pi}\right)^2 = \frac{16000000}{\pi} = 5092958^{\text{Mmc}},$$

con un error que no llega á un miriámetro cuadrado.

2.° *¿Cuál es el radio de una esfera cuya superficie es de 1^{mc}?*

La fórmula

$$4\pi R^2 = 1, \text{ da } R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0^m,282$$

Fig. 463.

en menos de un milímetro.

TEOREMA.

844. *Dos triángulos esféricos simétricos, son equivalentes (figura 463).*

Sea P el polo de la circunferencia de círculo menor que pasaria por los tres puntos A, B, C, y tracemos los arcos de círculo máximo PA, PB, PC, que son iguales entre sí (**780**). Tracemos el diámetro POP′ y los arcos de círculo máximo P′A′, P′B′, P′C′. La igualdad de los ángulos POA, P′O′A′ da la de los arcos PA y P′A′; se ve del mismo modo que PB = P′B′ y PC = P′C′. Los triángulos PAB y P′A′B′ son simétricos é isósceles, y por esto son superponibles. En el mismo caso se hallan los triángulos PAC y P′A′C′, así como los PBC y P′B′C′. Luego los triángulos ABC y A′B′C′ son equivalentes como sumas de triángulos superponibles uno á uno separadamente.

Si el polo P estuviese en el exterior del triángulo ABC este no sería ya una suma, sino una diferencia.

COROLARIO.

845. *Si dos arcos de círculo máximo* AC′A′, BC′B′ *se cortan en un mismo hemisferio* C′ABA′B′, *la suma de los triángulos opuestos* AC′B, A′C′B′ *es igual al huso cuyo ángulo es* AC′B *(fig. 464).*

Se llama *huso* la porcion de superficie esférica comprendida

Fig. 464.

entre dos semicírculos máximos CAC', CBC' que se limitan en el diámetro comun COC'; el ángulo ACB ó AC'B de estos dos arcos, se llama el *ángulo del huso.*

Así, el huso comprendido entre CAC' y CBC' se compone del triángulo ABC' y del triángulo ABC; y como el triángulo A'B'C' es evidentemente el simétrico de ABC, y que dos triángulos simétricos son equivalentes, se ve que el huso, cuyo ángulo es C', es igual á la suma de los triángulos opuestos AC'B y A'C'B'.

TEOREMA.

846. *Si se toma por unidad de ángulos el recto, y por unidad de áreas la del triángulo trirectángulo, un huso tiene por medida el doble del número que mide su ángulo.*

Se ve inmediatamente que en la misma esfera ó en esferas iguales: *1.°, dos husos del mismo ángulo son superponibles: 2.°, un huso es igual á la suma de otros dos si su ángulo es igual á la suma de los ángulos de estos otros dos.*

De aquí resulta (**135**) que *dos husos cualesquiera de una misma esfera son entre sí como sus ángulos.*

Así, si A y A' son los números que miden los ángulos de dos husos de una misma esfera, habiendo adoptado el ángulo recto por unidad, y si F y F' son los números que miden estos husos habiendo tomado por unidad el triángulo trirectángulo (**813**) se tendrá

$$\frac{F}{F'} = \frac{A}{A'}.$$

Tomemos $A' = 1$; teniendo su ángulo recto, el huso correspondiente será igual á la cuarta parte de la superficie esférica; es decir, al doble del triángulo trirectángulo, y se tendrá $F' = 2$; por consiguiente,

$$\frac{F}{2} = \frac{A}{1}, \text{ de donde } F = 2A.$$

TEOREMA.

847. *Si se toma el ángulo recto como unidad de ángulos, y el triángulo trirectángulo para unidad de áreas, la de un triángulo esférico tiene por medida la suma de los números de medida de sus ángulos disminuida en dos unidades.*

Sea ABC *(fig. 465)* el triángulo propuesto; completemos la circunferencia de círculo máximo AB y prolonguemos los lados AC y BC hasta los puntos A′ y B′ en que cortan á aquella circunferencia. Se tendrá evidentemente

Fig. 465.

$$ABC + BCA' = \text{huso A},$$
$$ABC + ACB' = \text{» B},$$

y (**845**)

$$ABC + B'CA' = \text{» C}.$$

La suma de los primeros miembros de estas tres igualdades se compone de un hemisferio más dos veces el área del triángulo ABC; y como en el sistema de unidades adoptado el hemisferio está medido por el núm. **4**, si se designan por S, A, B, C los números que miden el área y los ángulos del triángulo, se tendrá (**846**)

$$4 + 2S = 2A + 2B + 2C;$$

de donde

$$S = A + B + C - 2. \qquad (1)$$

Escolios.

848. Sean R el radio de la esfera valuada en metros, σ el área del triángulo valuado en metros cuadrados, y α, β, γ los ángulos de éste valuados en grados; se tendrá que el triángulo trirectángulo es igual á la octava parte de la superficie esférica; es decir, á $\frac{1}{2}\pi R^2$, y

$$A = \frac{\alpha}{90}, \quad B = \frac{\beta}{90}, \quad C = \frac{\gamma}{90}, \quad S = \frac{\sigma}{\frac{1}{2}\pi R^2};$$

por consiguiente, en virtud de la relacion (1)

$$(2) \qquad \sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{180}\,\pi R^2.$$

Hé aquí dos ejemplos:

1.° *¿Cuál es el área de un triángulo cuyos ángulos son de 61°, 109°, 127°, en la esfera cuya área es de 1^{mc}?*

La relacion de este triángulo al trirectángulo es, segun la fórmula (1),

$$\frac{61 + 109 + 127 - 180}{90} = \frac{117}{90} = 1{,}3;$$

y como el triángulo trirectángulo es aquí la octava parte del metro cuadrado, el área del triángulo dado es

$$\frac{1}{8} \times 1.3 = 0^{mc},1625.$$

2.° *¿Cuál es el área de un triángulo cuyos ángulos son de 51° 37', 73° 11', 87° 43' en la esfera cuyo radio es de 2^{m},4?*

La fórmula (2) da, reduciendo á minutos,

$$\sigma = \frac{(51 + 73 + 87 - 180)\,60 + 37 + 11 + 43}{180.60}\,\pi.\,(2{,}4)^2$$

$$= 1{,}040533 \times \pi = 3^{mc},2689,$$

en menos de un centímetro cuadrado.

849. En análisis se valúan generalmente los ángulos en partes del radio (**297**, 3.°); entónces el recto corresponde á $\frac{\pi}{2}$, y si se designan por A', B', C' los ángulos del triángulo valuados en partes del radio, se tiene

$$A = \frac{A'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2A'}{\pi},\ B = \frac{2B'}{\pi},\ C = \frac{2C'}{\pi},$$

y, por consiguiente,

$$A + B + C - 2 = \frac{2}{\pi}(A' + B' + C' - \pi).$$

Siendo, por otra parte, el radio de la esfera igual á 1, el área del triángulo trirectángulo está medida entónces por $\frac{\pi}{2}$; de suerte que se tiene

$$S = \frac{S'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2S'}{\pi}.$$

siendo S' el número que mide el área del triángulo en este nuevo sistema de unidades. Se tiene, pues, finalmente (**847**), á causa de la fórmula (1)

$$S' = A' + B' + C' - \pi.$$

A este número abstracto $(A' + B' + C') - \pi$ se da el nombre de *exceso esférico* del triángulo.

TEOREMA.

850. *Si se toma el ángulo recto por unidad de ángulos y el triángulo trirectángulo como unidad de áreas, la de un polígono esférico de* n *lados tiene por medida la suma de los números que miden sus ángulos disminuida en* 2 (n — 2).

Se llega á este resultado descomponiendo el polígono en triángulos por medio de arcos de círculo máximo diagonales que partan de un mismo vértice, y aplicando la fórmula (1) del núm. **847** á los $(n - 2)$ triángulos así obtenidos.

Escolio.

851. Sean S, A_1, A_2, ..., A_n las medidas del área y de los ángulos de un polígono esférico convexo de n lados en el sistema de unidades adoptadas; se tendrá

$$S = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) - 2(n - 2).$$

Designemos por a_1, a_2, ..., a_n los números que miden los lados del polígono polar (**811**), tomando por unidad de longitud la cuarta parte de la circunferencia de un círculo máximo; se tendrá

$$A_1 = 2 - a_1, \quad A_2 = 2 - a_2, \quad \ldots A_n = 2 - a_n,$$

y, por consiguiente,

$$S = [2n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)] - 2(n-2) = 4 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

ó, finalmente, designando por p el perímetro del polígono polar,

$$S = 4 - p.$$

Así, *el área de un polígono esférico convexo es igual á 4 ménos el perímetro del polígono polar.* Resultado digno de llamar la atencion.

TEOREMA.

852. *El lugar geométrico de los vértices* C *de triángulos esféricos de la misma base* AB *é igual área es un arco de círculo menor que pasa por los puntos* E *y* D *diametralmente opuestos á los extremos* A *y* B *de la base* AB *(fig. 466).*

En efecto, cuando la expresion (A + B + C — 2) es constante, tambien lo es (C — D — E), puesto que se tiene evidentemente A = 2 — E, B = 2 — D. El lugar de que se trata es, pues, el mismo que el de los vértices de triángulos CDE, cuya base DE es fija, siendo constante la diferencia entre el ángulo en el vértice y la suma de los ángulos en la base. Por consiguiente (**822**), es un arco de círculo menor que pasa por los puntos fijos D y E.

Esta proposicion es conocida por el nombre de *teorema de Lexell.*

§ VI.—Volúmen de la esfera.

DEFINICIONES.

853. Sean $xABy$ *(fig. 467)* el semicírculo generador de una esfera, y en este semicírculo un sector AOB, y sea ab la proyeccion del arco AB de este sector sobre el eje xy. Miéntras la semicircunferencia engendra la superficie esférica, el arco AB engendra una zona (**832**), y los radios OA y OB que limitan el sector engendran (**751**) las superficies laterales de dos conos de revolucion, cuyas bases respectivas son los círculos Aa y Bb. La porcion de volúmen de la esfera comprendida entre las superficies laterales de estos dos conos y la zona AB, es el *sector esférico* correspondiente al sector circular AOB.

Un sector esférico es, pues, el volúmen engendrado por la rotacion de un sector circular alrededor de un diámetro exterior á su superficie; la zona engendrada por el arco base del sector circular, es la *base* del sector esférico.

Fig. 466.

Fig. 467.

854. Se llama *segmento esférico* la porcion del volúmen de la esfera comprendida entre dos planos secantes paralelos. Los círculos que estos planos determinan son *las bases* del segmento esférico, y la distancia entre dichos planos es su *altura*.

Cuando uno de los planos paralelos es tangente á la esfera, el círculo correspondiente se reduce á su polo y se tiene un segmento esférico con *una sola base*.

Si al sector esférico AOB *(fig. 467)* se añaden los dos conos OAa, BOb, se obtiene el segmento esférico comprendido entre los dos planos paralelos determinados por la rotacion de las perpendiculares Aa, Bb alrededor de xy. Este segmento esférico corresponde, pues, á la rotacion del trapecio mixtilíneo aABb alrededor del mismo eje.

Fig. 468.

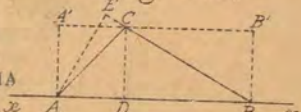
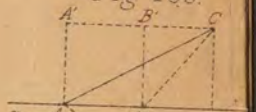


Fig. 469.



TEOREMA

855. *Cuando un triángulo gira alrededor de un eje situado en su plano y que pasa por uno de sus vértices siendo exterior á su superficie, engendra un volúmen que tiene por medida el producto del área que describe el lado opuesto al vértice fijo por el tercio de la altura relativa á este lado.*

Sea ABC el triángulo cuyo vértice A está sobre el eje xy, y cuya altura relativa á este vértice es AE. Distinguiremos tres casos:

1.° Que uno de los lados AB del triángulo coincida con el eje xy. El volúmen engendrado es la suma *(fig. 468)* ó la diferencia *(fig. 469)* de los conos engendrados por los triángulos rectángulos ACD, BCD, segun que la altura CD que corresponde al lado AB cae en el interior ó en el exterior del triángulo ABC que se considera.

Al mismo tiempo el cilindro engendrado por la rotacion del rectángulo ABB'A' que tiene la misma base y la misma altura que el triángulo dado ABC, es la suma ó la diferencia de los cilindros engendrados por la rotacion de los rectángulos ADCA', BDCB', cuya suma ó diferencia es el rectángulo ABB'A'. Por otra parte, el cono ACD es el tercio del cilindro ADCA' y el

cono BCD el tercio del cilindro BDCB' (**764**). Luégo, en uno y otro caso, el volúmen engendrado por el triángulo ABC es el tercio del cilindro ABB'A', y se tiene

$$\text{vol. eng. por ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2 . AB = \frac{1}{3}(\pi CD . BC) . AE,$$

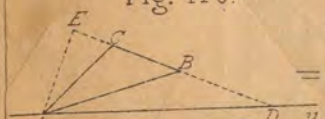
puesto que $CD . AB = BC . AE$, porque ambos productos expresan el doble del área del triángulo dado. Pero $(\pi . CD . BC)$ es la expresion del área lateral (**756**) del cono BCD ó el área de la superficie engendrada por el lado BC en la rotacion del triángulo ABC. Por consiguiente:

$$\text{vol. eng. por ABC} = \text{área eng. por BC} \times \frac{AE}{3}.$$

2.° Sopongamos *(fig. 470)* que el lado AB del triángulo no tenga más que el vértice A sobre el eje xy, y que el lado BC prolongado corte al eje en un punto D.

El triángulo ABC es entónces diferencia de los triángulos ACD, ABD, y, por tanto, el volúmen que engendre será diferencia entre los volúmenes engendrados por estos dos triángulos. Se tendrá, pues (1.°),

Fig. 470.



$$\text{vol. eng. por ABC} = [(\text{área eng. por DC}) - (\text{área eng. por DB})] . \frac{AE}{3}$$
$$= (\text{área eng. por BC}) \frac{AE}{3}.$$

3.° Supongamos, finalmente, que el lado AB no tenga más que el vértice A en el eje xy, y que el lado BC sea paralelo á este eje.

El volúmen engendrado por el triángulo ABC es la suma *(fig. 471)* ó diferencia *(fig. 472)* de los volúmenes que engendran los triángulos ABE, ACE. Pero el volúmen engendrado por el triángulo ABC es los dos tercios del cilindro engendrado por el rectángulo AB'BE, y el engendrado por el trián-

Fig. 471.

Fig. 472.

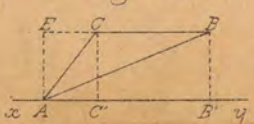
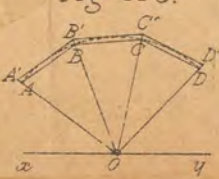


Fig. 473.



gulo ACE es tambien los dos tercios del cilindro que engendra el rectángulo AC′CE (**764**).

Luégo en uno y otro caso el volúmen engendrado por el triángulo ABC equivale á los dos tercios del cilindro engendrado por el rectángulo B′C′CB, suma ó diferencia de los rectángulos AB′BE, AC′CE, y se tiene, por tanto,

$$\text{vol. eng. por ABC} = \frac{2}{3}\,\pi\overline{AE}^2 . BC = (\text{área eng. por BC})\,\frac{AE}{3},$$

puesto que $2\pi AE \times BC$ expresa, en efecto, el área lateral del cilindro engendrado por el rectángulo B′C′CB, ó el área de la superficie engendrada por el lado BC.

TEOREMA.

856. *El volúmen engendrado por un sector poligonal regular que gira alrededor de un diámetro exterior á su superficie, tiene por medida el producto del área que describe la línea quebrada que le sirve de base por el tercio de la apotema de esta línea quebrada.*

Sea OABCD *(fig. 473)* el sector poligonal regular (**443**), y xy el diámetro que sirve de eje de giro. Descompongamos este sector en triángulos uniendo los vértices de la base ABCD con el centro O, y llamemos a la apotema de esta base. El volúmen engendrado por el sector será la suma de los volumenes engendrados por los triángulos que lo forman. Pero (**855**)

$$\text{vol. eng. por AOB} = \text{área eng. por AB} \times \frac{a}{3},$$

$$\text{» » » BOC} = \text{» » » BC} \times \frac{a}{3},$$

$$\text{» » » COD} = \text{» » » CD} \times \frac{a}{3}.$$

Sumando miembro á miembro, se obtiene

$$\text{vol. eng. por OABCD} = (\text{área eng. por ABCD}) \times \frac{a}{3}.$$

Escolio.

857. Sean AOD *(fig. 473)* un sector circular, y OABCD, OA'B'C'D' dos sectores poligonales regulares semejantes, uno inscrito y otro circunscrito al sector circular. Si se designa por a y a' las apotemas de los dos sectores poligonales, la relacion de los volumenes engendrados por la rotacion de estos sectores alrededor del eje xy es

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{\text{área eng. por ABCD}}{\text{área eng. por A'B'C'D'}};$$

pero cuando los lados de las líneas quebradas regulares tienden hácia cero, segun una ley cualquiera, los dos factores del producto anterior tienden uno y otro hácia la unidad (**290, 836**). Luégo la relacion de los volúmenes engendrados por los dos sectores poligonales tiene por límite la unidad, y sucederá lo mismo *à fortiori* á la relacion entre el volúmen del sector esférico y uno cualquiera de los volúmenes engendrados por los sectores poligonales.

Luégo *el volúmen de un sector esférico es el límite comun de los volúmenes engendrados por sectores poligonales regulares semejantes, inscrito uno y circunscrito el otro al sector circular correspondiente cuando se hace crecer indefinidamente el número de lados de sus bases.*

TEORÈMA.

858. *El volúmen de un sector esférico tiene por medida el producto del área de la zona que le sirve de base por el tercio del radio de la esfera.*

El volúmen de un sector esférico es el límite de los volúmenes engendrados por los sectores poligonales regulares inscritos en el sector circular correspondiente cuando se hace crecer indefinidamente el número de los lados de sus bases. Sean v el volúmen que engendra un sector poligonal regular inscrito, s el área de la superficie engendrada por su base, a su apotema. Sean del mismo modo V el volúmen del sector esférico, S el área de la zona que le sirve de base, R el radio de la esfera.

Se tiene (**856**)

$$v = s \cdot \frac{a}{3};$$

pero cuando se hace crecer indefinidamente el número de lados

de la base del sector poligonal, v tiende hácia V, s hácia S y a hácia R. Luego se tiene en el límite

$$V = S \cdot \frac{R}{3}.$$

COROLARIOS.

859. En esferas iguales, dos sectores esféricos son entre sí como las zonas que les sirven de bases, y por consiguiente, dos sectores esféricos cuyas bases tienen alturas iguales son equivalentes.

TEOREMA.

860. *El volúmen de la esfera tiene por medida el producto del área de su superficie por el tercio del radio.*

Porque este volúmen puede ser considerado como el de un sector esférico, cuyo sector circular generador es un semicírculo, ó bien cuya base es la superficie esférica entera. Por lo demás, podria repetirse en este caso particular el razonamiento hecho para un sector esférico cualquiera.

COROLARIOS.

861. Siendo V el volúmen de una esfera, R su radio y D su diámetro, se tiene

$$V = 4\pi R^2 . \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

862. *Los volúmenes de dos esferas son entre sí como los cubos de sus radios ó como los cubos de sus diámetros.*

863. Ejemplos numéricos:

1.° *Hallar el volúmen del globo terrestre.*

El área del globo terrestre es (**843**) de 5.092.958 miriámetros cuadrados (en menos de 1 miriámetro cuadrado). Su radio es $\frac{20.000.000}{\pi}$ ó 6.366 kilómetros (en menos de un kilómetro). El volúmen del globo terrestre, igual al producto de su

área por el tercio del radio, será, pues, de 1.081.000.000 miriámetros cúbicos (en ménos de un millon de miriámetros cúbicos).

Si se toma por unidad el radio del globo terrestre, el radio del Sol está representado por 108,5. El área y el volúmen del Sol son, pues, próximamente 11.800 veces y 1.280.000 veces el área y el volúmen de la Tierra (**842, 862**).

2.° *Hallar el radio de la esfera cuyo volúmen es un metro cúbico.*

La fórmula

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 1 \text{ da } R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0^m,620$$

en ménos de un milímetro.

Escolio.

864. *Los volúmenes de dos poliedros circunscritos á la misma esfera ó á esferas iguales, son entre sí como las áreas de los poliedros mismos.*

En efecto, si se descomponen los poliedros dados en pirámides, tomando por centro de descomposicion el centro de la esfera inscrita, la medida del volúmen de cada uno de ellos se obtiene multiplicando el área de su superficie por el tercio del rado de la esfera (**646**).

TEOREMA.

865. *El volúmen engendrado por un segmento circular que gira alrededor de un diámetro exterior á su superficie, equivale á la sexta parte de un cilindro que tuviese por radio la cuerda del segmento y por altura la proyeccion de esta cuerda sobre el eje.*

El segmento A*m*B *(fig. 474)* es la diferencia entre el sector circular OAB y el triángulo isósceles AOB, y, por consiguiente, el volúmen engendrado por la rotacion de este segmento será tambien diferencia entre los volúmenes engendrados por el sector circular y el triángulo.

Siendo DF la proyeccion de AB sobre xy, y OI la altura del triángulo AOB, se tendrá (**858, 837, 855, 833**)

sector esférico engendrado por AOB = zona engendrada por

$$\text{AB}.\frac{\text{OA}}{3}=\frac{2}{3}\pi\overline{\text{OA}}^2.\text{DF},$$

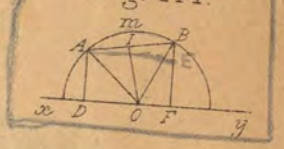
volúmen engendrado por triáng. AOB = área engendrada por

$$\text{AB}.\frac{\text{OI}}{3}=\frac{2}{3}\pi\overline{\text{OI}}^2.\text{DF}.$$

Por consiguiente,

$$\text{vol. eng. por A}m\text{B}=\frac{2}{3}\pi(\overline{\text{OA}}^2-\overline{\text{OI}}^2).\text{DF}.$$

Fig. 474.



Pero el triángulo rectángulo OIA da

$$\overline{\text{OA}}^2-\overline{\text{OI}}^2=\overline{\text{AI}}^2=\frac{\overline{\text{AB}}^2}{4},$$

y, por tanto,

$$\text{vol. eng. por A}m\text{B}=\frac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{DF},$$

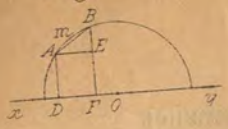
que es la expresion del teorema.

TEOREMA.

866. *El volúmen de un segmento esférico equivale al volúmen de una esfera cuyo diámetro sea la altura del segmento, aumentado en otro volúmen que sea la semisuma de los volúmenes de dos cilindros que tengan por altura comun la del segmento y por bases respectivas las del segmento.*

El trapecio mixtilíneo DAmBF *(fig. 475)* engendra un segmento esférico al girar alrededor del diámetro xy (**854**). Este segmento es, pues, la suma de los volúmenes engendrados por el segmento circular AmB y el trapecio rectángulo DABF. Se tiene, ante todo (**865**),

Fig. 475.



$$\text{vol. eng. por } AmB = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2.DF.$$

El trapecio DABF engendra un tronco de cono de revolucion y se tiene

$$\text{vol. eng. por } DABF = \frac{1}{3}\pi DF\,(\overline{BF}^2 + \overline{AD}^2 + BF.AD).$$

Por consiguiente,

$$\text{vol. eng. por } DAmBF = \frac{1}{6}\pi DF\,(\overline{AB}^2 + 2\overline{BF}^2 + 2\overline{AD}^2 + 2BF.AD).$$

Por otra parte, la cuerda AB está ligada á la altura DF y á los radios BF y AD de las bases del segmento esférico por la relacion

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{DF}^2 + (BF - AD)^2,$$

ó bien

$$\overline{AB}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{AD}^2 - 2BF.AD.$$

Sustituyendo este valor de $\overline{AB}^2$, y simplificando, se tendrá

$$\text{vol. eng. por } DAmBF = \frac{1}{6}\pi DF\,(\overline{DF}^2 + 3\overline{BF}^2 + 3\overline{AD}^2)$$

lo cual puede escribirse:

$$\text{vol. eng. por } DAmBF = \frac{1}{6}\pi\overline{DF}^3 + \frac{1}{2}(\pi\overline{BF}^2.DF + \pi\overline{AD}^2.DF),$$

que es la expresion del teorema (**861**, **746**).

Si el segmento que se considera no tiene más que una base, es decir, si el punto D *(fig. 476)* es una de las extremidades del diámetro xy, se tiene simplemente:

$$\text{vol. eng. por } DmBF = \frac{1}{6}\pi\overline{DF}^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{BF}^2.DF.$$

Escolio.

867. Cuando el segmento esférico no tiene más que una

base *(fig. 476)* se puede expresar su volúmen V en funcion de su altura $DF = h$ y del radio R de la esfera. Se tiene entónces, segun la fórmula precedente.

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi \overline{BF}^2 . h.$$

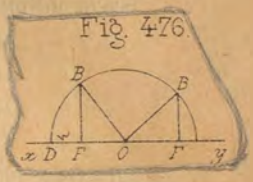


Fig. 476

Pero (**223**)

$$\overline{BF}^2 = h\,(2R - h),$$

de donde

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h^2\,(2R - h),$$

ó simplificando

$$(1) \qquad V = \pi h^2\,(R - \frac{1}{3}h).$$

Puede hallarse esta fórmula directamente mirando el segmento de una base como la suma ó diferencia del sector esférico cuya base es el mismo casquete, y el cono de revolucion que, teniendo por base la misma del segmento, tiene su vértice en el centro de la esfera. El segmento esférico de que se trata es la suma ó diferencia de los dos volúmenes indicados, segun que es mayor ó menor que el hemisferio.

En el segundo caso *(fig. 476)* se tiene

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 . h - \frac{1}{3}\pi \overline{BF}^2\,(R - h).$$

En el primero

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 . h + \frac{1}{3}\pi \overline{BF}^2\,(h - R).$$

Estas dos fórmulas son idénticas, puesto que $\overline{BF}^2$ tiene siempre la misma expresion; simplificando estas fórmulas se llega á la (1).

TEOREMA.

868. *El volúmen de una pirámide esférica; tiene por medida el producto de su base por el tercio del radio de la esfera.*

Se llama *pirámide esférica* á la porcion del volúmen de una esfera comprendido entre las caras de un ángulo poliedro cuyo vértice esté en el centro de la esfera; el polígono esférico correspondiente á este ángulo poliedro, es la *base* de la pirámide. Dos pirámides esféricas se llaman *simétricas* cuando sus bases son polígonos esféricos simétricos.

Llámase *cuña* á la porcion del volúmen de una esfera comprendida entre dos semicírculos máximos CAC', CBC' *(figura 464)*; el huso C'ACBC' es la *base* de la cuña, y su ángulo es el *ángulo* de la cuña.

Se demuestra que:

1.° *Dos pirámides esféricas triangulares simétricas son equivalentes* (**844**);

2.° *Si se toma por unidad de ángulos el recto, y por unidad de volúmen la pirámide trirectangular, que es la octava parte del volúmen de la esfera, una cuña tiene por medida el doble del número que mide su ángulo* (**846**);

3.° *En el mismo sistema de unidades, el volúmen de una pirámide esférica triangular tiene por medida el número* A + B + C − 2, *siendo* A, B, C *las medidas de los ángulos del triángulo esférico que sirve de base á la pirámide* (**847**).

De aquí resulta que la relacion del volúmen de una pirámide esférica triangular al área de su base es igual á la relacion de la pirámide esférica trirectangular al triángulo trirectángulo; pero esta última relacion es igual á la del volúmen de la esfera á su área; es decir, el tercio del radio. Luégo el volúmen de la pirámide esférica triangular es igual al producto de su base por el tercio del radio, y este teorema se generaliza para la pirámide esférica poligonal descomponiendo su base en triángulos.

§ VII.—Generalidades sobre las superficies.

DEFINICIONES.

869. Una superficie es el lugar de las posiciones sucesi-

vas de una línea que cambia de posicion, ó de posicion y forma por una ley determinada y continua. Ordinariamente se dirige (al menos en parte) el movimiento de esta línea que se llama *generatriz* por la condicion de cortar siempre á ciertas líneas fijas, que se llaman *directrices*.

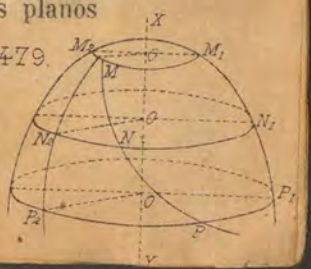
Hé aquí algunos ejemplos:

1.° Una *superficie cónica* es el lugar de las posiciones sucesivas de una recta A_1SA *(fig. 477)*, que pasa siempre por un punto fijo S y se apoya sobre una línea fija AMB plana ó alabeada. Aquí la generatriz es la recta (constante de forma) y una de las directrices se reduce á un punto que se llama *vértice*. Una superficie cónica tiene dos hojas SA_1B_1, SAB, separadas por el vértice.

2.° Una *superficie cilíndrica* es el lugar de las posiciones sucesivas de una recta AA′ que se apoya sobre una línea fija ABC *(fig. 478)* y permanece paralela á una direccion dada. Una superficie cilíndrica puede ser considerada como el límite de una cónica cuyo vértice se aleja indefinidamente en la direccion dada, ó más brevemente como una cónica cuyo vértice está en el infinito en una cierta direccion.

3.° Una *superficie de revolucion* es el lugar de las posiciones sucesivas de una línea MNP *(fig. 479)* que gira alrededor de una recta fija XY, á la cual está invariablemente ligada. En este movimiento, todo punto M de la generatriz MNP describe una circunferencia cuyo plano es perpendicular al eje XY y cuyo centro O está sobre este eje; por lo cual todas las secciones hechas por planos perpendiculares al eje son círculos: estos círculos M_1MM_2, N_1NN_2, P_1PP_2, ... son los *paralelos* de la superficie. Llámanse *meridianos* las secciones hechas en la superficie por planos que pasan por el eje XY; dos meridianos cualesquiera $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$, son líneas superponibles; porque si se hace girar el plano XOP_1 en el ángulo P_1OP_2 hasta llevar el punto P_1 sobre el P_2, los puntos M_1, N_2, ... coincidirán respectivamente con M_2, N_2, ..., puesto que los ángulos M_1OM_2, N_1ON_2, ..., P_1OP_2, son iguales como ángulos planos correspondientes á un mismo diedro.

Fig 479.



Toda curva trazada sobre una superficie de revolucion, puede ser mirada como generatriz de esta superficie; se elige ordinariamente como generatriz la curva meridiana. Hemos estudiado ya tres superficies de revolucion: la cónica de revolucion, cuya meridiana es una recta que corta al eje; la cilíndrica de revolucion, cuya meridiana es una recta paralela al eje, y la esférica, cuya meridiana es una circunferencia cuyo centro está en el eje.

Las superficies de revolucion admiten un segundo modo de generacion muy notable: pueden ser consideradas como el lugar de las posiciones de una circunferencia cuyo centro recorre el eje fijo XY, cuyo plano se conserva perpendicular á este eje, y cuyo radio varía segun una ley tal que la circunferencia corte siempre á una meridiana dada, ó á cualquiera otra curva trazada sobre la superficie. Esta circunferencia, variable de magnitud y posicion, es entonces la *generatriz* y la meridiana, ó la curva fija considerada sobre la superficie es la *directriz*.

TEOREMA.

870. 1.° *Las secciones de una superficie cilíndrica por dos planos paralelos, son iguales.*

2.° *Las secciones de una cónica por dos planos paralelos, son semejantes.*

En efecto:

1.° Sean la superficie cilíndrica AA′ *(fig. 478)* y dos secciones ABC, A′B′C′ hechas por dos planos paralelos. Tomemos cuatro puntos A, B, C, M en la primera seccion y tracemos las generatrices AA′, BB′, CC′, MM′, que cortan á la segunda seccion en A′, B′, C′, M′. Los cuadriláteros ABCM y A′B′C′M′ son superponibles, como bases opuestas de un prisma cuadrangular. Segun esto, si se transporta el plano de la segunda seccion al de la primera, todo punto M′ de la segunda coincidirá con su correspondiente M de la primera tan luégo como tres de los puntos A′, B′, C′ se hayan colocado sobre sus correspondientes A, B, C.

La seccion A′B′C′ puede ser considerada como la proyeccion oblicua (586) de ABC; se puede, pues, enunciar tambien este teorema del siguiente modo: *Una curva plana cualquiera, es igual á su proyeccion (ortogonal ú oblicua) sobre un plano paralelo al suyo.*

2.° Sea la superficie cónica SAMB y dos secciones AMB, A′M′B′ hechas por dos planos paralelos *(fig. 477)*. Tracemos por el vértice una recta cualquiera SOO′ que corte á los dos planos en O y O′, y proyectemos paralelamente á SOO′ la primera seccion AMB sobre el plano de la segunda; esta proyeccion *amb* será igual á AMB (1.°), y quedará demostrado el teorema si probamos que *amb* y A′M′B′ son homotéticas. Pero siendo SMM′ una generatriz cualquiera de la superficie, las rectas OM y O′M′ son paralelas, y se tiene

Fig. 477.

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{SO}{SO'};$$

y observando que la proyeccion m de M está situada sobre O′M′ y que $O'm = OM$, se puede escribir

$$\frac{O'm}{O'M'} = \frac{SO}{SO'}.$$

El segundo miembro tiene un valor independiente de la posicion del punto M′ sobre la curva A′M′B′, y, por tanto, las curvas *amb* y A′M′B′ son homotéticas.

Escolios.

871. Se llama *seccion recta de una superficie cilíndrica* la seccion por un plano perpendicular á las generatrices.

Un *cilindro* es el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica y dos secciones planas paralelas. Estas secciones son las *bases* de cilindro, y la distancia entre los planos paralelos es la *altura* de este cuerpo. El cilindro es *recto* ú *oblicuo*, segun que sus generatrices son perpendiculares ú oblicuas al plano de la base. El *cilindro recto de base circular*, es el cilindro de revolucion estudiado en el § I.

El área lateral de un cilindro cualquiera, es igual al producto de su arista por el perímetro de su seccion recta.

El volúmen de un cilindro cualquiera, es igual al producto de su base por su altura.

Se llega á estos teoremas considerando el cilindro como límite de un prisma inscrito cuando los lados de la base poligonal tienden hácia cero.

Los teoremas relativos al prisma truncado demostrados en los números **719, 720, 722, 723,** son aplicables al cilindro truncado.

872. Un *cono* es el cuerpo limitado por una superficie cónica, que termina, por una parte, en su vértice, y por otra en una seccion plana que toma el nombre de *base;* la *altura* del cono es la distancia del vértice al plano de la base. Un cono de *base circular* es *recto* ú *oblicuo,* segun que la proyeccion ortogonal del vértice sobre el plano de la base coincida ó no con el centro del círculo. El cono circular recto es el cono de revolucion estudiado en el § **II.**

El volúmen de un cono cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura.

Se llega á este teorema considerando el cono como límite de una pirámide inscrita cuando los lados de la base poligonal tienden hácia cero.

TEOREMA.

873. *En una superficie cónica ó cilíndrica, el plano* SNT *(fig. 480) determinado por una generatriz* SN *y la tangente* NT *á una curva* ANB *situada en la superficie en el punto* N *en que esta curva corta á la generatriz, es el mismo, cualquiera que sea la curva que se considere sobre la superficie.*

Basta trazar otra curva cualquiera CMD sobre la superficie que corte á la generatriz SN en el punto M, y probar que el plano SNT contiene la tangente MR á esta curva en el punto M; y, en efecto, el plano NSN′, que pasa por la generatriz SMN y otra SM′N′, tiene por límite SNT, puesto que la cuerda NN′ tiende hácia la tangente NT; pero cuando el punto

Fig. 480

N′ llega á coincidir con N, M′ llega á M, y las secantes NN′, MM′ se convierten al mismo tiempo en las tangentes NT y MR; y como las secantes MM′, NN′ están siempre contenidas en el plano móvil SNN′, se ve que en el límite el plano SNT contiene la tangente MR.

Este plano SNT se llama *plano tangente á la cónica ó cilíndrica á lo largo de la generatriz* SN.

COROLARIO.

874. Suponiendo que la curva ANB sea plana, se llega á este teorema: *La tangente* NT *á la proyeccion ó á la perspectiva* ANB *de una curva* CMD, *es la proyeccion ó perspectiva de la tangente* MR *á esta curva.*

Este corolario cae en defecto cuando la tangente en el espacio es una de las proyectantes mismas. Entónces la proyeccion ó perspectiva de la tangente se reduce á un punto, miéntras que la tangente á la proyeccion ó perspectiva es una recta bien determinada; es la traza sobre el plano de proyeccion del plano tangente á la cilíndrica ó cónica á lo largo de la generatriz que coincide con la tangente en el espacio.

TEOREMA.

875. *En el cono oblicuo de base circular, toda seccion antiparalela á la base es un círculo.*

Sea S *(fig. 481)* el vértice de un cono oblicuo cuya base es el círculo O. Se llama *plano principal* el plano SAB perpendicular al de la base y trazado por la recta que une el vértice S con el centro O de esta base. Se dice que un plano CMD es antiparalelo á la base cuando es perpendicular al plano principal SAB, y su traza sobre éste es antiparalela á AB con relacion al ángulo ASB (**195**). Se trata de probar que la seccion CMD es un círculo.

Tracemos por un punto cualquiera M de la seccion un plano paralelo á la base; este plano cortará al cono segun un círculo A′MB′ (**870**), cuyo diámetro es A′B′, y al plano CMD segun

una recta MP perpendicular al plano principal (**561**). Pero en el círculo A'MB' se tiene (**223**)

$$\overline{MP}^2 = PA'.PB'.$$

Por otra parte, los triángulos PCA', PDB' son semejantes por tener sus ángulos iguales, y dan:

$$\frac{PA'}{PD} = \frac{PC}{PB'}, \text{ de donde } PA'.PB' = PC.PD.$$

Luégo

$$\overline{MP}^2 = PC.PD,$$

y, por consiguiente (**223**), el punto M pertenece á una circunferencia cuyo diámetro es CD.

876. Recíprocamente, *no hay más secciones circulares que las paralelas y antiparalelas á la base.*

Consideremos, en efecto, una seccion circular CMD no paralela á la base, y sea *(fig. 481)* RR' la traza de su plano sobre el de la base; bajemos desde el centro O la perpendicular OQ sobre RR', y sean A y B los puntos en que corta á la circunferencia base; tracemos las generatrices SA y SB, y las tangentes AK y BL, que son evidentemente paralelas á RR'. Los planos SAK, SBL tangentes al cono cortarán al plano MRR' segun dos rectas CG y DH tangentes al círculo CMD y paralelas á RR'; por consiguiente, la recta DCQ será perpendicular á RR'. De aquí se deduce que los planos de los círculos AB y CD son perpendiculares al mismo plano SAB que pasa por el vértice y por sus centros. Trazando, por otra parte, la seccion B'MA' paralela á la base se tiene

$$\overline{MP}^2 = PA'.PB', \ \overline{MP}^2 = PC.PD;$$

por tanto,

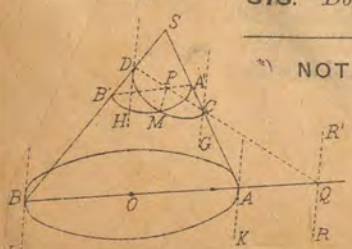
$$PA'.PB' = PC.PD.$$

Luégo los triángulos PA'C, PDB' son semejantes, y los ángulos DB'A', DCA' son iguales; de suerte que CD es antiparalela á AB.

Corolarios.

877. La misma propiedad se ofrece en el cilindro oblicuo de base circular (*).

Fig. 481.



878. *Dos secciones, una* A_1B_1 *paralela y otra* CD *antiparalela (figu-*

Fig. 483

NOTA 29.

ra 482) á la base de un cono oblicuo de base circular, están siempre situadas en una misma superficie esférica; porque las dos secciones circulares A_1B_1 y CD deben ser perpendiculares (**875**) á un mismo plano SAB que pasa por sus centros, y el cuadrilátero A_1B_1DC situado en este plano es inscriptible; por consiguiente, los círculos A_1B_1 y CD están sobre la esfera, cuya circunferencia de círculo máximo pasa por los cuatro puntos A_1, B_1, C, D.

Fig. 482.

Inversamente, *por dos círculos* A_1B_1 *y* CD *situados en una esfera se pueden siempre hacer pasar dos conos.* Sean, en efecto, A_1B_1CD *(figura 482)* la seccion esférica que pasa por el centro de la esfera y por los centros de las dos circunferencias dadas, y sean A_1B_1 y CD los diámetros de estas circunferencias situados en la seccion A_1B_1CD. Los planos de estos círculos son perpendiculares al plano secante A_1B_1CD. Pero si se trazan las rectas A_1C y B_1D, su punto de interseccion S será el vértice de un cono que tenga por base el círculo A_1B_1 y que pase por los puntos C y D. Pero el ángulo DCS es igual al A_1B_1S; luégo la seccion CD hecha en el cono por un plano perpendicular á A_1B_1DC será un círculo cuyo diámetro es CD, que es el mismo círculo dado en la esfera. Hay un segundo cono que corta á la esfera segun los mismos círculos A_1B_1 y CD; su vértice está en el punto de interseccion S' de las dos diagonales B_1C y A_1D. Estos dos conos pueden en ciertos casos degenerar en cilindros.

879. De las consideraciones que preceden resulta que *cuando un cono* S *penetra en una esfera segun un círculo* A_1B_1, *sale de ella segun otro círculo* CD.

880. En un cono oblicuo de base circular, los centros de las secciones paralelas á la base están situados en una recta que pasa por el vértice. Los centros de las secciones antiparalelas á la base están en otra recta que pasa tambien por el vértice. Importa conocer la posicion relativa de esas dos rectas.

Sea SAB *(fig. 483)* la seccion principal del cono cuya base es el círculo descrito sobre AB como diámetro. El círculo circunscrito al triángulo ASB es un círculo máximo de la esfera que contiene á la circunferencia AB y al punto S. La tangente SG á la circunferencia SAB es la traza sobre SAB del plano tangente á la esfera en S, y este plano tangente es perpendicular al plano SAB de la figura; por otra parte, la recta SG es antiparalela á AB por la igualdad de los ángulos BAS y BSG. Luégo el plano tangente SG es paralelo á los planos de las secciones antiparalelas á la base AB, y la cuestion queda reducida á hallar el centro de una seccion cualquiera paralela á este plano tangente. Elegiremos la que pasa por el punto T en que se cortan las tan-

Fig. 484.

centes en A y B á la circunferencia ASB; es decir, por el vértice T del cono circunscrito á la esfera segun el círculo AB. Trazando por el punto T la paralela CD á SG, se tendrá el diámetro de esta seccion. Pero es fácil ver que el punto T es precisamente su centro; es decir, que ese punto T es el medio de CD. En efecto, el ángulo TBD=SBK tiene por medida la mitad del arco SIB. El ángulo TDB = BSG tiene la misma medida; luégo el triángulo TBD es isósceles, y se tiene TD = TB. Análogamente se ve que TC = TA; por consiguiente, siendo TA = TB (**170**), se deduce que TC = TB. Así, *el lugar de los centros de las secciones antiparalelas á la base* AB *es la recta* ST *que une el vértice* S *con el vértice* T *de un cono auxiliar circunscrito á lo largo del círculo* AB *á la esfera determinada por esta circunferencia y el vértice* S *del cono primitivo.*

TEOREMA.

881. *El lugar de las tangentes trazadas por un punto de una superficie á las diversas curvas que por este punto pueden trazarse sobre la superficie, es un plano.*

Sean M el punto dado *(fig. 484)*, AMA′ una seccion plana que pasa por este punto, y BB′, CC′, ... otras secciones hechas de la superficie por planos paralelos al primero. Si se toman sobre estas curvas los puntos P, Q, ... en que la tangente es paralela á MT, se obtendrá una curva continua MPQ, ... situada en la superficie. Sea MU la tangente á esta curva en el punto M; todo se reduce á probar que el plano TMU contiene la tangente MV á una curva cualquiera MG trazada por el punto M sobre la superficie.

Ahora bien; si M′ es el punto en que la curva MG corta á la seccion BPB′, y trazamos las cuerdas MP, MM′ y proyectamos paralelamente á MP la seccion BPB′ sobre el plano de la primera seccion AMA′, la curva MM_1B_1 así obtenida será tangente en M á MT. En efecto, la tangente á la proyeccion MM_1B_1 debe ser la proyeccion de la tangente PS á la curva BPB′ del espacio (**874**), y la proyeccion de PS paralelamente á MP es precisamente MT, puesto que por hipótesis PS y MT son paralelas. Así, pues, si M_1 es la proyeccion de M′, el plano M_1MP de las dos cuerdas MM_1 y MP contiene siempre la cuerda MM′; por consiguiente, la tangente MV estará contenida en el plano límite de M_1MP, y este plano límite es TMU, puesto que las cuerdas MM_1 y y MP tienen respectivamente por límites las tangentes MT y MU.

Este plano, lugar de las tangentes á las diversas curvas que sobre la superficie se pueden trazar pasando por M, recibe el nombre de *plano tangente á la superficie en el punto* M.

Escolios.

882. La *normal* á una superficie en el punto M, es la perpendicular al plano tangente en este punto.

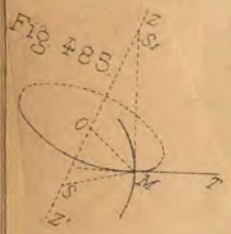
883. El plano tangente en un punto de una superficie está determinado por las tangentes á dos curvas cualesquiera trazadas sobre la superficie por dicho punto.

884. En toda *superficie reglada*, es decir, engendrada por una línea recta, el plano tangente en un punto contiene la generatriz que por él pasa, y está determinado entónces por esa generatriz y por la tangente á una curva cualquiera trazada por el punto sobre la superficie. Este plano cambia en general para los diversos puntos de la generatriz, y puede decirse que *gira* alrededor de ella. Hay, sin embargo, un género de superficies regladas para las cuales el plano tangente en los diversos puntos de la generatriz es siempre el mismo, y se dice que es tangente á lo largo de la generatriz, como sucede en las cónicas y cilíndricas (**873**). Estas superficies se llaman *desarrollables*, miéntras que reciben el nombre de *alabeadas* las regladas que no gozan de esta propiedad. Las desarrollables se llaman así porque pueden ser extendidas sobre un plano sin desgarrarse ni plegarse. En efecto, consideremos una superficie tal que sus planos tangentes lo sean á lo largo de cada generatriz, es decir, no cambien sino de una á otra generatriz; el conjunto de los planos tangentes para las diversas generatrices forma una superficie poliedral circunscrita que tiene por límite la superficie curva que se considera. Pero esta superficie poliedral puede ser extendida sobre un plano haciendo girar cada una de las caras alrededor de una arista hasta rebatirla sobre el plano de la precedente; y como esta propiedad se verifica, cualquiera que sea la proximidad de las generatrices entre sí, tambien se verifica en el límite para la superficie de que se trata.

885. El plano tangente á una superficie puede dejarla toda entera á un lado, teniendo entónces un simple punto de contacto á toda una línea de contacto; el primer caso se presenta, por ejemplo en la esférica; el segundo en una cónica ó cilíndrica de base circular. Puede, por el contrario, dejar el plano tangente una parte de la superficie á un lado y otra parte al otro, cortándola por consiguiente; la seccion es entónces una curva de nudo, como sucede, por ejemplo, en un punto de la superficie de garganta de una polea.

886. Finalmente, debemos observar que el teorema último (**881**) cae en defecto en ciertos puntos *singulares*, por ejemplo en el vértice de un cono; en este punto el lugar de las tangentes no es un plano,

sino la misma superficie cónica propuesta. Lo mismo sucede en el punto de una superficie de revolucion situado sobre el eje, cuando la meridiana corta á este eje bajo el ángulo diferente de 90°. Digamos, sin embargo que si un punto describe sobre una cónica una curva bien determinada y que va á morir en el vértice, el plano tangente á la cónica en cada una de las posiciones del punto móvil está bien determinado, y tambien lo está al llegar el móvil al vértice mismo del cono, en cuyo punto el plano tangente es el que corresponde á la generatriz tangente en el vértice á la curva que se considera.



TEOREMA.

887. *El plano tangente en un punto* M *á una superficie de revolucion, es perpendicular al plano meridiano* ZOM *que pasa por el punto de contacto (fig. 485).*

En efecto, el plano tangente en M contiene la tangente MT al paralelo OM, y esta tangente MT es perpendicular al plano meridiano ZOM, por serlo á las dos rectas OM y OZ situadas en este plano.

COROLARIOS.

888. La normal MS en el punto M está contenida en el plano meridiano ZOM (**882**). El punto S en que corta al eje ZZ es el mismo para todas las normales en los diversos puntos de un mismo paralelo; de donde se deduce que *las normales á una superficie de revolucion en los diversos puntos de un paralelo forman un cono de revolucion que tiene su vértice* S *en el eje de la superficie. Las tangentes á las meridianas en puntos situados sobre un mismo paralelo forman tambien un cono de revolucion que está circunscrito á la superficie y cuyo vértice* S_1 *está sobre el eje de la superficie.* El ángulo S_1MS que mide el de los planos tangentes á las dos cónicas en el punto M, es recto; *las dos cónicas son, pues, ortogonales.*

TEOREMA.

889. *Cuatro planos tangentes á una superficie alabeada trazados por una misma generatriz, tiene su relacion anarmónica igual á la de sus cuatro puntos de contacto.*

Sean, en efecto, G una generatriz de una superficie alabeada (**884**), y A, B, C, D los planos tangentes á la superficie en los puntos a, b, c, d de esta generatriz. Consideremos cuatro curvas fijas $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, trazadas arbitrariamente sobre la superficie por los puntos a, b, c, d. Designemos por a', b', c', d' los puntos en que estas curvas cortan á una generatriz G′ próxima á G, y tracemos las cuerda aa' bb' cc' dd'. El

haz de los cuatro planos Gaa', Gbb', Gcc', Gdd', es cortado por la transversal G′ en los puntos a', b', c', d', y, por tanto, la relacion anarmónica de estos cuatro puntos es igual á la de los cuatro planos. Y como esta propiedad se presenta cualquiera que sea la posicion de G′ sobre la superficie, tendrá lugar cuando ésta llegue á confundirse con G; pero entónces los puntos a', b', c', d' se confunden con a, b, c, d, y los planos Gaa', Gbb', Gcc', Gdd' son los planos tangentes A, B, C, D, puesto que las cuerdas aa', bb', cc', dd' tienen por límites las tangentes en a, b, c, d á las curvas $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$. Luégo la relacion anarmónica de los cuatro planos tangentes A, B, C, D es igual á la de sus puntos de contacto a, b, c, d.

COROLARIOS.

890. La relacion (**727**)

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{\operatorname{sen} \overset{\wedge}{CA}}{\operatorname{sen} \overset{\wedge}{CB}} : \frac{\operatorname{sen} \overset{\wedge}{DA}}{\operatorname{sen} \overset{\wedge}{DB}},$$

que es la expresion del teorema precedente, permite determinar el plano D que toca á la superficie en un punto cualquiera d de la generatriz, cuando se conozcan los planos tangentes A, B, C en tres puntos dados a, b, c de la generatriz.

891. Se dice que dos superficies alabeadas S y S′ que tienen una generatriz comun G, son tangentes á lo largo de ella cuando lo son en todos los puntos de dicha generatriz.

Dos superficies alabeadas S *y* S′ *son tangentes á lo largo de una generatriz comun* G *cuando se tocan en tres puntos* a, b, c *de ella.*

Sean, en efecto, d un punto cualquiera de la generatriz G, D y D′ los planos tangentes en ese punto á las superficies S y S′, y sean A, B, C los planos tangentes comunes en los puntos a, b, c. Las relaciones anarmónicas de los dos sistemas de cuatro planos (A, B, C, D) (A, B, C, D′) son iguales entre sí, puesto que son iguales á la de los cuatro puntos a, b, c, d. Luégo los planos D y D′ coinciden y las dos superficies S y S′ se tocan en un punto cualquiera d de la generatriz comun.

Al estudiar la Geometría descriptiva se comprenderá la importancia de este principio fundamental.

§ VIII.—Apéndice.

TEÓREMA DE GULDIN.

892. La importante proposicion conocida bajo el nombre de *Teo-*

rema de Guldin se encuentra indicada ya en Pappus (fines del siglo IV). Fué nuevamente hallada por Guldin á principios del siglo XIV.

TEOREMA.

893. *El área engendrada por una línea quebrada plana cualquiera que gira alrededor de un eje exterior á ella y situado en su plano, tiene por medida el producto de la longitud de la quebrada por la circunferencia que describe su centro de gravedad.*

Sabemos que el centro de gravedad de una línea quebrada plana es el centro de las distancias proporcionales de los centros de gravedad de sus lados (**714**).

Si la línea quebrada se reduce á una recta AB, la proposicion ha sido ya demostrada (**761**), puesto que el centro de gravedad de una recta está en su punto medio (**714**).

Consideremos ahora *(fig. 486)* la línea quebrada plana cualquiera MNPQR que gira alrededor del eje xy. Sean a, b, c, ..., las longitudes de los lados de esta línea; α, β, γ, ... las distancias de los puntos medios A, B, C, ... de sus lados al eje xy. El área total S engendrada por la línea quebrada MNPQR es la suma de las áreas engendradas por sus lados MN, NP, ... y se tendrá (**761**)

$$S = a.2\pi\alpha + b.2\pi\beta + c.2\pi\gamma + \ldots = 2\pi\,(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots).$$

Si se designa por z la distancia al eje xy del centro de las distancias proporcionales de los puntos A, B, C, ..., se tiene (**710**)

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots = z\,(a + b + c + \ldots);$$

de donde

$$S = (a + b + c + \ldots).2\pi z.$$

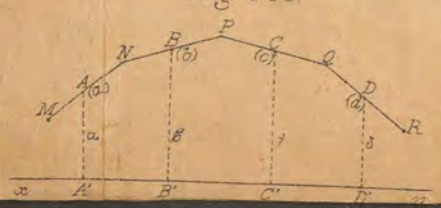
que es la expresion del enunciado.

COROLARIOS.

894. El teorema subsiste, cualesquiera que sean el número y la longitud de los lados de la línea quebrada: es decir, en el límite cuando se trata de una línea curva ó mixta. El centro de gravedad de la línea es entónces la posicion límite del centro de gravedad de la línea poligonal. Por consiguiente, *el área engendrada por una línea curva plana que gira alrededor de un eje exterior á ella y situado en su plano, tiene por medida el producto de su longitud* (**289**) *por la circunferencia que describe su centro de gravedad.*

APLICACIONES.

895. 1.° *¿Cuál es la expresion del área engendrada por una circunfe-*



rencia de radio r *que gira alrededor de una recta* xy *situada en su plano y que no la corta?*

Sea d la distancia del centro de esta circunferencia al eje xy; el centro de una circunferencia es evidentemente su centro de gravedad, porque en la investigacion del centro de las distancias medias se pueden reemplazar muchos puntos por su centro particular (**713**), y el centro que corresponde á los extremos de un diámetro cualquiera es el centro de la circunferencia. El área de la superficie engendrada, que se llama *toro*, será, pues,

$$2\pi r . 2\pi d = 4\pi^2 r d.$$

2.° *Hallar la posicion del centro de gravedad de una semicircunferencia de radio* r.

Sea x la distancia del punto pedido al diámetro que limita la semicircunferencia. Si se la hace girar alrededor de este diámetro, engendra una superficie esférica de radio r. Se deberá, pues, tener

$$\pi r . 2\pi x \quad \text{ó} \quad 2\pi^2 r x = 4\pi r^2; \quad \text{de donde} \quad x = \frac{2r}{\pi}.$$

El centro de gravedad debe hallarse, por otra parte (segun una observacion anterior), situado sobre el radio perpendicular al eje; su posicion queda, pues, completamente determinada.

TEOREMA.

896. *El volúmen engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje exterior á él y situado en su plano, tiene por medida el producto del área del triángulo por la circunfereneia que describe su centro de gravedad.*

Distinguiremos tres casos:

1.° Uno de los lados del triángulo coincide con el eje *(fig. 487)*.

El volúmen engendrado por el triángulo ABC que gira alrededor de xy, tiene por expresion (**855**, 1.°)

$$\frac{1}{3}\,\overline{\pi\,AD^2}\,.\,BC.$$

ó designando por S el área del triángulo ABC,

$$\frac{2}{3}\,\pi AD\,.\,S.$$

Si G es el centro de gràvedad del triángulo ABC, se tiene (**715**)

$$GG' = \frac{AD}{3}.$$

Luego el volúmen engendrado puede escribirse

Fig. 487.

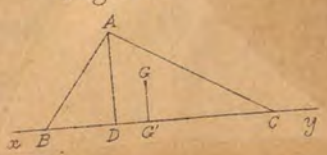
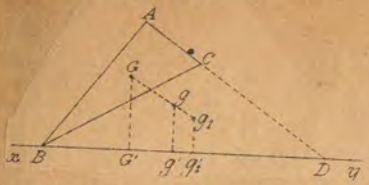


Fig. 488.



$$S.2\pi GG',$$

que es la expresion del teorema.

2.° El triángulo no tiene mas que un vértice situado en el eje *(figura 488)*.

Prolonguemos el lado AC hasta su interseccion con el eje xy. Se tiene

$$\text{vol. eng. por ABC} = \text{vol. eng. por ABD} - \text{vol. eng. por BCD}.$$

Si g y g_1 son los centros de gravedad de los triángulos ABD y CBD, se tendrá, segun el primer caso,

$$\text{vol. eng. por ABC} = \pi(\text{ABD}.gg' - \text{CBD}.g_1g'_1).$$

Pero siendo el triángulo ABC diferencia entre los dos triángulos ABD y CBD, su centro de gravedad G es el centro de las distancias proporcionales de los puntos g, g_1 si se atribuyen á los tres puntos considerados coeficientes proporcionales á las áreas de los tres triángulos correspondientes, dando á dichos coeficientes los signos convenientes (**716**). Se tendrá, por consiguiente,

$$\text{ABD}.gg' - \text{CBD}.g_1g'_1 = \text{ABC}.GG',$$

de donde

$$\text{vol. eng. por ABC} = \text{ABC}.2\pi GG'.$$

3.° El eje es enteramente exterior al triángulo *(fig. 489)*.

No pudiendo ser paralelos al eje los tres lados del triángulo, prolonguemos el lado AB, por ejemplo, hasta su interseccion en D con el eje xy y unamos C con D. Se tendrá

$$\text{vol. eng. por ABC} = \text{vol. eng. por ACD} - \text{vol. eng. por BCD};$$

y designando por g y g_1 los centros de gravedad de los triángulos ACD y BCD, segun el segundo caso,

$$\text{vol. eng. por ABC} = 2\pi(\text{ACD}.gg' - \text{BCD}.g_1g'_1).$$

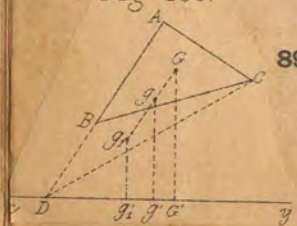
Siendo el triángulo ABC, cuyo centro de gravedad es G, la diferencia de los triángulos ACD y BCD, se tiene, como anteriormente,

$$\text{ACD}.gg' - \text{BCD}.g_1g'_1 = \text{ABC}.GG',$$

de donde

$$\text{vol. eng. por ABC} = \text{ABC}.2\pi GG'.$$

Fig. 489.



TEOREMA.

897. *El volúmen engendrado por un polígono que gira alrededor de*

un eje exterior á él y situado en su plano, tiene por medida el producto de su área por la circunferencia que describe su centro de gravedad.

Descompongamos el polígono dado, cuya área es S, en triángulos que tengan por áreas, t, t', t'', ... Sean δ, δ', δ'', ..., las distancias al eje de los centros de gravedad de los triángulos, y d la distancia al mismo eje del centro de gravedad del polígono (**716**). El volúmen engendrado por el polígono, suma de los volúmenes engendrados por los triángulos que lo componen, es

$$2\pi\,(t.\delta + t'.\delta' + t''.\delta'' + \ldots).$$

Pero segun las propiedades del centro de las distancias proporcionales, el paréntesis es igual $S.d$; por consiguiente, el volúmen pedido tiene por expresion:

$$S.2\pi d.$$

Corolario.

898. El teorema subsiste cualesquiera que sean el número y la magnitud de los lados del polígono; es decir, en el límite, cuando el perímetro del polígono ó una parte de él se convierte en una curva. En este caso el centro de gravedad de la superficie es la posicion límite del centro de gravedad de la superficie poligonal. Por consiguiente, *el volúmen engendrado por una área plana cualquiera que gira alrededor de un eje exterior á ella y situado en su plano, tiene por medida el producto de su área por la circunferencia que describe su centro de gravedad.*

Aplicaciones.

899. 1.° *¿Cuál es el volúmen del toro?*

Conservando las notaciones del núm. **895**, el volúmen pedido tiene por expresion:

$$\pi r^2.2\pi d = 2\pi^2.r^2.d.$$

2.° *Hallar la posicion del centro de gravedad de un semicírculo de radio* r.

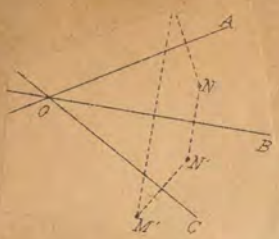
Este centro de gravedad está situado evidentemente en el radio perpendicular al diámetro que limita el semicírculo. Además, si se hace girar el semicírculo alrededor de este diámetro, engendra una esfera de radio r. Luégo llamando x la distancia del centro de gravedad al eje

$$\frac{\pi r^2}{2}.2\pi x = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad \text{de donde,} \qquad x = \frac{4r}{3\pi}.$$

Queda, pues, determinada la posicion del punto pedido.

SOBRE EL MÁXIMO Y MÍNIMO DE LAS FIGURAS.

900. Nos proponemos llegar á demostrar que: *entre todos los cuerpos de la misma área, la esfera es el que tiene mayor volúmen.*



LEMA.

901. *Cuando una figura plana tiene dos ejes de simetría* OA *y* OB *que forman entre sí un ángulo* α *inconmensurable con* π, *esta figura es un círculo.*

Nótese, ante todo, que la recta OC *(fig. 490)*, simétrica de OA con respecto á OB, será tambien por fuerza eje de simetría; porque siendo M un punto cualquiera de la figura y N su simétrico con respecto á OA, al doblar la figura alrededor de OB, los dos puntos M′ y N′ sobre los cuales caen M y N, serán tambien puntos de la figura á causa de la simetría con respecto á OB; y se ve que estos dos puntos M′ y N′ serán simétricos con respecto á OC, puesto que OA se ha aplicado sobre OC.

Por consiguiente, haciendo girar OB en un ángulo α alrededor del punto O y en el plano de la figura, se obtiene un tercer eje de simetría OC. Una nueva rotacion de la misma amplitud α daria un cuarto eje de simetría, etc., etc. Siendo por otra parte α inconmensurable con π, no pueden existir números enteros m y n tales que $m\alpha = n\pi$; ó en otros términos, no se volverá á caer nunca sobre un eje de simetría ya obtenido por más que se continúe la rotacion. Luégo la figura tiene infinitos ejes de simetría pasando por el punto O; luégo es un círculo.

LEMA.

902. *Si por los puntos medios* a, b, c *de las aristas laterales* AA′, BB′, CC′ *de un tronco de prisma triangular se traza un plano:* 1.º, *los dos segmentos del tronco son equivalentes;* 2.º, *la seccion* abc *es en general menor que la semisuma de las bases* ABC, A′B′C′.

La primera parte es evidente segun el núm. **653**; la segunda se hace patente observando que la seccion *abc* es la semisuma de las proyecciones de las bases ABC sobre el plano de *abc*, lo cual se ve fácilmente.

De esta proposicion resulta que: *si en un cuerpo limitado por una superficie convexa se trazan una serie de cuerdas paralelas, la superficie lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas divide al cuerpo en dos partes de igual volúmen, y tiene ella misma una área menor que la mitad del área total del cuerpo.*

TEOREMA.

903. «*Entre todos los cuerpos de igual superficie, la esfera es el que* »*tiene mayor volúmen; y entre todos los de igual volúmen, la esfera es la* »*de menor superficie.*

»Imagínese un cuerpo que tenga la propiedad de ser de mayor volú»men que todos los de igual superficie que él; es evidente que existe »siempre para una direccion dada un cierto plano que divide á la super»ficie (cualquiera que ella sea) en dos partes iguales.

»Sea A uno de estos dos planos *(fig. 491)* y sean α y $\mathfrak{S}$ las mitades de »la superficie. Si el cuerpo no estuviese dividido por este plano en dos »partes equivalentes en volúmen; si, por ejemplo, se tuviese $\alpha A > \mathfrak{S} A$, »no podria tener este cuerpo un volúmen máximo, porque se podria »reemplazar $\mathfrak{S}$ por la simétrica de α y habria aumentado el volúmen »total sin cambiar la superficie. Es, pues, necesario que $\mathfrak{S} A = \alpha A$. Si »en este supuesto $\mathfrak{S}$ no fuese simétricamente igual á α, se podria ima»ginar una superficie α_1 del mismo lado que $\mathfrak{S}$ con respecto al plano »A, y simétricamente igual á α, y se tendria

$$\alpha_1 A = \alpha A = \mathfrak{S} A;$$

»y, por tanto, el cuerpo $\alpha\alpha_1 = \alpha\mathfrak{S}$. Si en los espacios comprendidos »entre $\mathfrak{S}$ y α_1 se trazasen rectas paralelas entre sí y limitadas por estas »superficies, sus puntos medios estarán sobre otra superficie γ que »tendria la misma base que $\mathfrak{S}$ y α_1, y entónces:

$$\gamma A = \mathfrak{S} A = \alpha_1 A \quad \text{ó} \quad \gamma\alpha = \mathfrak{S}\alpha;$$

»pero al mismo tiempo (**902**) $2\gamma < \mathfrak{S} + \alpha_1$ ó $\gamma < \mathfrak{S}$, puesto que $\mathfrak{S} = \alpha_1$. »La superficie γ, que sería menor que $\mathfrak{S}$, encerraria, pues, con α un »espacio equivalente en volúmen al que está encerrado entre $\mathfrak{S}$ y α, lo »que es contrario al supuesto. Es, pues, necesario que $\mathfrak{S}$ sea simétrica»mente igual á α; en otros términos: el cuerpo supuesto tiene la pro»piedad de admitir como plano de simetría todo plano que divida á su »superficie en dos partes equivalentes (*)».

Pues bien, consideremos una recta cualquiera D en el espacio, y tracemos por ella dos planos cualesquiera P_1 y Q_1 que formen entre sí un ángulo α inconmensurable con π. El cuerpo máximo admitirá dos planos de simetría P y Q, respectivamente paralelos á P_1 y Q_1; por consiguiente, toda seccion del cuerpo hecha perpendicularmente á la recta D tendrá por ejes de simetría las dos rectas p y q, segun las cuales el plano de esta seccion corta á los P y Q. Pero estas rectas forman entre sí un ángulo α inconmensurable con π; luégo esta seccion es un círculo (**901**), y como la direccion D es arbitraria, se ve que el cuerpo máximo es cortado por un plano cualquiera segun un círculo; luégo es una esfera.

Fig. 491

(*) STEINER, *Journal de Crelle*, tomo XXIV.

DE LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS.

904. Un *poliedro regular* es un poliedro en el cual todas las caras son polígonos regulares iguales, y cuyos ángulos diedros son iguales entre sí.

TEOREMA.

905. *No pueden existir más que cinco poliedros regulares convexos.*

Esta proposicion no es más que un caso particular de la del número **695**. Se puede demostrar tambien directamente en pocas palabras.

La suma de las caras de un ángulo poliedro convexo, debe ser menor que cuatro ángulos rectos (**570**); si las caras son triángulos equiláteros, no pueden reunirse alrededor de un punto para formar un ángulo poliedro más que *tres* ó *cuatro* ó *cinco* de estos triángulos; se construyen así el *tetraedro* regular, limitado por cuatro triángulos equiláteros; el *octaedro* regular por ocho, y el *icosaedro* regular por veinte. Ya *seis* triángulos equiláteros reunidos alrededor de un mismo punto darian seis ángulos planos, cuya suma es igual á cuatro ángulos rectos; no habria, pues, ángulo poliedro, porque los seis triángulos aparecerian colocados en un mismo plano.

No pueden ser empleados los *cuadrados* ó *pentágonos* regulares más que uniéndolos *tres* á *tres*, puesto que el ángulo del cuadrado es recto y el de un pentágono regular es igual á $\frac{6}{5}$ de recto. Se tienen así el *exaedro* regular ó cubo, limitado por seis cuadrados iguales, y el *dodecaedro* regular por doce pentágonos regulares iguales.

No es posible ningun otro poliedro regular convexo, puesto que el ángulo de un exágono regular es igual á $\frac{4}{3}$ de recto, y tres de ellos darian ya una suma de cuatro ángulos rectos.

Fig. 493.

Probaremos la existencia de los cinco poliedros regulares que hemos enunciado mostrando cómo puede efectuarse su construccion.

PROBLEMA.

906. *Construir un poliedro regular conociendo su arista.*

La construccion del tetraedro regular *(fig. 492)* y la del cubo *(figura 493)* no pueden ofrecer dificultad, segun lo dicho en los números **591** y **645**. No nos ocuparemos más que del octaedro, del dodecaedro y del icosaedro.

Fig. 492

Octaedro regular.

Tomemos *(fig. 494)* un cuadrado ABCD, cuyo lado sea la arista da-

Fig. 495.

da a. Levantemos en su centro una perpendicular indefinida, y llevemos sobre ella, á uno y otro lado del punto O, una longitud igual al rádio del cuadro ABCD; es decir, á $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Uniendo los puntos S y S' así obtenidos con los vértices A, B, C, D, se forma un octaedro regular SABCDS'. En efecto, las ocho aristas SA, SB, ..., S'D son iguales entre sí y á

$$\sqrt{\overline{OS}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}} = a.$$

Las ocho caras del poliedro construido son, pues, triángulos equiláteros iguales. Además, los seis ángulos poliedros son iguales entre sí, porque los ángulos S y B, por ejemplo, son los ángulos en el vértice de dos pirámides cuadrangulares regulares evidentemente superponibles por tener bases y alturas iguales. Se puede resumir la construccion del octaedro regular notando que tres rectas iguales y perpendiculares entre sí en sus puntos medios, tales como AC, BD, SS', tienen por extremidades los seis vértices de este poliedro.

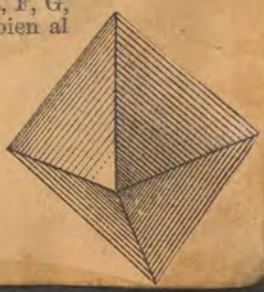
Dodecaedro regular.

Sea ABCDE *(fig. 495)* un pentágono regular cuyo lado es a. Tomemos otros pentágonos regulares del mismo lado a. Con dos de ellos, unidos al ABCDE, formemos en A un ángulo triedro que, por tener sus caras iguales, tendrá tambien sus diedros iguales. Los tres lados BA, BC, BH determinan entónces un ángulo triedro B igual al triedro A, por tener un ángulo diedro igual comprendido entre dos caras iguales entre sí y una á una. Se puede, pues, formar en todos los vértices del pentágono ABCDE ángulos triedros iguales á A, empleando pentágonos regulares iguales á éste y dispuestos como lo indica la figura. El pentágono ABCDE es comun á todos los ángulos triedros; despues de formado el primero, se necesita la adicion de un nuevo pentágono para formar el segundo, el tercero y el cuarto triedro; el último en E se encuentra ya formado.

Así se obtiene un casquete de seis pentágonos regulares, iguales é igualmente inclinados. Este casquete constituye una superficie poliedral abierta, mitad del dodecaedro, y los vértices del decágono *alabeado* (*) FGHIKLMNPR que la limita corresponden sucesivamente á *uno solo* y á *dos* de los pentágonos. Por otra parte, los ángulos de este

(*) Este decágono es *alabeado* porque si los cuatro puntos R, F, G, H estuviesen en un mismo plano, este plano contendria tambien al punto A, y no habria, por consiguiente, ángulo triedro en A.

Fig. 494.



decágono son iguales entre sí; porque, en efecto, los dos ángulos triedros, en F y A por ejemplo, son iguales por tener un diedro igual comprendido entre dos caras iguales una á una é iguales entre sí. El ángulo RFG será, pues, igual al ángulo EAB, y, por consiguiente, al ángulo FGH. Luégo se podria dar una vuelta sobre sí mismo al polígono FGHIKLMNPR, haciendo que el vértice F se colocase en G, el G en H, etc., etc., sin que dejara de coincidir con su primera posicion.

Si se construye idénticamente y por separado la segunda mitad del dodecaedro, y si se la vuelve para presentarla (oponiéndola) á la primera mitad, se podrán aplicar, por lo que hemos dicho, uno sobre otro los decágonos alabeados que los limitan, colocando los vértices que no pertenecen más que á *un* pentágono en el segundo casquete sobre los vértices que corresponden á *dos* en el primero. Como los planos de estos pentágonos tienen ya entre sí la inclinacion necesaria para componer un ángulo triedro igual al formado en el vértice A, el cuerpo que se obtenga será un dodecaedro regular, limitado por doce pentágonos regulares iguales que forman veinte ángulos triedros iguales.

Icosaedro regular.

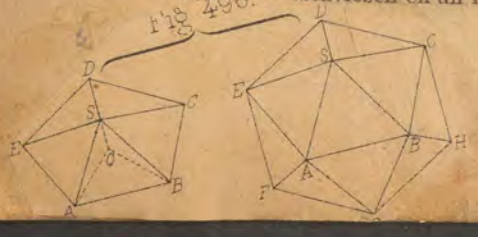
Tomemos un pentágono regular ABCDE *(fig. 496)* cuyo lado sea la arista a. Levantemos en su centro o una perpendicular á su plano, y en el plano determinado por el radio oA y esa perpendicular describamos, desde el punto A como centro y con un radio a, un arco de círculo que cortará á la perpendicular en el punto S, porque a es mayor que $OA = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$. Las aristas SA, SB, SC, SD, SE serán iguales á a. Por consiguiente, la superficie lateral de la pirámide pentagonal SABCDE estará formado por cinco triángulos equiláteros iguales entre sí, igualmente inclinados, puesto que los ángulos triedros isósceles en A, B, ..., E, son iguales entre sí por tener sus tres caras iguales una á una.

Ahora bien, coloquemos en cada uno de los vértices A y B del triángulo SAB (como lo indica la figura) el vértice de una figura idéntica á la primera SABCDE, de manera que las dos nuevas pirámides ABSEFG, BASCHG tengan respectivamente comunes con la primera las caras ASB y ASE, BAS y BSC, y tengan comunes entre sí las caras ASB y ABG. Tendremos así un casquete de diez triángulos equiláteros iguales é igualmente inclinados.

Este casquete forma una superficie poliedral abierta, mitad del icosaedro, y los vértices del exágono *alabeado* (*) CDEFGH que la limita

(*) El contorno CDEFGH es *alabeado*, porque si los cuatro puntos C, D, E, F estuviesen en un mismo plano, los dos pentágonos ABCDE

Fig. 496.



pertenecen sucesiva y alternativamente á *dos* y á *tres* triángulos. Por otra parte, los ángulos de este exágono son iguales; el ángulo DEF, por ejemplo, es igual á EFG, porque ámbos son evidentemente iguales á EAG. Se podria, pues, volver sobre sí mismo el polígono CDEFGH, haciendo pasar el vértice C á H, el H á G, etc., etc., sin que deje de coincidir con su primera posicion.

Si se construye idénticamente y aparte la segunda mitad del icosaedro y (volviéndola) se la opone á la primera, se podrán aplicar uno sobre otro los exágonos alabeados que los limitan, haciendo coincidir los vértices del uno que pertenecen en él á *tres* triángulos con los que en el otro no corresponden más que á *dos*. Como los planos de estos triángulos tienen ya entre sí la inclinacion necesaria para construir en cada vértice un ángulo poliedro igual al formado en S, el poliedro obtenido será un icosaedro regular limitado por veinte triángulos equiláteros iguales y formando doce ángulos pentaedros iguales.

Escolio.

907. Por medio de las fórmulas $S = \frac{nF}{m}$ y $A = \frac{nF}{2}$ del número **695** se forma fácilmente el siguiente cuadro con los números de los elementos en los cinco poliedros regulares convexos, cuyo número de caras conocemos:

	F	n	S	m	A
Tetraedro regular....	4	3	4	3	6
Exaedro »	6.	4.	8	3	12
Octaedro »	8	3	6.	4.	12
Dodecaedro »	12	5	20	3	30
Icosaedro »	20	3	12	5	30

El número de caras del exaedro y el número de lados de cada cara, son respectivamente iguales al número de vértices del octaedro y al número de aristas de sus ángulos poliedros. Lo mismo sucede recíprocamente al octaedro comparado con el exaedro. El número de aristas es el mismo en uno y otro. Las mismas observaciones pueden hacerse en el dodecaedro y en el icosaedro. Se pueden, pues, mirar los po-

---

y BSEFG que tienen ya comunes los vértices B y E en el plano CDE, estarian ambos en ese plano, que contendria tambien al punto A, lo cual es imposible, segun lo que precede.

liedros regulares convexos como *conjugados* dos á dos, porque el tetraedro regular que tiene tantas caras como vértices es conjugado de sí mismo (*).

TEOREMA.

908. *Todo poliedro regular convexo, es inscriptible y circunscriptible á la esfera.*

Sean ABCDE, ABC'D'E' dos caras adyacentes, cuyos centros sean O y O' *(fig. 497)*.

Las perpendiculares OK y O'K al lado comun AB se cortarán en el mismo punto K, y las perpendiculares OS y O'S á las dos caras ABCDE y ABC'D'E' se cortarán en un punto S, puesto que están situadas en el plano OKO' perpendicular á AB en el punto K; estas dos perpendiculares OS y O'S son los lugares geométricos de los puntos equidistantes de los vértices de las caras ABCDE y ABC'D'E'. Los dos triángulos rectángulos KOS y KO'S serán iguales entre sí, puesto que tienen la hipotenusa KS comun y el cateto KO igual á KO', como apotemas de polígonos regulares iguales. Siendo el ángulo OKO' el que mide la inclinacion constante de dos caras adyacentes del poliedro, se ve que el ángulo OKS = O'KS será la mitad de esta inclinacion, y, por consiguiente, el triángulo OKS será igual al que se forme análogamente para todas las caras.

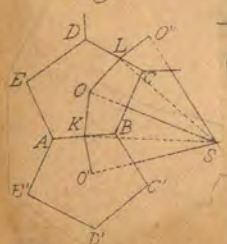
Si se considera una tercera cara O'' contigua á la cara ABCDE por el lado CD, cuyo punto medio es L, la perpendicular levantada á esta cara por su centro O'' cortará, pues, á la recta OS en el punto S, puesto que el triángulo LO''S debe ser idéntico al KOS ó á su igual OLS.

Continuando del mismo modo, se ve que las perpendiculares levantadas á las diferentes caras del poliedro por sus centros se cortan mutuamente en un mismo punto S, situado á la misma distancia de todas las caras, y tambien á la misma distancia de todos los vértices.

Luégo la esfera cuyo centro esté en S y tenga por radio SA, pasa por todos los vértices del poliedro regular; es decir, que está *circunscrita* á él; la esfera que con el mismo centro tenga por radio SO, es tangente á todas las caras del poliedro en sus centros; es decir, que está *inscrita*.

El punto S es el *centro* del poliedro regular, SA es su *radio*, SO su *apotema*.

Fig. 497.



COROLARIOS.

909. Si se descompone un poliedro regular en pirámides, tomando

(*) NOTA 30.

por centro de descomposicion el centro mismo del poliedro, las pirámides que se obtengan son regulares; por consiguiente, *todo poliedro regular puede ser descompuesto en tantas pirámides regulares iguales como caras tiene.*

Prolongando las caras laterales de estas pirámides, quedan divididas las superficies esféricas inscrita y circunscrita en tantos polígonos esféricos regulares iguales como caras tiene el poliedro.

El volúmen de un poliedro regular tiene por medida el producto de su área por el tercio de su apotema (que es el radio de la esfera inscrita) (**646**).

Dos poliedros regulares del mismo órden son necesariamente semejantes, y, por consiguiente, *la relacion de sus aristas, de sus áreas ó de sus volúmenes es la de los radios de las esferas inscritas ó circunscritas, la de los cuadrados de estos radios ó la de sus cubos.*

910. *Los centros de las caras de un poliedro regular son los vértices de otro poliedro regular conjugado del primero.*

Sean A *(fig. 498)* uno de los vértices del poliedro dado, y S el centro comun de las esferas inscrita y circunscrita á él. Designemos por O, O′, O″, ... los centros de las caras que concurren en el vértice A. Hallándose estos puntos equidistantes por una parte del vértice A y por otra del centro S, deberán estar situados en un mismo plano perpendicular á SA en un punto que será centro del círculo circunscrito al polígono OO′O″, ... Además, siendo L el punto medio del lado AB, el triángulo OLO′ es constante, y, por consiguiente, el polígono OO′O″, ..., que tiene todos sus lados iguales y es inscriptible, será regular. Queda, pues, demostrado que todas las caras del poliedro cuyos vértices son los centros de las caras del propuesto son polígonos regulares iguales, y que el número de estas caras es el de los vértices del poliedro propuesto. Falta hacer ver que esas caras están igualmente inclinadas entre sí; y, en efecto, el diedro formado por las dos caras del nuevo poliedro que se cortan en OO′ es suplemento del ángulo ASB que forman entre sí las dos perpendiculares á ellas SA y SB, y este ángulo es constante.

Fig. 498.

El recíproco de este teorema es evidente. Se ve que al aplicar la construccion indicada (bajo una ú otra forma) el tetraedro regular conduce á un nuevo tetraedro, el exaedro á un octaedro, y recíprocamente, el dodecaedro á un icosaedro, y recíprocamente, lo cual justifica la denominacion de *conjugados* dada á estos poliedros (**907**).

PROBLEMA.

911. *Dado un poliedro regular convexo, hallar:* 1.°, *el ángulo de dos caras adyacentes;* 2.°, *los radios de las esferas inscrita y circunscrita.*

1.° Sean S *(fig. 499)* el centro comun de las esferas inscrita y circunscrita; AB el lado comun á las dos caras adyacentes, cuyos centros son O y O'; L su punto medio; el ángulo OLO' mide la inclinacion pedida I.

Siendo AB perpendicular al plano OLO', los planos OLO' y ASB son perpendiculares entre sí. Por consiguiente, si desde el punto S como centro describimos una esfera, su interseccion con el ángulo triedro SALO determinará un triángulo esférico *alo* rectángulo en *l*.

Sean *n* el número de lados de cada cara en el poliedro que se considera, y *m* el número de aristas de cada ángulo poliedro. Se tendrá evidentemente

$$\text{áng.}^{\circ}\ aol = \text{áng.}^{\circ}\ \text{AOL} = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n},$$

Fig. 499.

y

$$\text{áng.}^{\circ}\ oal = \text{áng.}^{\circ}\ \text{OASL} = \frac{2\pi}{2m} = \frac{\pi}{m}.$$

El triángulo esférico rectángulo *alo* da, por otra parte,

$$\cos oal = \cos ol \times \operatorname{sen} aol.$$

Pero

$$\cos ol = \cos \text{OSL} = \operatorname{sen} \text{OLS} = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\,\text{I}.$$

Se tiene, pues, la fórmula general

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\,\text{I} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Aplicándola á los cinco poliedros regulares convexos, se encuentran para la inclinacion I los valores siguientes:

Tetraedro regular	.....	70° 31′ 43″,6,
Exaedro	»	90°,
Octaedro	»	109° 28′ 16″,4,
Dodecaedro	»	116° 35′ 54″,2,
Icosaedro	»	138° 11′ 22″,75.

Los valores que preceden son exactos para el exaedro y el icosaedro, y aproximados para los demás. Los correspondientes al tetraedro y al octaedro son suplementarios, como lo indicaba *à priori* la fórmula.

2.° Sean *a* el lado del polígono dado, *r* su apotema y R su radio. El triángulo OLA da

$$OL = AL \times \cot AOL = \frac{1}{2}\, a \times \cot \frac{\pi}{n}.$$

El triángulo rectángulo SOL da á su vez

$$SO = OL \times \text{tang } OLS;$$

es decir,

$$(1) \qquad r = \frac{1}{2}\, a \times \cot \frac{\pi}{n} \times \text{tang } \frac{1}{2}\, I.$$

El triángulo esférico aol da, finalmente,

$$\cos oa = \cot aol \times \cot oal.$$

Pero

$$\cos oa = \cos OSA = \frac{SO}{SA}.$$

Se tiene, pues,

$$\frac{SA}{SO} = \text{tang } aol \times \text{tang } oal,$$

ó bien

$$\frac{R}{r} = \text{tang } \left(\frac{\pi}{n}\right) \times \text{tang } \left(\frac{\pi}{m}\right);$$

de donde se deduce

$$(2) \qquad R = \frac{1}{2}\, a \times \text{tang } \left(\frac{\pi}{m}\right) . \text{ tang } \frac{1}{2}\, I.$$

Aplicando las fórmulas (1) y (2) á los cinco poliedros regulares convexos, se obtienen los valores siguientes: (*)

Tetraedro regular.. $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$ . . . . . $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Exaedro » .. $r = \dfrac{a}{2}$ . . . . . $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Octaedro » .. $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ . . . . . $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Dodecaedro » .. $r = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$. $R = \dfrac{a\left(\sqrt{3} + \sqrt{15}\right)}{4}$.

Icosaedro » .. $r = \dfrac{a\sqrt{3}\left(3 + \sqrt{5}\right)}{12}$ . . . $R = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}}$.

(*) NOTA 31.

Escolio.

912. En dos poliedros *conjugados*, los números n y m se cambian (**907**); luégo la relacion $\frac{R}{r}$ permanece constante. Luégo si R tiene el mismo valor en dos de estos poliedros, r será tambien el mismo. En otros términos: si dos poliedros conjugados están inscritos en una misma esfera, están tambien circunscritos á una misma esfera y recíprocamente.

POLÍGONOS Y POLIEDROS REGULARES DE ESPECIE SUPERIOR.

913. Hemos hablado ya (**270**) de los nuevos polígonos regulares descubiertos por M. Poinsot, y sabemos que· *hay tantos polígonos regulares diferentes de* m *lados como números primos con* m *haya desde* 1 *hasta* $\frac{1}{2}(m-1)$.

Para precisar más este resultado, consideremos la circunferencia dividida por los puntos A, B, C,..., en m partes iguales. Representemos el arco AB por a y unamos estos puntos de p en p á partir de A.

Si p es primo con m, el menor múltiplo comun del arco pa y la circunferencia entera ma será $p.m.a$; es decir, que no se volverá al punto de partida hasta haber descrito p veces la circunferencia entera, ó m veces el arco $p.a$. Se tendrá, pues, así un polígono estrellado de m lados.

Si m y p tienen un máximo comun divisor θ, el menor múltiplo comun de la circunferencia entera ma y del arco pa es $\frac{mp}{\theta}a$. En tal caso, se vuelve al punto de partida al haber recorrido $\frac{p}{\theta}$ veces la circunferencia ó haber contado $\frac{m}{\theta}$ veces el arco $p.a$; es decir, que se obtiene entónces un polígono estrellado inferior de $\frac{m}{\theta}$ lados.

Por otra parte, si el número entero p (inferior á m) es primo con m, lo será tambien $m-p$. Luégo los números enteros menores que m y primos con él se dividen en dos series, cuyos términos correspondientes dos á dos dan una suma igual á m. Dos términos correspondientes conducen al mismo polígono estrellado de m lados, porque la cuerda del arco pa es la misma que la del arco $(m-p)a$.

914. Los polígonos estrellados que se obtienen siguiendo la marcha indicada, «tienen sus m ángulos y sus m lados bien claros y distin»tos: son los ángulos que forman en los puntos de reunion dos á dos »las m rectas, cuya cadena continua acaba completamente la figu-

»ra. Los otros ángulos, formados por los lados no contiguos al atrave»sarse mutuamente..., no deben ser tomados en cuenta, como no se »toman en cuenta en los polígonos ordinarios los ángulos que forma»rian los lados no contiguos suficientemente prolongados. Bajo este »punto de vista, la diferencia de los polígonos estrellados y los ordina»rios está en que en estos sería preciso prolongar un lado cualquiera y »los no contiguos á él para tener su interseccion, miéntras que en los »estrellados los mismos lados son cortados por los otros dentro de ellos »mismos... Pero todas estas distinciones son más aparentes que reales »y desaparecen completamente en el análisis, en el cual se presentan »unos y otros polígonos de un modo inseparable. En efecto, si se busca »el lado de un polígono regular, se halla una ecuacion de grado supe»rior, cuyas raíces son todas reales, y que da los valores de los lados »de todas las especies de polígonos regulares del órden que se consi»dera.» (POINSOT, *Journal de l'École Polytechnique,* tomo IV, pág. 25.)

915. El órden m de un polígono está marcado por el número m de sus lados ó de sus vértices; su *especie* varía segun el número primo con m que ha servido para su formacion. Si este número es p, será preciso recorrer p veces la circunferencia (**913**) para describir todo el polígono. La especie de un polígono estrellado es, pues, el número de circunferencias recorridas al seguir todos sus vértices, ó el número de veces que las proyecciones de sus lados sobre la circunferencia circunscrita contiene á esta circunferencia. Si la especie de un polígono estrellado es p, la suma de sus ángulos en el centro es igual á p veces 4 ángulos rectos.

916. El órden de un ángulo poliedro, se indica por el número de sus caras. Por lo demás, es de la misma especie que el polígono que se obtiene en la seccion por un plano. Si se considera una pirámide regular que tenga por base un pentágono estrellado (ó de segunda especie), el ángulo poliedro en el vértice es de segunda especie, y los ángulos planos que lo forman, proyectados sobre la base de la pirámide, dan en suma dos veces cuatro ángulos rectos.

917. «... Conservando siempre la definicion general de los polie»dros regulares, ..., se ve la posibilidad de construir nuevos poliedros »regulares, no solo con los nuevos polígonos (regulares)..., sino áun »con los polígonos regulares ordinarios; y para entender bien esto, »debemos empezar por distinguir claramente en un poliedro sus caras, »sus aristas y sus vértices.

»Como un mismo poliedro puede aparecer igualmente construido »con tales ó cuáles polígonos, se toman por *caras* los planos que com-

»pletan enteramente este poliedro con el menor número de ellos.

»Son *aristas* los lados mismos que terminan las caras del poliedro »por las cuales se unen dos á dos estas caras, de suerte que cada arista »es lado comun de dos caras adyacentes, y así el número de aristas es »(siempre) igual á la mitad del número de lados de todas las caras.

»Sólo en estas rectas bien definidas es que se forman los ángulos »diedros del poliedro; los demás diedros que puedan formar los planos »de las caras al atravesarse, no son diedros del poliedro. Del mismo »modo los *vértices* están solamente en los puntos en que se reunen »extremidades de aristas del poliedro; esos vértices lo son tambien de »los ángulos poliedros del poliedro.

»Pues bien, ... se pueden construir nuevos poliedros perfectamente »regulares, ... que tengan todas sus caras regulares iguales, igualmente »inclinadas dos á dos y agrupadas en número igual alrededor de cada »vértice. Pueden ser inscritos y circunscritos á esferas (*) ... La dife»rencia esencial entre estos poliedros y los ordinarios (regulares) está »en que, proyectadas las caras de éstos sobre la esfera inscrita ó cir»cunscrita por medio de radios, los polígonos (esféricos) correspon»dientes cubren sólo una vez la superficie esférica entera, miéntras que »en aquellos los polígonos de que acabamos de hablar cubren ó llenan »la superficie esférica entera una, ó dos, ó tres, etc., veces, y esto de »un modo uniforme; de suerte que la superficie está enteramente du»plicada ó triplicada, etc.» (POINSOT, *Journal de l'École Polytechnique*, tomo IV, pág. 35.) Aquí se ve la gran analogía entre los polígonos estrellados (**915**) y estos nuevos poliedros.

918. El *órden* de un poliedro regular está indicado por el número de sus caras. La *especie* del poliedro es el número de veces que su proyeccion, efectuada sobre la esfera inscrita ó circunscrita (como se acaba de explicar) (**917**), cubre la superficie entera de la esfera.

En los poliedros regulares ordinarios, los ángulos poliedros son tambien de primera especie (**916**); pero en los nuevos poliedros la especie del ángulo poliedro no es siempre la del cuerpo poliedro. Este puede ser de una especie y el ángulo poliedro de otra.

919. Es fácil ver que, prolongados los lados de un polígono regular hasta que se corten, se forma un polígono estrellado del mismo órden que tiene por núcleo el polígono primitivo. Los poliedros regulares de

---

(*) Porque la demostracion del núm. **908** está fundada tan sólo en la igual inclinacion de las caras regulares é iguales del poliedro, y en la identidad de posicion del centro de cada una de ellas con respecto á sus intersecciones con las caras adyacentes.

especie superior se derivan análogamente de los poliedros regulares ordinarios, y prolongando las aristas ó caras de uno de los poliedros regulares ya conocidos, se obtiene (salvo los casos de imposibilidad) un nuevo poliedro regular que tiene por núcleo el poliedro regular ordinario de que hemos partido. Esto ha sido demostrado por Mr. Cauchy *(Journal de l'École Polytechnique*, tomo IX, pág. 68).

Posteriormente, M. J. Bertrand *(Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tomo XLVI) ha referido los nuevos poliedros á los regulares ya conocidos por medio de una demostracion análoga, pero mucho más sencilla. Es la que vamos á exponer.

920. Miraremos primero como evidente que, *dados varios puntos cualesquiera en el espacio, se puede siempre hallar un poliedro* CONVEXO *cuyos vértices sean puntos de los dados y que encierre en su interior á todos los demás, á ménos que sean vértices del poliedro todos los puntos dados.*

Sabemos, por otra parte (**693**), que no puede existir un poliedro convexo que tenga en todos sus vértices más de cinco caras.

TEOREMA.

921. *Dado un poliedro regular* A *de especie cualquiera, existe siempre un poliedro regular convexo* X *que tiene los mismos vértices que el poliedro* A.

Estando los vértices del poliedro regular cualquiera A situados sobre una superficie esférica (**908**), si se construyese un poliedro convexo cuyos vértices fuesen escogidos entre los de A, no podrian los demás de éste quedar encerrados en su interior. Existe, por consiguiente (**920**), un poliedro convexo X que tiene precisamente los mismos vértices que el poliedro regular A. Falta probar que este poliedro convexo X es tambien regular.

Designemos por P la figura formada por el conjunto de los dos poliedros que se consideran, y por Q otra figura idéntica á ella. Puesto que el poliedro A es regular, la coincidencia de las dos figuras podrá obtenerse colocando un vértice cualquiera de Q sobre un vértice determinado de P, y se ve, por tanto, la necesaria igualdad de todos los ángulos poliedros del poliedro convexo X.

Además, estando ya superpuestos dos vértices podrá obtenerse por lo menos de tres modos diferentes la coincidencia de los dos poliedros A que forman parte de P y de Q, y, por consiguiente, la de estas mismas figuras totales, porque los vértices considerados pertenecen á ángulos por lo menos triedros, y sobre una de las caras del primero puede ser colocada una cualquiera de las del segundo. Por consiguiente, los ángulos poliedros correspondientes de los dos poliedros convexos X son

á su vez no sólo iguales, sino susceptibles de coincidir tambien de tres maneras diferentes por lo ménos; y como estos ángulos son triedros, tetraedros ó pentaedros (**695**), habrán de tener necesariamente todas sus caras iguales é igualmente inclinadas. las caras de los dos poliedros X son, pues, polígonos equiángulos é igualmente inclinados; luégo la coincidencia podria lograrse colocando un vértice arbitrario de Q sobre uno determinado de P; ó en otros términos: estas caras son polígonos regulares iguales. Teniendo, pues, el poliedro X todas sus caras regulares iguales, y sus ángulos poliedros tambien iguales, será regular.

TEOREMA.

922. *No existen más que cuatro poliedros regulares de especie superior.*

«En virtud del teorema último, para obtener los poliedros regulares de especie superior será preciso partir de los poliedros regulares convexos (**905**) y proceder del siguiente modo: elegir un vértice de uno de estos poliedros y buscar (si existen) otros vértices que, unidos á él, puedan formar un polígono regular.» (J. Bertrand, *loc. cit.*) Este polígono es entónces una cara posible de un poliedro regular de especie superior que tenga los mismos vértices que el poliedro convexo elegido. Si existe el poliedro de especie superior; el número de polígonos iguales que partan entónces de un mismo vértice es el número de caras de su ángulo poliedro; pero para que así sea, esos polígonos iguales deben poder formar un ángulo poliedro.

«Es claro que, aplicada esta construccion al tetraedro, no da nada.

»Cada vértice del octaedro pertenece á dos cuadrados, que no pueden evidentemente formar las caras de un ángulo poliedro.

»Cada vértice del cubo puede formar con otros dos convenientemente escogidos un triángulo equilátero, y esto de tres maneras distintas; pero estos tres triángulos pertenecen á un tetraedro regular.

»Cada vértice del dodecaedro regular puede formar triángulos equiláteros de tres maneras diferentes con vértices pertenecientes á dos de las caras que en él concurren; pero estos triángulos no forman ángulo poliedro, porque dos de ellos no tienen nunca arista comun.

»Cada vértice del dodecaedro regular puede tambien ser considerado como vértice de seis triángulos equiláteros, cuyos otros dos vértices pertenecen á caras contiguas á aquellas que concurren en el vértice dado. Pero estos seis triángulos equiláteros son las caras de dos tetraedros regulares.

»Cada vértice del dodecaedro es, finalmente, vértice comun de tres pentágonos regulares, cuyos otros cuatro vértices pertenecen al poliedro mismo. Estos tres pentágonos no forman las caras de un ángulo triedro, porque dos de ellos no tienen arista comun; pero los pentá-

»gonos estrellados que tienen esos mismos vértices forman un ángulo »triedro, y su reunion para todo el poliedro forma el dodecaedro regu»lar (de sétima especie).

»Cada vértice del icosaedro es vértice comun de cinco triángulos »equiláteros, cuyos lados son las rectas más cortas que se pueden tra»zar entre los vértices despues de las que forman los lados de las ca»ras. Estos triángulos forman el icosaedro de sétima especie.

»Cada vértice del icosaedro puede ser considerado como vértice co»mun de cinco pentágonos regulares de primera especie, cuyos otros »cuatro vértices pertenecen igualmente al icosaedro; estos pentágonos »son las caras del dodecaedro de tercera especie (de caras convexas). »Finalmente, los mismos vértices pueden ser considerados como per»tenecientes á pentágonos estrellados que forman el dodecaedro de »tercera especie (de caras estrelladas).

»No hay, pues, en definitiva, más que cuatro poliedros estrellados, »que son precisamente los que M. Poinsot ha descubierto.» (J. BERTRAND, *loc. cit.*)

Antes de examinar cada uno de estos nuevos poliedros regulares en particular, busquemos una fórmula que nos permita determinar la especie de cada uno de ellos.

PROBLEMA.

923. *Hallar la especie de un poliedro regular.*

La fórmula de Euler $A + 2 = F + S$, demostrada en el núm. **688**, no es aplicable á todos los poliedros regulares. No subsiste más que para aquellos cuya proyeccion (**917**), hecha sobre una esfera de centro interior al poliedro, cubra exactamente esta superficie esférica sin ninguna duplicacion.

Para generalizar la fórmula de Euler y hacerla aplicable á los nuevos poliedros regulares, es preciso tomar en cuenta la especie del poliedro que se considere (**918**), la especie de sus caras (**915**) (supuestas de la misma especie todas ellas), y, finalmente, la de sus ángulos poliedros (**916**) (supuestos todos de la misma especie). Pues bien, proyectemos el poliedro dado sobre la esfera inscrita ó circunscrita, tomando por centro de proyeccion el de estas esferas (**917**).

Sean n el número de lados de una de las caras del poliedro, φ el número que marca su especie, a el área del polígono esférico correspondiente, s la suma de los ángulos de este polígono. Descompongámosle en triángulos, uniendo por arcos de círculo máximo sus vértices con la proyeccion del centro de la cara que se considera. Tomando por unidades el ángulo recto y el triángulo trirectángulo, el área de uno de los triángulos del polígono será (**847**) $(\alpha - 2)$, representando por α la suma

de los ángulos de dicho triángulo. El área a del polígono esférico, que contiene n de estos triángulos, será $a = \Sigma(\alpha) - 2n$. Pero $\Sigma(\alpha)$ es la suma de los ángulos de los n triángulos, ó la suma s de los ángulos del polígono, aumentada en la suma de los ángulos formados en el vértice comun de los triángulos; esta suma es igual á 4φ, puesto que la especie de la cara proyectada es φ (**916**). Se tiene, pues,

$$a = s + 4\varphi - 2n.$$

Designando por a', a'', ..., s', s'', ..., n', n'', ... las cantidades análogas á a, s, n se tendrá para las demás caras

$$a' = s' + 4\varphi - 2n',$$
$$a'' = s'' + 4\varphi - 2n'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sea E la especie del poliedro ó el número exacto de veces que su proyeccion cubre la superficie esférica, cuya área está aquí representada por 8 (**813**); tendremos

$$a + a' + a'' + \ldots = 8E;$$

ó suponiendo F caras,

$$8E = (s + s' + s'' + \ldots) + 4\varphi.F - 2(n + n' + n'' + \ldots).$$

La suma $(n + n' + n'' + \ldots)$ es evidentemente igual á $2A$, siendo A el número de aristas del poliedro. La suma $(s + s' + s'' + \ldots)$ representa la suma de los ángulos de todos los polígonos esféricos obtenidos. Pero la suma de los ángulos reunidos alrededor de cada uno de los vértices de estos polígonos esféricos (proyecciones de las caras del ángulo poliedro correspondiente) vale σ veces 4 ángulos rectos, siendo σ la especie de los ángulos poliedros (**916**). Se tendrá, pues, si hay S vértices

$$s + s' + s'' + \ldots = 4\sigma S.$$

Por consiguiente, sustituyendo y simplificando, se tiene

$$A + 2E = \sigma S + \varphi F. \qquad (1)$$

Si en esta fórmula se hace $E = \varphi = \sigma = 1$, se tiene la fórmula de Euler.

M. Poinsot (Memoria citada) llegó á la fórmula $A + 2E = F + \sigma S$, porque no tomó en cuenta la especie de la cara del poliedro; esta diferencia explica la diferencia de nombres adoptados para dos de los nuevos poliedros.

La fórmula (1) generalizada completamente para los poliedros no regulares de especie superior, es la siguiente:

$$A + 2E = \Sigma(\varphi . F) + \Sigma(\sigma . S) \quad (*).$$

La primera Σ comprende F términos, y la segunda Σ comprende S términos.

924. *Dodecaedro regular de séptima especie* (Poinsot, cuarta especie). Se obtiene por medio de pentágonos estrellados de segunda especie, que forman ángulos triedros de primera especie alrededor de cada vértice de un dodecaedro regular ordinario (**922**). Este nuevo poliedro *(fig. 500)* tiene, pues, veinte vértices (**907**). Designando por m el número de aristas de uno de sus ángulos poliedros, y por n el número de lados de cada cara, se tiene (**695**)

$$2A = mS \quad \text{y} \quad 2A = nF;$$

de donde se deduce (haciendo $S = 20$, $m = 3$, $n = 5$),

$$A = 30 \quad \text{y} \quad F = 12.$$

La fórmula (1) da, haciendo en ella $\sigma = 1$, $\varphi = 2$, $A = 30$, $F = 12$, $S = 20$,

$$2E = 24 + 20 - 30 \quad \text{ó} \quad E = 7.$$

Este nuevo dodecaedro es, pues, de séptima especie.

925. *Icosaedro regular de séptima especie.*
Se obtiene (**922**) por medio de triángulos equiláteros que forman ángulos pentaedros de segunda especie alrededor de cada vértice de un icosaedro regular ordinario. Este nuevo poliedro *(fig. 501)* tiene, pues, doce vértices (**907**).
Haciendo $S = 12$, $m = 5$, $n = 3$, en las ecuaciones $2A = mS$ y $2A = nF$ se tiene

$$A = 30 \quad \text{y} \quad F = 20.$$

La fórmula (1) da, haciendo $\varphi = 1$ y $\sigma = 2$,

$$2E = 20 + 24 - 30 \quad \text{ó} \quad E = 7.$$

Este nuevo icosaedro es, pues, de séptima especie.

926. *Dodecaedro regular de tercera especie de caras convexas.*
Se obtiene (**922**) por medio de pentágonos regulares ordinarios que

Fig. 500.

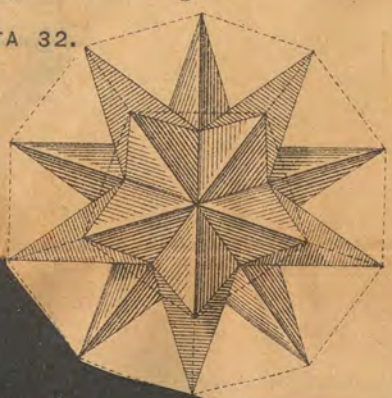
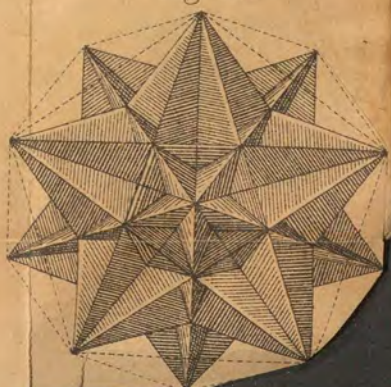


Fig. 501.



(*) NOTA 32.

forman ángulos pentaedros de segunda especie alrededor de cada vértice de un icosaedro regular ordinario. Teniendo este nuevo poliedro doce vértices, las ecuaciones $2A = mS$ y $2A = nF$ dan (para $m = 5$, $n = 5$)

$$A = 30 \quad y \quad F = 12.$$

La fórmula (1) da, para $\varphi = 1$, $\sigma = 2$,

$$2E = 12 + 24 - 30 \quad ó \quad E = 3.$$

Este nuevo dodecaedro de caras convexas es, pues *(fig. 502)*, de tercera especie.

927. *Dodecaedro regular de tercera especie (de caras estrelladas)* (Poinsot, segunda especie).

Se obtiene por medio (**922**) de pentágonos estrellados que forman ángulos pentaedros de primera especie alrededor de cada vértice de un icosaedro regular ordinario. Este nuevo poliedro tiene, pues, doce vértices (**907**). Las ecuaciones $2A = mS$ y $2A = n.F$ dan entónces, para $m = 5$ y $n = 5$,

$$A = 30 \quad y \quad F = 12.$$

La fórmula (1) da, para $\varphi = 2$ y $\sigma = 1$,

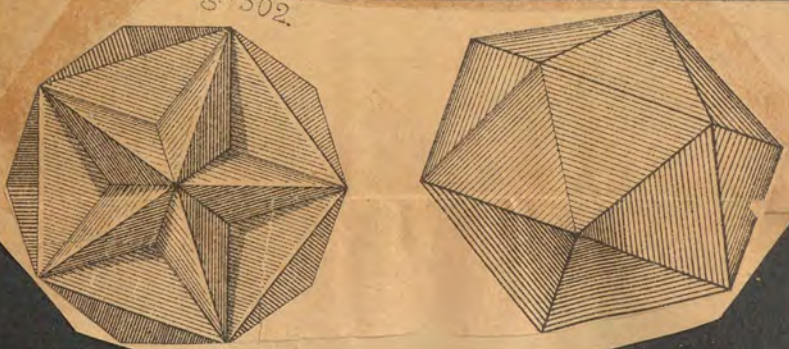
$$2E = 24 + 12 - 30 \quad ó \quad E = 3.$$

Este nuevo dodecaedro de caras estrelladas *(fig. 503)* es, pues, tambien de tercera especie.

928. Hé aquí el cuadro de los elementos de los cuatro nuevos poliedros regulares. Se ve en este cuadro que los nuevos poliedros son *conjugados* dos á dos como los poliedros regulares ordinarios (**907**):

	F	n	φ	S	m	σ	A	E
Dodecaedro regular de séptima especie.	12	5	2	20	3	1	30	7.
Icosaedro regular de séptima especie...	20	3	1	12	5	2	30	7.
Dodecaedro regular de tercera especie de caras convexas.	12	5	1	12	5	2	30	3.
Dodecaedro regular de tercera especie de caras estrelladas.....	12	5	2	12	5	1	30	3.

Fig. 502.



929. Para familiarizar al lector con los nuevos poliedros, terminaremos indicando tambien su modo de construccion, segun Cauchy (**919**), porque hace imágen mejor que el adoptado en el núm. **922**.

«Prolongando en el dodecaedro ordinario las aristas que forman los »lados de los doce pentágonos, se obtiene el dodecaedro estrellado (de »tercera especie).

»Si en el dodecaedro ordinario se prolonga el plano de cada cara »hasta su interseccion con los planos de las cinco caras que rodean á su »opuesta, se obtendrá el dodecaedro de tercera especie, limitado como »el ordinario por pentágonos de primera especie.

»Finalmente, si se prolongan las aristas que en este dodecaedro de »tercera especie forman los lados de los doce pentágonos, se obtendrá »el dodecaedro de sétima especie.

»Se obtendrá el icosaedro de sétima especie prolongando cada cara »del icosaedro ordinario hasta su encuentro con los planos de los tres »triángulos que rodean á su opuesta.»

FIGURAS HOMOTÉTICAS EN EL ESPACIO.

930. Dado un sistema de puntos A, B, C,..., situados de un modo cualquiera en el espacio *(figuras 225 y 226)*, si sobre los radios SA, SB, SC,..., que parten de un punto arbitrario S, se toman, á partir de este punto, segmentos SA′, SB′, SC′,..., tales que

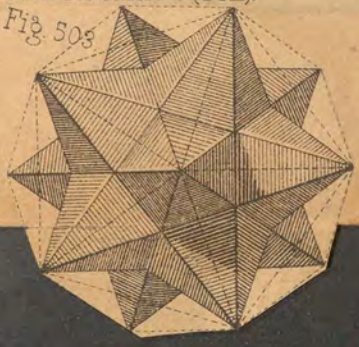
$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \ldots = K,$$

siendo K un número cualquiera, se dice que el nuevo sistema de puntos A′, B′, C′,... es *homotético* del primitivo sistema A, B, C,... Los puntos homólogos tales como A y A′, estarán situados á un mismo lado del S (centro de homotecia) ó á diferente lado, segun que la *relacion* K *de homotecia* sea positiva ó negativa, y se dice que los dos sistemas ABC,..., A′B′C′,..., son *homotéticos directos* ó *inversos*.

La definicion de homotecia es, pues, la misma para las figuras del espacio que para las planas (**362**). Aquí no se puede decir, sin embargo, como en el plano, que la homotecia inversa dé las mismas figuras que la directa (haciendo abstraccion de la posicion); porque si F es una figura cualquiera en el espacio y se construye su homotética directa F′ por la relacion K, y su homotética inversa F por la relacion — K, las dos figuras F y F_1 serán simétricas con respecto al punto S (**658**).

Y tales figuras en el espacio no pueden hacerse coincidir (**673**), miéntras que en el plano se llegaría á la coincidencia por un giro de 180° alrededor del centro S (**362**).

Fig. 503



931. *La figura homotética de una esfera, es una esfera.* La demostracion es la misma del núm. **363.** Y pudiendo ser considerado un círculo como la interseccion de dos esferas en el espacio, *la figura homotética de una circunferencia con relacion á un punto cualquiera* S *en el espacio es una circunferencia.*

932. El teorema del núm. **364** y su demostracion subsisten. *La figura homotética de una recta es una recta paralela á ella, y el ángulo de dos rectas es igual al de sus rectas homólogas* (**365, 366**).

La figura homotética de un plano, es un plano paralelo á él; porque si se considera en el plano dado una recta que gire alrededor de uno de sus puntos A, cada una de sus posiciones tendrá por homotética una paralela á ella que pase por el punto A' homotético de A. De aquí resulta: 1.°, *que un plano que pase por el centro de homotecias es homotético de sí mismo;* 2.°, *que el ángulo de dos planos es igual al de sus homotéticos.*

Las tangentes á dos curvas homotéticas en dos puntos homólogos, son paralelas como límites de secantes paralelas. Por consiguiente (**883**), *los planos tangentes á dos superficies homotéticas en dos puntos homólogos son paralelos.*

933. *Serán homotéticos dos sistemas si existen en el espacio dos puntos* O *y* O' *tales que las rectas que unan el punto* O *con los del primer sistema sean paralelas y proporcionales á las rectas de union del punto* O' *con los del segundo.* La demostracion es la misma dada en el núm. **368.**

De aquí resulta que *dos esferas cualesquiera son á la vez homotéticas directas é inversas* (**370**); los dos centros de homotecia dividen armónicamente la línea de los centros de las dos esferas; estos centros son además los vértices de los dos conos que se pueden circunscribir á las dos esferas. Cuando las dos esferas son tangentes, su punto de contacto es un centro de homotecia *directa* si el contacto es *interior; inversa* si el contacto es *exterior.*

934. El teorema del núm. **371** y su demostracion subsisten. Así, *dos sistemas homotéticos de un tercero son homotéticos entre sí, y los tres centros de homotecia están en línea recta,* que se llama *eje de homotecia de los tres sistemas.*

Tres esferas consideradas dos á dos, tienen tres centros de homotecia directa y tres de homotecia inversa (**933**). Tienen pues, cuatro ejes de homotecia: un *eje de homotecia directa* que contiene los tres centros de homotecia directa, y tres *ejes de homotecia inversa,* cada uno de los cuales pasa por dos centros de homotecia inversa, y el centro directo que corresponde al tercer centro inverso. Estos *cuatro ejes de homotecia* son los de los tres círculos (**374**) máximos que se obtienen cortando las tres esferas por el plano que pasa por sus centros.

935. *Cuando cuatro sistemas* P, P′, P″, P‴ *son homotéticos dos á dos, sus seis centros de homotecia están situados en un mismo plano.*

En efecto, sean O_1, O_2, O_3 los centros respectivos de homotecia de P y P′, P y P″, P y P‴; el plano $O_1O_2O_3$ es homólogo de sí mismo en la homotecia de los sistemas P y P′, puesto que pasa por el centro O_1; y tambien es homólogo de sí mismo atendiendo á los sistemas P y P″ por contener el centro O_2 de homotecia de éstos; luégo es homólogo de sí mismo en la homotecia de P′ y P″ (**934**), y, por tanto, contendrá este centro de homotecia. Lo mismo se probaria que el plano $O_1O_2O_3$ pasa por los centros de homotecia de P′ y P‴, y de P″ y P‴.

Estos seis centros de homotecia son los vértices de un cuadrilátero completo, cuyos lados son los cuatro ejes de homotecia de los cuatro sistemas tomados tres á tres. El plano de este cuadrilátero recibe el nombre de *plano de homotecia* de los cuatro sistemas P, P′, P″, P‴.

936. Consideremos en particular el *caso de cuatro esferas.* Como dos esferas son á la vez homotéticas directas é inversas, se tendrán *doce centros de homotecia, seis directos y seis inversos.* Es fácil ver que hay *ocho planos de homotecia.* Imaginemos, en efecto, el tetraedro cuyos vértices son los centros de las cuatro esferas; en cada una de las caras de este tetraedro hay seis centros de homotecia, tres directos y tres inversos (**934**). Sea O uno de los seis centros que están en una cara; este punto O pertenece á dos rectas A y B, cada una de las cuales pasa por otros dos centros de la misma cara. Por otra parte, ese mismo punto O está tambien en otra cara del tetraedro y pertenece, por consiguiente, á otras dos rectas C y D situadas en esta segunda cara. Combinando las dos rectas A y B de la primera cara con las dos rectas C y D de la segunda, se obtienen cuatro planos AOC, AOD, BOC y BOD. Cada uno de estos planos pasa por cinco centros; luégo contendrá necesariamente el sexto centro correspondiente. Así, por cada centro O de una cara pasan cuatro planos de homotecia. Pero cada uno de ellos es comun á tres centros de esta cara; luégo el número total de planos de homotecia es *ocho.*

937. Se dicen *semejantes* dos figuras del espacio cuando se puede hacer coincidir la segunda con una de las homotéticas directas de la primera. Pero se sabe (**934**) que para tener todos los sistemas homotéticos de uno dado no es necesario hacer variar el centro; basta hacer variar K de 0 á ∞ (**372**) para un centro arbitrario. Luégo se obtendrán todas las figuras semejantes á una dada construyendo con un centro cualquiera las homotéticas de ella que corresponde á todos los valores de la relacion K desde cero hasta infinito.

Así, *dos esferas cualesquiera son semejantes* (**931**).

La única figura semejante á una cónica es ella misma, porque si se

escoge su vértice O como centro de homotecia, el homólogo A′ de un punto cualquiera A de la superficie cónica está situado en la misma generatriz OA (**365**).

Finalmente, *dos superficies cilíndricas son homotéticas cuando sus generatrices son paralelas y sus directrices dos curvas homotéticas*, porque la figura homotética de una recta es una paralela á ella; por consiguiente, *las secciones por un mismo plano de dos cilíndricas homotéticas son dos curvas homotéticas*, cuyo centro de homotecia es la interseccion del plano secante con la paralela á las generatrices trazada por el centro de homotecia de los dos cilindros (**369**).

FIGURAS HOMOLÓGICAS EN EL ESPACIO.

938. La definicion dada en el núm. **732** para las figuras planas, se hace aplicable á las del espacio reemplazando la recta fija X por un plano fijo.

Así, *dados un punto fijo* O *y un plano fijo* Q, *si sobre cada radio* Oμ *que une el punto fijo* O *con uno cualquiera* μ *del plano* Q *se toman dos puntos* m *y* m′ *tales que la relacion anarmónica* (Oμmm′) *tenga un valor constante* λ, *los puntos* m *y* m′ *engendran figuras* F *y* F′ *que se llaman* HOMOLÓGICAS.

O es el *centro* de homología, Q el *plano* de homología y λ el *coeficiente* de homología.

El punto O es su propio homólogo, y de la misma propiedad gozan todos los puntos del plano Q.

En vez de dar la constante λ, puede darse un primer par (a, a') de puntos homólogos. Entónces, para obtener el homólogo de un punto cualquiera m de la primera figura F, basta hallar la interseccion m' del radio Om con la recta $a'\varepsilon$ que une el punto a' con el punto ε en que le recta am corta al plano de homología. Este trazado es la generalizacion del que se indicó en el núm. **729**, y por las consideraciones expuestas en el núm. **732** equivale á la definicion dada ántes.

939. Las secciones hechas en las figuras F y F′ por un plano cualquiera R que pase por el centro de homología, son evidentemente dos figuras homológicas planas, cuyo centro de homología es O y cuyo eje de homología es la interseccion de los planos Q y R. El coeficiente es λ.

Segun esto, á una recta cualquiera de la figura F corresponde en la F′ una recta que se corta con la primera en el plano de homología. Toda recta que pase por O, es homóloga de sí misma.

A todo plano P de la figura F corresponde en la F′ un plano que se corta con el primero en el plano de homología. En efecto, sean Δ la interseccion del plano P con el de homología Q; a un punto fijo del

plano P y a' su homólogo; el homólogo m' de un punto cualquiera m del plano P, pertenece á la recta homóloga de am; pero el punto α en que am corta á Δ es homólogo de sí mismo, y, por tanto, la recta $am\alpha$ tiene por homóloga $\alpha a'$; el punto m' está, por consiguiente, en el plano determinado por el punto a' y la recta Δ. Todo plano que pasa por el centro de homología, es homólogo de sí mismo. Si un plano es paralelo al de homología, su homólogo tambien lo es; por consiguiente, si una figura F está situada en un plano paralelo al de homología, su homóloga F' es semejante á ella.

940. En dos figuras homológicas, la relacion anarmónica de cuatro puntos en línea recta es igual á la relacion anarmónica de sus cuatro homólogos.

Lo mismo sucede con un haz plano de cuatro rectas y el haz correspondiente, y con el haz de cuatro planos que pasan por una misma recta y el haz formado por sus homólogos.

El primer principio es evidente por lo dicho en el número anterior; los otros dos se deducen inmediatamente.

941. Cuando un punto m' de la figura F' está en el infinito, la igualdad

$$(O\mu mm') = \lambda$$

se reduce á

$$\frac{mO}{m\mu} = \lambda;$$

luégo todos los puntos en el infinito de la figura F' tienen sus homólogos situados en un plano U paralelo al de homología; este plano se llama el plano *límite* de la figura F.

Así se generaliza la nocion adquirida (**588**) sobre los puntos en el infinito en un plano. Puesto que todos los puntos en el infinito en el espacio tienen sus homólogos situados en un plano, y que la figura homóloga de un plano es otro plano, *se deben considerar todos los puntos en el infinito en el espacio como situados en un mismo plano,* que se llama *plano en el infinito;* este plano contiene las rectas en el infinito de todos los planos del espacio.

Volvamos á las figuras homológicas. La figura F' tiene tambien su plano límite V', que corresponde á los puntos en el infinito de la figura F, y se ve, como en el núm. **732**, que la relacion de las distancias del plano límite U al centro O y al plano Q de la homología es igual á λ, miéntras que esta relacion es igual á $\frac{1}{\lambda}$ para el plano límite V'.

Dados una figura F, su plano límite U, así como el centro O y el

plano Q de la homología, se obtiene el homólogo m' de un punto cualquiera m de la figura F del modo siguiente: siendo p y q los puntos en que una recta trazada por m corta á los planos U y Q, se traza por el punto q la paralela al radio Op y se toma la interseccion m' de esta recta (homóloga de pmq) con el radio Om.

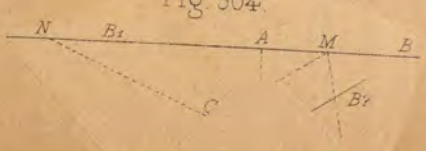
942. Para $\lambda = -1$, la homología se llama *armónica;* los dos planos límites se confunden con el plano equidistante del centro y del plano de homología.

Cuando el plano de homología está en el infinito, la homología se convierte en *homotecia.* Si además la homología es entónces armónica, se presenta la *simetría con respecto á un centro.*

Cuando el centro de homología está en el infinito, la homología se convierte en *afinidad;* la segunda figura se deduce de la primera, ampliando en una relacion constante sus ordenadas normales ú oblicuas con relacion al plano de homología. Si además la homología es entónces armónica, se tiene la *simetría* (normal ú oblicua) con *relacion á un plano.*

943. Mostraremos más tarde los recursos que ofrece á la Geometría pura la transformacion homológica. Nos limitaremos á indicar aquí una de las más interesantes aplicaciones prácticas de esta teoría: *la construccion de bajo-relieves;* es decir, de esas figuras que forman un pequeño saliente sobre el muro de un edificio, y por medio de las cuales se representa un asunto ó una escena cualquiera. El bajo relieve F y la escena F′ que representa son dos figuras homológicas. Sea O el punto de vista que está delante del muro, miéntras que la figura F′ se supone detrás; designemos por a' el punto de F′ más próximo al muro, y por P′ el plano trazado paralelamente al de fachada por el punto más distante de ésta. Se toma el centro O como centro de homología, el plano P del muro como plano homólogo de P′ y se da arbitrariamente un poco delante del muro el punto a que se quiere hacer corresponder al punto a', y que será el punto más saliente del bajo relieve. Estos datos, es decir, el centro de homología O, un par (a, a') de puntos homólogos y un par (P, P′) de planos homólogos, bastan evidentemente para determinar la figura F homóloga de F′. Siendo m' un punto cualquiera de F′, se toma la interseccion b' de la recta $a'm'$ con el plano P′; el radio Ob' da, por su interseccion con el plano P, el punto b homólogo de b'; por consiguiente, la interseccion m de ab con el radio Om' es el punto m del bajo-relieve que corresponde al punto m' de la figura que se quiere representar. Tambien se podria empezar por determinar en vista de los datos el plano de homología, y operar despues por medio del plano y del centro de homología, y el par (a, a').

Fig. 504.



POLO Y PLANO POLAR CON RELACION Á LA ESFERA.

944. *Estando situados en el espacio de un modo cualquiera un punto* O *y una esfera* C *(figuras 216 y 217, núm.* **346***), si por el punto* O *se traza una secante cualquiera* OFE *y se determina el conjugado armónico* I *del punto* O *con relacion á* EF, *el lugar geométrico de los puntos* I, *cuando la secante gira alrededor del punto* O, *es un plano* P *perpendicular al diámetro* AB *que pasa por el punto* O; porque en cada plano trazado por OC, el lugar es una recta (**346**) perpendicular al diámetro AB y trazada por el punto H, conjugado armónico de O con relacion á este diámetro.

Se dice que el punto O es el *polo* del plano P, y que el plano P es el *plano polar* del punto O con relacion á la esfera C.

El plano polar P *de un punto* O *es*, evidentemente, *el lugar de las polares del punto* O *con relacion á todos los círculos de la esfera cuyos planos pasan por* O.

El radio de la esfera es medio proporcional entre las distancias del centro al polo y al plano polar. La discusion de las posiciones del polo y del plano polar con relacion á la esfera, es la misma que en el número **347**. Notemos tan solo que, *cuando el polo es exterior á la esfera, el plano polar es el de la circunferencia de contacto con el cono circunscrito á la esfera, cuyo vértice es el polo.*

945. *Los planos polares de todos los puntos de un plano, pasan por el polo de este plano;* é inversamente, *los polos de todos los planos que pasan por un mismo punto, están sobre el plano polar de este punto.* Puede repetirse la demostracion del núm. **348**; ahora XY *(fig. 218)* representa la proyeccion sobre el plano que se considera de la recta CO que une un punto cualquiera O de este plano con el centro C de la esfera.

De aquí resulta que *si se toma cada uno de los puntos de un plano* P *como vértice de un cono circunscrito á la esfera, los planos de los círculos de contacto pasan todos por un mismo punto* p, *que es polo del plano* P; é inversamente, *si se circunscriben á la esfera conos cuyos círculos de contacto tengan sus planos pasando todos por un mismo punto* p, *los vértices de esos conos estarán todos situados en un mismo plano* P, *que es el plano polar del punto* p.

946. Sean una esfera, cuyo centro es O *(fig. 504)*, y AB una recta cualquiera. Tomemos el polo A′ de AB con relacion al círculo máximo ECFD situado en el plano AOB, y levantemos por el punto A′ la perpendicular A′B′ á este plano AOB; se vé que, recíprocamente, la recta AB es la perpendicular al plano OA′B′, levantada por el polo A de A′B′ con relacion al círculo máximo EIFK situado en el plano OA′B′. Las dos

rectas recíprocas AB y A'B' han recibido por esto el nombre de *rectas recíprocas* con relacion á la esfera O.

Cuando dos rectas son recíprocas con relacion á una esfera, cada una de ellas es el lugar de los polos de todos los planos que pasan por la otra; ó en otros términos: *cada una de ellas es la comun interseccion de los planos polares de los diversos puntos de la otra.*

En efecto, el plano polar de un punto cualquiera M de AB es perpendicular al plano FCE, y su traza sobre este plano es la polar del punto M con relacion al círculo FCE. Esta traza pasa, pues (**348**), por el punto A', que es el polo de AB con relacion al círculo FCE. Por consiguiente, el plano polar CID del punto M contiene la recta A'D'.

De aquí resulta que, *cuando dos planos son tangentes á la esfera, su interseccion es recíproca de la recta que une los dos puntos de contacto,* porque estos puntos de contacto son los polos de los planos tangentes.

Nótese, finalmente, que *la recta* AB *es el lugar de los polos de su recíproca* A'B' *con relacion á todos los círculos cuyos planos pasan por* A'B'. En efecto, siendo A' el polo de la recta AB con relacion al círculo FCE, si N es el punto en que la recta AB corta al diámetro CD de un círculo cualquiera CID que pase por A'B', los puntos C, A', D, N forman un sistema armónico; luégo N es el polo de A'B' con relacion al círculo CID.

PLANO RADICAL DE DOS ESFERAS.

947. Si por un punto M del espacio se traza una secante arbitraria que corte á una esfera O en A y B, el producto MA.MB tiene un valor independiente de la direccion de la secante. Este producto constante recibe el nombre de *potencia del punto* M *con respecto á la esfera* O: es positivo, cero ó negativo, segun que el punto M sea exterior á la superficie esférica, esté situado en ella ó le sea interior.

La potencia de un punto con respecto á una esfera, es igual en magnitud y signo al exceso del cuadrado de su distancia al centro sobre el cuadrado del radio (**378**).

Cuando el punto es exterior á la esfera, su potencia es igual al cuadrado de la tangente trazada por este punto á la esfera.

Cuando dos esferas se cortan ortogonalmente, el cuadrado del radio de cada una de ellas es igual á la potencia de su centro con respecto á la otra esfera (**379**).

948. *El lugar de los puntos de igual potencia con respecto á dos esferas, es un plano perpendicular á la línea de los centros* (**380**).

Este plano se llama *plano radical* de las dos esferas. *Cuando dos esferas se cortan, su plano radical es el del círculo comun;* si son tangentes, su plano radical es el plano tangente en el punto comun.

El plano radical de dos esferas concéntricas está en el infinito.

El plano radical de dos esferas, es el lugar de los puntos desde los cuales pueden trazarse á ellas tangentes iguales (**381**). *Tambien puede decirse que es el lugar de los centros de las esferas que cortan ortogonalmente á las dos primeras* (**382**).

949. *Los planos radicales de tres esferas consideradas dos á dos, pasan por una misma recta* (**383**). Esta recta es la perpendicular al plano de los centros, levantada por el centro radical de los tres círculos máximos contenidos en este plano; esa recta se llama *eje radical* de las tres esferas.

Cuando los centros de las tres esferas están en línea recta, el eje radical está en el infinito; puede suceder, sin embargo, que los tres planos radicales coincidan, en cuyo caso las tres esferas tienen un *plano radical*, y no un eje radical.

950. Finalmente, *los seis planos radicales de cuatro esferas consideradas dos á dos, pasan por un mismo punto.* Porque el punto en que el eje radical de las tres primeras esferas corta al plano radical de una de ellas con la cuarta es de igual potencia con respecto á las cuatro esferas, y es, por consiguiente, comun á los seis planos radicales de las esferas consideradas dos á dos, y tambien punto comun á los cuatro *ejes radicales* de las esferas consideradas tres á tres. Este punto se llama *centro radical* de las cuatro esferas. Es único, á ménos que los centros de las cuatro esferas estén en un mismo plano, en cuyo caso puede suceder que el centro radical esté en el infinito, ó bien se convierta en un eje radical, y áun en un plano radical, si los centros de las cuatro esferas están en línea recta.

951. Las propiedades de los números **387** y **388** subsisten aquí y pueden repetirse las mismas demostraciones. Así:

Los planos tangentes en dos puntos antihomólogos de dos esferas, se cortan segun una recta situada en el plano radical de las dos esferas.

El plano radical de dos esferas está equidistante de los dos planos polares correspondientes á uno cualquiera de los centros de semejanza.

ESFERA TANGENTE Á CUATRO ESFERAS DADAS.

952. Designemos por A, B, C, D los centros de las cuatro esferas dadas, y tratemos de determinar la esfera ω, que envuelve á las dadas A, B, C, D y la esfera ω' envuelta por esas mismas esferas (**389**).

Supongamos resuelto el problema, y sean a y a' los puntos de contacto de las esferas ω y ω' con A; b y b' sus puntos de contacto con B;

c y c' con la esfera C; d y d' con D. El problema se reduce á hallar las cuerdas aa', bb', cc', dd'. Estas se determinan por las dos propiedades siguientes:

1.ª *Cada una de las cuerdas* aa', bb', cc', dd' *pasa por el centro radical de las cuatro esferas dadas* A, B, C, D. En efecto, siendo a el centro de semejanza directa de las esferas ω y A, y a' el de semejanza inversa de las esferas ω' y A, la cuerda aa' debe pasar por el centro de semejanza inversa S de las esferas ω y ω' (**934**). Del mismo modo se veria que este punto S pertenece tambien á las cuerdas bb', cc' y dd'. Un razonamiento análogo muestra que ab y $a'b'$ concurren en el centro de semejanza directa C' de las esferas A y B; luégo las cuerdas aa' y bb' de las esferas A y B son antihomólogas (**351**), y su punto de interseccion S pertenece al plano radical de las esferas A y B. Del mismo modo se veria que este punto de concurso S de aa', bb', cc', dd' pertenece á cada uno de los planos radicales de las esferas consideradas dos á dos; luégo es el centro radical de estas esferas (**950**).

2.ª *Cada una de las cuerdas* aa', bb', cc', dd' *contiene el polo con relacion á su esfera del plano de semejanza directa de las cuatro esferas dadas.* En efecto, puesto que S es un centro de semejanza de las esferas ω y ω', las dos cuerdas ab y $a'b'$ son antihomólogas y su punto de concurso C' debe estar situado en el plano radical de las dos esferas ω y ω'. Del mismo modo se veria que este plano radical pasa por cada uno de los centros de semejanza directa de las cuatro esferas dadas consideradas dos á dos. Luégo el plano radical de las esferas ω y ω' coincide con el plano de semejanza directa (**935, 936**) de las esferas A, B, C, D. Este plano debe contener, segun esto, la interseccion de los dos planos tangentes á la esfera A en los dos puntos antihomólogos a y a' (**951**); es decir, la recta recíproca de la cuerda aa' con relacion á la esfera A (**946**); luégo, inversamente, la cuerda aa' debe contener el polo p con relacion á la esfera A del plano de semejanza que consideramos.

De aquí la regla siguiente: *Determínese el centro radical* S *y el plano de semejanza directa de las cuatro esferas dadas* A, B, C, D; *tómense, con relacion á cada una de estas, los polos* p, q, r, s *de este plano, y trácense las rectas* Sp, Sq, Sr, Ss, *que cortarán á las esferas* A, B, C, D *en los puntos de contacto* a *y* a', b *y* b', c *y* c', d *y* d': *sólo faltará entónces hacer pasar una esfera* ω *por los cuatro puntos* a, b, c, d, *y otra esfera* ω' *por los cuatro puntos* a', b', c', d'.

Reemplazando el plano de semejanza directa por cada uno de los otros siete planos de semejanza (**936**), se obtendrian los otros siete pares de esferas tangentes. El problema admite, pues, diez y seis soluciones.

La construccion dicha se aplica á todos los casos particulares que

se quieran considerar, suponiendo que una ó varias de las esferas A, B, C, D se reducen á puntos ó á planos.

953. Supongamos que la esfera D varíe, permaneciendo fijas las tres esferas A, B, C. El punto S, centro radical de las cuatro esferas (**952**), variará describiendo el eje radical de las tres esferas A, B, C. El plano de semejanza directa de las cuatro esferas gira entónces alrededor del eje de semejanza directa de las tres esferas A, B, C; por consiguiente, el punto p describe la recta recíproca de este eje de semejanza (**946**), recta que es perpendicular al plano de los centros de las tres esferas A, B, C. La recta Sp se apoya, pues, constantemente sobre dos rectas perpendiculares al plano de los centros de las esferas A, B, C, y el punto a no sale del plano determinado por estas perpendiculares. El lugar de los puntos a es, pues, la circunferencia de interseccion de este plano con la esfera A.

Se llega, pues, á este notable teorema debido á Dupuis:

Cuando una esfera variable ω *toca constantemente del mismo modo á tres fijas* A, B, C, *cada uno de los tres puntos de contacto describe un círculo menor de la esfera fija correspondiente.*

954. Los autores que se han ocupado de la construccion dada en el núm. **952** (Gaultier (de Torus) *Journal de l'École Polytechnique*, tomo IX; Heegmann, *Mémoires de l'Académie de Lille*, 1823; J.-A. Serret (*) *Journal de Crelle*, tomo XXXVII, etc., etc.),—han fundado su demostracion en el teorema de Dupuis. En vez de seguir esta marcha, que no guarda analogía con la del problema correspondiente de Geometría plana (**389**), hemos preferido conservar esta analogía y tratar directamente la cuestion sin el auxilio del teorema de Dupuis, que no es entónces más que un corolario inmediato de la solucion hallada. Además, el razonamiento gana en sencillez.

ESFERA TANGENTE Á CUATRO PLANOS DADOS.

955. Esta cuestion no es más que un caso particular de la anterior; pero por su importancia es útil tratarla directamente.

Supongamos que los cuatro planos propuestos formen un tetraedro ABCD *(fig. 505)* y veamos cuántas esferas puede haber tangentes á las cuatro caras de este tetraedro prolongadas indefinidamente; es decir, cuántos puntos equidistantes de estos cuatro planos.

El lugar de los puntos equidistantes de los planos ABC y ABD, es el

(*) Puede, el lector que esté versado en la Geometría analítica, ver el elegante é instructivo análisis de M. J.-A. Serret.

sistema de los dos planos bisectores α y α' de los ángulos diedros DABC, DABH, formados por estas caras. Del mismo modo, el lugar de los puntos equidistantes de las dos caras ABC, ACD es el sistema de los planos bisectores β y β' de los diedros que forman dichas caras. Los dos planos β y β' cortan á los dos planos α y α' segun cuatro rectas que parten del punto A. Una de ellas AO_1, interseccion de los planos α y β, cae en el interior del tetraedro ABCD; las otras tres caen fuera. La interseccion AO_2 de los planos α y β' atraviesa al plano BCD en la region EDCF: la interseccion AO_3 de los planos bisectores α' y β lo atraviesa en la region HBDK; y, finalmente, la interseccion AO_4 de los α', β' corta al plano BCD en la parte GBCP.

Las cuatro rectas AO_1, AO_2, AO_3, AO_4 son el lugar de los puntos del espacio equidistantes de las tres caras ABC, ABD, ACD, y, por tanto, los planos bisectores de los diedros que forman las caras ABD, ACD, pasan por estas rectas. Los centros de las esferas tangentes á los cuatro planos no pueden, pues, hallarse más que en las cuatro rectas determinadas. Pero esos centros deben tambien pertenecer á los dos planos bisectores γ y γ' de los diedros formados por las caras ABC y BCD prolongadas; y como un plano y una recta no pueden tener más que un punto comun, no puede haber más de ocho puntos de interseccion de las cuatro rectas AO_1, AO_2, AO_3, AO_4, con los dos planos γ y γ'. Además, estando los puntos que así determinemos á igual distancia de las cuatro caras del tetraedro ABCD, quedarán situados en los planos bisectores de los otros diedros de la base. No pueden existir, por consiguiente, más de *ocho* esferas tangentes á los cuatro planos dados. Veamos cómo están colocadas.

La esfera tangente interiormente ó *inscrita* en el tetraedro existe siempre, porque el plano γ forma un ángulo agudo con el BCD en el sentido CD, y corta necesariamente á la recta AO_1 en el interior del tetraedro.

Las cuatro esferas tangentes exteriormente á una de las caras del tetraedro y á las prolongaciones de las otras tres, ó esferas *ex-inscritas*, existen tambien siempre, porque el plano γ' corta necesariamente á la recta AO_1 por debajo del plano BCD en el interior de la especie de tronco de pirámide abierta que forma este plano con las prolongaciones de las otras tres caras del tetraedro. Del mismo modo, si δ y δ' son los planos bisectores de los diedros formados en la arista CD, el plano exterior δ' corta á AO_2 en un punto comprendido entre A y O_2, y da el centro de la esfera ex-inscrita que toca á la cara ACD. Si ε y ε' son los planos bisectores de los diedros formados en BD, el plano ε' corta á AO_3 en el centro de la esfera ex-inscrita que descansa en la cara ABD. Finalmente, el plano γ' corta á AO_4 en el centro de la esfera ex-inscrita que se apoya en la cara ABC.

Fig. 505.

Nos falta considerar las esferas tangentes á los planos en las prolongaciones de las caras del tetraedro. Estas esferas no pueden quedar encerradas sino en las especies de huecos prismáticos que descansan en las aristas del tetraedro. Consideremos los dos espacios MCFNDE y GBHD'AC' limitados en las dos aristas opuestas CD y AB. El plano bisector δ cortará á AO_2 por debajo del plano BCD ó del otro lado del punto A, quedando por debajo de D'AC'. Luégo si existe una esfera tangente en uno de los huecos que correspondan á aristas opuestas del tetraedro, no podrá haberla en el otro. Por consiguiente, los seis huecos prismáticos que descansan en las seis aristas no pueden dar más que tres esferas tangentes. Se tiene, pues, el número total de ocho esferas tangentes que ya se habia indicado.

Las tres últimas no siempre existirán, porque puede suceder que el plano δ, por ejemplo, sea paralelo á la recta AO_2; entónces el centro de esta esfera se aleja al infinito y ella desaparece.

Sean a, b, c, d las áreas de las caras del tetraedro ABCD opuestas á los vértices A, B, C, D, y sea V su volúmen. Sean r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 el radio de la esfera inscrita y los de las ex-inscritas tangentes á las caras b, c, d, a. Unamos el centro de cada una de ellas con los vértices del tetraedro, y expresemos el volúmen de este tetraedro en funcion de los volúmenes de los cuatro tetraedros obtenidos. Estos tetraedros son todos aditivos para la esfera inscrita; y para cada esfera ex-inscrita, el que descansa sobre la cara á la cual es tangente se hace sustractivo, quedando aditivos los otros. Se tiene, pues,

$$V = \frac{1}{3} r_1 (a + b + c + d), \quad V = \frac{1}{3} r_2 . (a + c + d - b) \ldots;$$

de donde se deduce

$$r_1 = \frac{3V}{a + b + c + d}, \quad r_2 = \frac{3V}{a + c + d - b}, \quad r_3 = \frac{3V}{a + b + d - c},$$

$$r_4 = \frac{3V}{a + b + c - d}, \quad r_5 = \frac{3V}{d + b + c - a}.$$

Todos estos valores positivos y finitos, puesto que cada cara del tetraedro es menor que la suma de las otras tres, prueban nuevamente la existencia cierta de las cinco primeras esferas tangentes. Se pasa del valor de r á uno cualquiera de los otros cambiando el signo de la cara sobre la cual se apoya la esfera ex-inscrita cuyo radio se busca, porque el centro de cada una de estas esferas está á diferente lado que el centro de la esfera inscrita, con relacion á la cara de contacto, y hácia el mismo lado con relacion á las otras tres caras.

Sean ρ_1, ρ_2, ρ_3 los radios de las tres últimas esferas. El centro de una de ellas, comparado con el de la esfera inscrita, queda á un mismo lado con relacion á dos de las caras del tetraedro y á diferente lado con relacion á las otras dos. Si la esfera que se considera está en el espacio MDFNDE, se tendrá

$$V = \frac{1}{3}\rho_1[(c+d)-(a+b)];$$

si está en el opuesto GBHD'AC', se tendrá

$$V = \frac{1}{3}\rho_1[(a+b)-(c+d)].$$

Del mismo modo, si se trata de la esfera situada en el espacio LBHNDK, ó en su opuesto PCFB'AD', se tendrá

$$V = \frac{1}{3}\rho_2[(b+d)-(a+c)], \text{ ó } V = \frac{1}{3}\rho_2[(a+c)-(b+d)].$$

Finalmente, para la esfera situada en el espacio MCPLBG, ó en su opuesto EDKB'AC', se tendrá

$$V = \frac{1}{3}\rho_3[(b+c)-(a+d)], \text{ ó } V = \frac{1}{3}\rho_3[(a+d)-(b+c)].$$

Será fácil decidir los que convienen de estos valores; porque si se supone que las cuatro caras del tetraedro, colocadas por órden de magnitud, dan la serie a, b, c, d, se tendrá

$$a+b > c+d,\ a+c > b+d;$$

es decir, que los radios de las dos primeras esferas tendrán los valores finitos y positivos

$$\rho_1 = \frac{3V}{(a+b)-(c+d)},\quad \rho_2 = \frac{3V}{(a+c)-(b+d)}.$$

Siendo negativos los otros valores de ρ_1 y ρ_2, deben ser desechados. Si la suma $(b+c)$, no es igual á la suma $(a+d)$, será mayor ó menor y no se tendrá para ρ_3 más que un valor finito y positivo, que es

$$\rho_3 = \frac{3V}{\pm[(b+c)-(a+d)]}.$$

Se tomará el signo + ó el — fuera del paréntesis, segun que se tenga $(b+c) >$ ó $< (a+d)$.

Si $(b + c) = (a + d)$, ρ_3 es infinito y una de las tres esferas posibles desaparece.

Si se tiene á la vez $a = b$ y $c = d$ (en cuyo caso la condicion anterior queda satisfecha), ρ_2 se hace tambien infinito y desaparecen dos de las tres esferas posibles.

Finalmente si se tiene $a = b$ y $c = d$, y tambien $a + b = c + d$, es decir, si $a = b = c = d$, ρ_1 se hace infinito como ρ_2 y ρ_3, y las tres esferas posibles desaparecen.

En resúmen, *las ocho esferas tangentes se reducen á siete si la suma de dos de las caras del tetraedro es igual á la de las otras dos; se reducen á seis si además cada cara del primer grupo es equivalente á una cara del segundo grupo; se reducen á cinco si las cuatro caras del tetraedro son equivalentes.*

956. Apoyándose en lo que precede, será fácil tratar directamente los casos particulares en que algunas ó todas las intersecciones de los planos propuestos sean paralelas.

COMPLEMENTO DE LA TEORÍA DE LAS FIGURAS INVERSAS Y DEL MÉTODO DE TRANSFORMACION POR RADIOS VECTORES RECÍPROCOS.

957. La definicion del núm. **392** se aplica á puntos A, B, C,..., situados en el espacio de un modo cualquiera.

El *círculo de inversion* se convierte ahora en una esfera; y cuando se hace variar el radio de esta esfera sin que el centro varíe de posicion, las figuras inversas de la dada que se obtengan son homotéticas entre sí (**930**).

958. *Un plano* L *y una esfera cualquiera* O, *pueden ser considerados como dos figuras inversas una de otra* (**396**). *La figura inversa de un plano* L *es una esfera* O *que pasa por el orígen, y la figura inversa de una esfera* O, *con relacion á uno cualquiera de sus puntos como orígen, es un plano* L *perpendicular al diámetro que pasa por el orígen.*

959. *Dos esferas cualesquiera* O *y* O′, *pueden ser consideradas como dos figuras inversas una de otra* (**398**). *La figura inversa de una esfera* O, *con relacion á un punto* S *exterior ó interior á ella como orígen, es otra esfera* O′.

960. *La inversa de una circunferencia* C, *con relacion á un punto cualquiera* S *del espacio tomado como orígen, es otra circunferencia* C′. Porque, considerada la circunferencia C como la interseccion de dos

esferas O y O_1, su inversa es la interseccion de las dos esferas O' y O'_1, inversas de las esferas O y O_1; es decir, un círculo.

De la definicion de figuras inversas resulta inmediatamente que *tres pares cualesquiera* (a, a'), (b, b'), (c, c'), *de puntos correspondientes de dos figuras inversas están situados sobre una misma superficie esférica.* Luégo una circunferencia cualquiera C y su inversa C' pertenecen á una misma superficie esférica, y, por consiguiente (**878**), son secciones antiparalelas de un mismo cono oblicuo que tiene por vértice el orígen S. De aquí la manera de hallar el centro de la circunferencia C' inversa de otra C; *este centro está* (**880**) *sobre la recta que une el orígen* S *con el vértice de un cono auxiliar, circunscrito á lo largo del círculo* C, *á la esfera determinada por la circunferencia* C *y el punto* S.

961. La fórmula del núm. **394** y su demostracion subsisten aquí. El teorema del núm. **395** se aplica tambien á dos líneas cualesquiera del espacio, pero requiere una nueva demostracion. Ante todo se demuestra, como en el núm. **395**, considerando *(fig. 240)* una línea cualquiera plana ó alabeada MN y su inversa M'N', que sus tangentes MT y M'T' hacen ángulos iguales TMM', TM'M con el radio vector SMM'. Sentado esto, sean *(fig. 241)* dos curvas alabeadas MA y M*a* que se cortan en M, y sus inversas M'A' y M'*a'*; hay que probar que el ángulo de las dos primeras, es decir, el ángulo *t*MT de sus tangentes es igual al ángulo *t*M'T de las otras dos. Pero se tiene, segun la observacion que precede,

$$tMM' = tM'M, \quad TMM' = TM'M;$$

luégo el triedro formado por las rectas MM', MT, M*t* y el formado por las M'M, M'T, M*t* tienen un ángulo diedro igual MM' comprendido entre dos caras iguales una á una; estos dos triedros son, pues, simétricos, y, por consiguiente, las terceras caras TM*t*, TM'*t* son respectivamente iguales.

962. *El ángulo de dos superficies* F *y* F_1 *en un punto cualquiera* m *de su interseccion* amb, *es igual al ángulo bajo el cual se cortan las superficies inversas* F' *y* F'_1 *en el punto correspondiente* m'.

En efecto, tracemos por *m*, y sobre las superficies F y F', dos curvas *mp* y mp_1 en ángulo recto sobre la línea de interseccion *amb*; sus inversas *m'p'* y $m'p'_1$ cortarán perpendicularmente (**961**) á la interseccion *a'm'b'* de las superficies F' y F'_1, y además el ángulo de las dos primeras curvas *mp* y mp_1 será igual al de sus inversas *m'p'* y $m'p'_1$. Pero el ángulo de las curvas *mp* y mp_1 mide la inclinacion mutua de las dos superficies F y F_1 en el punto *m*, y el ángulo de *m'p'* y $m'p'_1$

mide la inclinacion de las inversas F' y F'_1 en el punto correspondiente m'.

963. Las líneas y las superficies inversas gozan, en cuanto á la curvatura, de propiedades muy importantes en que no podemos entrar aquí. Consúltense sobre este asunto las Memorias citadas en el número **405**, y una de M. Hirst (*Annales de Tortolini*, tomo II, 1859).

964. Hé aquí algunas aplicaciones de los principios que preceden: Se llama *proyeccion estereográfica* de una figura esférica la perspectiva de esta figura, tomando por *punto de vista* S un punto de la superficie esférica, y como plano de proyeccion ó *cuadro* el plano P del círculo máximo, cuyo polo está en el punto de vista S. Por lo dicho en los números **958** y **396**, se puede considerar el plano diametral P como el inverso de la superficie esférica, tomando por orígen el punto S y por potencia el doble del cuadrado del radio de la esfera. La proyeccion estereográfica no es, pues, más que un caso particular de la transformacion por radios vectores recíprocos, y se pueden enunciar las proposiciones siguientes, que se utilizan en la construccion de mapamundis:

1.° *Las proyecciones estereográficas de dos líneas trazadas sobre la superficie esférica, se cortan bajo el mismo ángulo que las líneas mismas.*

2.° *La proyeccion estereográfica de un círculo de la esfera es un círculo cuyo centro es la perspectiva del vértice del cono circunscrito á la esfera á lo largo de la circunferencia dada.*

La proyeccion estereográfica fué conocida de los griegos: Ptolomeo la describe con el nombre de *planisferio*, y los autores de la Edad Media la llaman *astrolabio*. La construccion del centro es debida á M. Chasles.

965. *Se puede siempre transformar un grupo de tres esferas dadas en un grupo de otras tres esferas que tengan sus centros en línea recta; el lugar de los orígenes ó polos de transformacion es la circunferencia que corta en ángulo recto á los círculos máximos de las esferas dadas, situados en el plano de los tres centros.* En efecto, es evidente que los polos de transformacion deben estar en el plano de los tres centros, y que todo se reduce á transformar los círculos máximos situados en este plano en otros tres que tengan sus centros en línea recta. Ahora bien, si se toma como polo uno de los puntos de la circunferencia que corta ortogonalmente á estos tres círculos máximos, esta circunferencia ortogonal se transforma en una recta que corta en ángulo recto á las transformadas de las circunferencias dadas, y que, por consiguiente, contiene á los centros de estas transformadas.

Esta observacion conduce inmediatamente al teorema de Dupuis

(**953**). Transformemos, en efecto, la figura de tal modo que las tres esferas fijas se conviertan en otras tres que tengan sus centros en línea recta; la esfera variable se convertirá en una esfera tangente á las transformadas de las tres primeras, y tocará evidentemente á cada una de ellas en un punto; el lugar de estos puntos será un círculo perpendicular á la recta que une los tres centros. Luégo, volviendo á la figura primitiva, y recordando que la transformada de un círculo es un círculo, se ve que el punto de contacto de la esfera variable describe un círculo sobre cada una de las esferas fijas (MANNHEIM, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1.ª serie, tomo XIX).

FIGURAS TRAZADAS SOBRE LA SUPERFICIE ESFÉRICA.

966. *Relacion anarmónica.*

Se llaman *relaciones anarmónicas de cuatro puntos* A, B, C, D, *situados sobre un círculo máximo* de una esfera ω, las relaciones anarmónicas del haz formado por los cuatro radios ωA, ωB, ωC, ωD, que terminan en dichos puntos.

Cuando un haz de cuatro arcos de círculo máximo OM, ON, OP, OQ, *que parten de un mismo punto* O *de la superficie esférica, es cortado por un arco de círculo máximo* L, *la relacion anarmónica de los cuatro puntos* A, B, C, D, *determinados por el haz sobre este arco transversal, tiene un valor independiente de la posicion de este arco* L. Porque esta relacion es, por definicion, igual á la del haz formado por los radios ωA, ωB, ωC y ωD, cuya relacion no difiere de la del haz de los cuatro planos ωOA, ωOB, ωOC y ωOD (**584**).

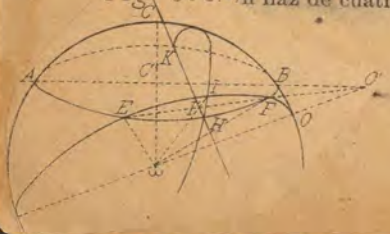
Segun esto, se llama *relacion anarmónica de un haz de cuatro arcos de círculo máximo* la relacion anarmónica de los cuatro puntos determinados por este haz sobre un arco de círculo máximo transversal cualquiera.

Las dos proposiciones fundamentales (**325** y **327**) son aplicables á las figuras esféricas, y, por consiguiente, tambien lo son sus corolarios (**326** y **328**), la propiedad de los triángulos homológicos (**330** y **331**) y los teoremas de Pascal y Brianchon (**332** y **333**). Las demostraciones que de todas ellas hemos dado, pueden repetirse; basta reemplazar en aquellos enunciados y en los razonamientos las palabras *línea recta* por *arco de círculo máximo.*

967. *Relacion armónica.*

Cuatro puntos A, B, C, D situados sobre un arco de círculo máximo, forman un sistema *armónico* cuando la relacion anarmónica (ABCD) es igual á — 1.

Fig. 506. Un haz de cuatro arcos de círculo máximo OA, OB, OC, OD, es ar-



mónico cuando la relacion anarmónica (O.ABCD) es igual á — 1; es decir, cuando se puede hallar un arco de círculo máximo que corte al haz segun un sistema de cuatro puntos armónicos; entónces cualquier otro arco de círculo máximo transversal gozará de la misma propiedad (**966**).

De aquí resulta que si por un punto C de una superficie esférica se trazan á través de un ángulo AOB formado por dos arcos de círculo máximo diversos arcos secantes, tales como ACB, y se marca sobre cada uno de ellos el punto armónico de C con relacion al segmento AB interceptado entre los lados del ángulo, el lugar de los puntos D será el arco de círculo máximo OD, conjugado armónico de OC con relacion al ángulo AOB. El punto C y el arco de círculo máximo OD se denominan *polo*, y *polar* con respecto al ángulo AOB.

La proposicion (**315**) relativa al cuadrilátero completo y la demostracion que de ella hemos dado (**342**), subsisten para la esfera; basta reemplazar las palabras *línea recta* por *arco de círculo máximo*. De aquí resulta un procedimiento sencillo para trazar sobre la superficie esférica: 1.°, el cuarto armónico de tres puntos de una circunferencia de círculo máximo; 2.°, la polar de un punto con relacion á un ángulo (**316** y **342**).

968. *Polo y polar con relacion á un círculo de la esfera.*

Dados sobre la superficie esférica un punto O *y un círculo menor* AFBE *(fig. 506), si se traza por el punto* O *un arco de círculo máximo secante* OFE *y se determina el conjugado armónico* I *del punto* O *con relacion á* EF, *el lugar geométrico de los puntos* I, *cuando el arco* OFE *gira alrededor del punto* O, *es un arco de círculo máximo perpendicular al círculo máximo* OC *determinado por el punto* O *y el polo* C *del círculo dado.*

En efecto, sea O′ el punto en que el radio ωO corta al plano del círculo dado; los tres puntos E, F, O′ estarán en línea recta, y el haz de los cuatro radios ωE, ωI, ωF, ωO′, será, por hipótesis, armónico; luégo si I′ es el punto de interseccion de EF con ωI, el sistema rectilíneo E, I′, F, O′ será tambien armónico. Pero el lugar de los puntos I′ es una recta KH, situada en el plano AEB y perpendicular al diámetro O′BA (**346**); luégo el lugar de los puntos I es la interseccion de la superficie esférica con el plano ωKH; es, pues, un círculo máximo perpendicular al OC.

Se dice que el punto O es el *polo* del círculo máximo HIK, y que éste es la *polar* del punto O con relacion al círculo AEB.

La palabra *polo* se ha usado ya en otra acepcion (**944**), pero desaparecerá toda ambigüedad haciendo la convencion siguiente: cuando empleemos la palabra *polo* en el sentido del teorema que precede, se añadirá siempre: *con relacion al círculo considerado*. Cuando se tome

en el sentido primitivo (**944**), la palabra *polo* no irá seguida de ninguna otra indicacion.

Hemos estudiado con detalle en el núm. **347** las posiciones relativas del punto O′ y la recta KH; el lector deducirá fácilmente las posiciones relativas del punto O′ y del círculo máximo KIH.

Cuando el punto O′ describe una recta en el plano AEB, se sabe (**348**) que la recta KH gira en este plano alrededor del polo de esta recta; pero entónces el punto O describe un círculo máximo y el plano ωKH gira alrededor del diámetro que atraviesa á la esfera en el polo con relacion á AEB del círculo máximo descrito por el punto O. Luégo *las polares de todos los puntos de un círculo máximo pasan por el polo de este círculo máximo con relacion al círculo director* AEB, *y los polos con relacion al círculo director* AEB *de todos los círculos máximos que pasan por un punto de la superficie esférica, están situados en la circunferencia de círculo máximo polar de este punto.*

El teorema del núm. **350**, su demostracion y sus consecuencias (**351, 352, 353**) subsisten para la esfera, reemplazando las rectas por arcos de círculo máximo; y se deduce así el procedimiento para construir sobre la superficie esférica la polar de un punto con relacion á un círculo director dado.

Finalmente, el método de transformacion por las polares recíprocas (**355** y siguientes) se aplica tambien á las figuras esféricas. El modo de transformacion general por polares recíprocas en el espacio, abraza como caso particular el modo de transformacion especial que hemos expuesto en el núm. **808** para las figuras esféricas, en el cual se hace corresponder á un triángulo un triángulo suplementario. Sean, en efecto, una esfera de radio R y un punto A del espacio, situado á una distancia d del centro ω de la esfera; el plano polar de este punto es un plano perpendicular á ωA y situado á una distancia de ω igual á $\frac{R^2}{d}$. Si el radio R de la esfera tiende hácia cero, $\frac{R^2}{d}$ tiende tambien hácia cero, y los planos polares de todos los puntos de la recta indefinida ωA tienen por límite el plano único trazado por ω perpendicularmente á ωA. Segun esto, se puede dar á este plano el nombre de *plano polar* de la recta ωA con relacion á una esfera infinitamente pequeña, cuyo centro esté en ω. Pues bien, si se tiene una figura formada por rectas y planos que pasan todos por un punto ω, se tendrá la figura correlativa, trazando por ω planos y rectas perpendiculares á las rectas y planos de la figura primitiva. Sobre la superficie esférica, á un círculo máximo corresponderá su polo, é inversamente; de suerte que se vuelve de nuevo á las figuras suplementarias de los números **811** y **812**.

969. *Eje radical.*

Llámase *eje radical* de dos círculos menores P y Q, trazados sobre la superficie esférica, el arco de círculo máximo U V cuyo plano pasa por la interseccion X Y de los planos de los dos círculos menores P y Q. Segun esto, el eje radical es perpendicular al arco de círculo máximo PQ que une los polos de los dos círculos menores dados *(fig. 507)*.

Si se cortan los dos círculos fijos P *y* Q *por un círculo auxiliar variable que corte al primero en los dos puntos* A *y* B, *y al segundo en* A′ *y* B′, *el lugar de los puntos de interseccion* M *de los arcos de círculo máximo* A B *y* A′B′ *es el eje radical de los círculos* P *y* Q. Porque las rectas A B y A′B′ se cortan evidentemente en un punto M′ de X Y, y, por consiguiente, el punto M, en que el radio ωM′ atraviesa á la esfera, pertenece á la vez á los tres círculos máximos, cuyos planos pasan respectivamente por las rectas A B, A′B′, X Y. Esta propiedad permite construir sobre la superficie esférica el eje radical de dos circunferencias.

Si la circunferencia secante A B A′B′ se convierte en una C D tangente en C y D *(fig. 508)*, los arcos de círculo máximo B A M y B′A′M′ se convierten en arcos de círculo máximo tangentes M C y M D; son, por otra parte, iguales, como tangentes esféricas trazadas desde un mismo punto M al círculo auxiliar C D. Luégo *el eje radical* U V *de los dos círculos* P *y* Q *es (sobre la superficie esférica) el lugar de los puntos de esta superficie desde los cuales se pueden trazar á ellos tangentes iguales.*

La circunferencia C I D, descrita desde el punto M como polo, corta ortogonalmente á los dos círculos P y Q, porque está en ángulo recto con los arcos de círculo máximo M C y M D. Luégo *el eje radical de los dos círculos* P *y* Q *es (sobre la superficie esférica) el lugar de los polos ó centros esféricos de los círculos que cortan ortogonalmente á los dos* P *y* Q.

Finalmente, el plano del círculo C I D es evidentemente el plano polar del punto M′ que pertenece á X Y; y como al variar el círculo ortogonal C I D su polo M′ describe la recta X Y, el plano de este círculo C I D pasa constantemente por la recta recíproca (**946**) de X Y. Luégo *cuando dos sistemas de círculos se cortan ortogonalmente sobre la esfera, los planos de los círculos de cada sistema pasan por una recta, y estas dos rectas son recíprocas con relacion á la esfera.* Inversamente, *dos series de planos que pasan por dos rectas recíprocas con relacion á una esfera, trazan sobre la superficie esférica dos sistemas de círculos ortogonales* (*).

Digamos tambien que la recta recíproca de la interseccion de los dos

---

(*) El estudio del doble sistema de círculos ortogonales sobre la esfera, tiene consecuencias importantes en lo que se refiere á las superficies cuyas líneas de curvatura son planas. (O. BONNET, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, cuaderno XXXV.—PICART, *Essai d'une théorie géométrique des surfaces*, 1863.)

Fig. 507

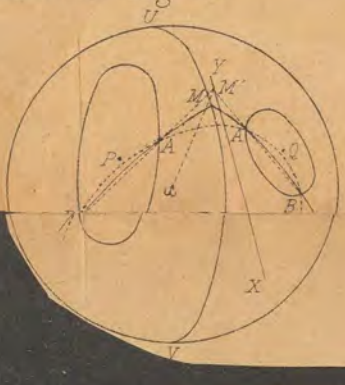
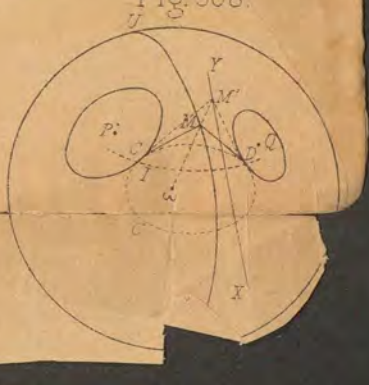


Fig. 508.



círculos P y Q es precisamente la recta que une los vértices de los dos conos (**878**, **880**) que se pueden hacer pasar por estos dos círculos. En efecto, tomemos como plano de la figura el círculo máximo *(fig. 219)* perpendicular á los dos círculos dados, que aparecen entónces representados por las dos rectas AA′ y BB′; uniendo AB y A′B′, y despues AB′ y BA′, se tendrán los vértices N y O de los dos conos que se consideran; y como la recta NO es (**352**) la polar de la interseccion M de las dos rectas AA′ y BB′, la perpendicular levantada en el punto M al plano de la figura, es decir, la recta comun á los dos planos de los círculos AA′ y BB′ tendrá por recíproca NO (**946**).

Los ejes radicales de tres círculos de una esfera, considerados dos á dos, concurren en un mismo punto, porque el radio que termina en el vértice del triedro formado por los planos de los tres círculos atraviesa á la superficie esférica en un punto comun á los tres ejes radicales. Este punto recibe el nombre de *centro radical* de los tres círculos.

970. *Centros de semejanza.*

Llámanse *centros de semejanza* de dos círculos AB y CD situados en una superficie esférica *(fig. 509)* los puntos O y O′ en que esta superficie es cortada por los radios ωS y $\omega S'$ que van dirigidos á los vértices S y S′ de los dos conos (**878**) que se pueden hacer pasar por los dos círculos. El *centro* directo O corresponde al cono cuyo vértice S es *exterior* á la esfera, y el centro *inverso* O′ al cono cuyo vértice S′ es *interior*. Uno y otro centro están, por lo demás, sobre la circunferencia de círculo máximo que pasa por los polos P y Q de los dos círculos dados.

Si por los puntos M *y* N *(fig. 510) en que las circunferencias* P *y* Q *son tocadas por otra variable* X, *se traza un arco de círculo máximo, éste pasa por uno de los centros* O *de semejanza de los círculos* P *y* Q *y corta á estas dos circunferencias bajo ángulos iguales.*

En efecto, la tangente MT comun á las circunferencias P y X, y la tangente NT comun á las Q y X, están en el plano del círculo X, y, por tanto, este plano es tangente al cono S, y la recta MN pasa por el vértice S de este cono; luégo el plano del círculo máximo MN contiene la recta ωS, y, por consiguiente, el arco de círculo máximo MN pasa por O. Por otra parte, los arcos de círculo máximo PM y MX están uno en prolongacion de otro, puesto que las circunferencias X y P se tocan en M: lo mismo sucede á los arcos de círculo máximo QN y XN; luégo se tiene

$$\text{áng.}^{o}\ PMO_1 = XMN = XNM = \text{áng.}^{o}\ QNO,$$

y, por consiguiente, el círculo máximo MN está igualmente inclinado sobre los radios esféricos PM y QN, y, por tanto, sobre los dos círculos AB y CD (*).

(*) Heegmann, *Mémoires de l'Académie de Lille*, 1826.

Los puntos M y N de los dos círculos AB y CD relativos á una misma generatriz del cono, se llaman *antihomólogos* (**387**). *Dos pares de puntos antihomólogos, pertenecen á una misma circunferencia;* porque estando situados sobre dos generatrices del mismo cono, están en un mismo plano. De aquí se deduce, razonando como en el núm. **387**-3.°, que *el arco de círculo máximo que une dos puntos del círculo* AB *y el que une los dos puntos antihomólogos del círculo* CD, *se cortan sobre el eje radical de los dos círculos* AB *y* CD, y en particular *que las tangentes esféricas en dos puntos antihomólogos de dos círculos se cortan sobre el eje radical de éstos.*

Los seis centros de semejanza de tres círculos de una misma esfera considerados dos á dos, están situados tres á tres sobre cuatro círculos máximos. Esto proviene de que los vértices de los seis conos determinados por estos tres círculos están tres á tres sobre cuatro rectas situadas en un mismo plano.

Para demostrar esta proposicion, consideremos los conos S, S′, S″, cuyos vértices son exteriores á la esfera; segun lo que acabamos de ver, estos tres vértices están en el plano del círculo que fuese tangente exteriormente á los tres propuestos; pertenecen igualmente al plano del círculo que tocase interiormente á los círculos dados. Luégo los vértices S, S′, S″ están en línea recta. Designando por S_1, S'_1, S''_1 los vértices de los otros tres conos, se vería análogamente que S, S'_1, S''_1 están en línea recta, así como S_1, S'_1, S''_1 y S_1, S'_1, S″. Por lo demás, cada vértice pertenece á dos rectas diferentes, y las cuatro rectas están, por tanto, situadas en un mismo plano.

Cada uno de los cuatro círculos máximos que pasan por tres centros de semejanza, toman el nombre de *ejes de semejanza de los tres círculos.* Hay *un eje de semejanza directa y tres ejes de semejanza inversa.*

971. *Círculo tangente á tres círculos menores dados sobre la esfera.* El razonamiento y la construccion son los mismos que en el número **389**, reemplazando las rectas por arcos de círculo máximo; hay ocho soluciones.

El método se aplica tambien á todos los casos particulares que se obtienen, suponiendo que los círculos dados se reducen á puntos ó á círculos máximos.

Fig. 509.

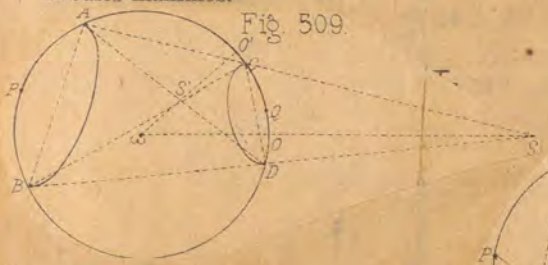
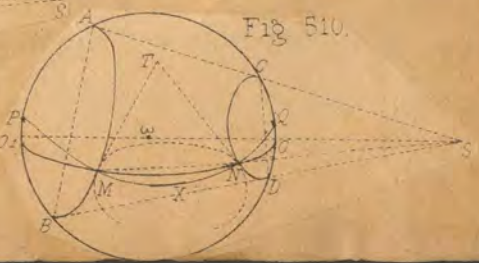


Fig. 510.



BIBLIOTECA DEL C. O. A. M.

$l = 4 \;.\; C = \dfrac{4a}{2(a+4)-4a} = \dfrac{4a}{2a+8-4a} = \dfrac{4a}{8-2a} = \dfrac{2a}{4-a}$

$a = 1 \;,\; C = \dfrac{2.3}{4-3} = \dfrac{6}{1} = 6$ (octaedro regular ó cubo)

$a = 4 \;,\; C = \dfrac{2.4}{4-4} = \dfrac{8}{0} = \infty$ (imposibilidad)

$l = 5 \;,\; C = \dfrac{4a}{2(a+5)-5a} = \dfrac{4a}{2a+10-5a} = \dfrac{4a}{10-3a}$))

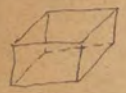
$a = 3 \;,\; C = \dfrac{4.3}{10-9} = \dfrac{12}{1} = 12$ (dodecaedro regular)

$a = 4 \;,\; C = \dfrac{4.4}{10-12} = \dfrac{16}{-2} = -8$ (imposibilidad)

$l = 6 \;,\; C = \dfrac{4a}{2(a+6)-6a} = \dfrac{4a}{2a+12-6a} = \dfrac{4a}{12-4a}$,, $a = 3 \;,\; C = \dfrac{12}{0} = \infty$ (imposibilidad)

Teorema

No pueden existir más que cinco generos de poliedros convexos cuyas caras sean todos polígonos de igual nº de lados y sus angulos poliedros tengan todos el mismo número de aristas.



$\left.\begin{array}{l} V = \text{vertices} \\ A = \text{aristas} \\ C = \text{caras} \end{array}\right.$ „ l = lados de cada cara „ $Cl = 2A$ „ $Va = 2A$ $\Big\}\ Cl = Va$

$C + V - A = 2$ „ $V = \frac{Cl}{a}$ „ $A = \frac{Cl}{2}$ „ $C + \frac{Cl}{a} - \frac{Cl}{2} = 2$ „ $2aC + 2Cl - Cla = 4a$

$C(2a + 2l - la) = 4a$ „ $C(2(a+l) - al) = 4a$ „ $C = \frac{4a}{2(a+l) - al}$ „

$l = 3.\ C = \frac{4a}{2(a+3) - 3a} = \frac{4a}{2a + 6 - 3a} = \frac{4a}{6 - a}$

$\left.\begin{array}{l} a = 3 \text{ „ } C = \frac{4 \times 3}{6-3} = \frac{12}{3} = 4 \text{ (tetraedro regular)} \\ a = 4 \text{ „ } C = \frac{4 \times 4}{6-4} = \frac{16}{2} = 8 \text{ (octaedro regular)} \\ a = 5 \text{ „ } C = \frac{4 \cdot 5}{6-5} = \frac{20}{1} = 20 \text{ (icosaedro regular)} \\ a = 6 \text{ „ } C = \frac{4 \cdot 6}{6-6} = \frac{24}{0} = \infty \text{ (imposible claro!)} \end{array}\right.$

NOTAS

AL

TRATADO DE GEOMETRÍA ELEMENTAL

DE

E. ROUCHÉ Y CH. DE COMBEROUSSE

NOTAS AL TRATADO

DE

GEOMETRÍA ELEMENTAL

DE

E. ROUCHÉ Y CH. DE COMBEROUSSE

POR

A. PORTUONDO

INGENIERO DE CAMINOS

TERCERA EDICION

PARA EL USO DE LOS CANDIDATOS Á LAS ESCUELAS ESPECIALES

MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE FORTANET

IMPRESOR DE LA REAL ACADEMIA DE LA HISTORIA

Calle de la Libertad, núm. 29

1888

BIBLIOTECA DEL C. C. A. M.

ES PROPIEDAD DEL AUTOR.

ÍNDICE.

	Págs.
ADVERTENCIA	XI
NOTA 1.ª (de la pág. 11).—Bisectrices de dos ángulos adyacentes	1
NOTA 2.ª (de la pág. 25).—Dependencia lógica entre una sencilla proposicion directa, su recíproca, su contraria y la recíproca de su contraria	1
NOTA 3.ª (de la pág. 27).—Paralelismo de dos rectas perpendiculares á una tercera	3
NOTA 4.ª (de la pág. 31).—Ángulos que tienen sus lados paralelos	3
NOTA 5.ª (de la pág. 32).—Ángulos que tienen sus lados perpendiculares	4
NOTA 6.ª (de la pág. 37).—Suma de los ángulos interiores ó exteriores de un polígono cóncavo	5
NOTA 7.ª (de la pág. 38).—Centro del paralelógramo	7
NOTA 8.ª (de la pág. 51).—Secantes ó tangentes paralelas en una circunferencia	8
NOTA 9.ª (de la pág. 57).—Observaciones sobre la definicion de número inconmensurable	9
NOTA 10 (de la pág. 104).—Observaciones sobre las bisectrices del ángulo interior ó exterior de un triángulo	11
NOTA 11 (de la pág. 106).—Lugar geométrico de los puntos cuyas distancias á dos fijos están en una relacion dada	12
NOTA 12 (de la pág. 122).—Secantes que partiendo de un punto descansan sobre una recta	13
NOTA 13 (de la pág. 132).—Lugares geométricos de los puntos tales que la suma ó la diferencia de los cuadrados de sus distancias á dos fijos sea un cuadrado dado	13
NOTA 14 (de la pág. 135).—Cuadrilátero inscriptible	16

NOTA 15 (de la pág. 154).

POLÍGONOS REGULARES DE ESPECIE SUPERIOR.

Págs.

Géneros y especies de polígonos regulares que pueden ser inscritos en una circunferencia dividida en *m* partes iguales.—Ejemplo 20

Lados de los dodecágonos de 1.ª y de 5.ª especie 30

Lados de los icoságonos de 1.ª, 3.ª, 7.ª, 9.ª especie 31

Lados de las cuatro especies de polígonos de treinta lados 32

Lados de las ocho especies de polígonos de sesenta lados 33

Vértices, centro, radios, apotemas, suma de ángulos interiores, ángulo en el centro, ángulo del polígono y área de un polígono regular de especie superior 34

Envolvente y núcleo de un polígono regular de especie superior.. 36

NOTA 16 (de la pág. 158).—Observacion acerca de los lados del decágono ordinario y pentágono estrellado, así como del decágono estrellado y pentágono ordinario 37

NOTA 17 (de las páginas 161 y 162).—Fórmulas para el cálculo del lado de un polígono regular inscrito ó circunscrito de doble, mitad ó igual número de lados que otro cuyo lado sea conocido 38

NOTA 18 (de la pág. 168).—Observacion sobre el límite de una magnitud variable que sea siempre menor que otra variable.. 40

NOTA 19 (de la pág. 180).—Observacion sobre el error en el cálculo de π 40

NOTA 20 (de la pág. 260).—Fórmulas entre el radio de un sector circular, su número de grados, la longitud de su arco y su área.—Cálculo de dos cualesquiera de estas cantidades en funcion de las otras dos 41

NOTA 21 (de la pág. 290).—Teorema sobre las direcciones de tres rectas que cortan á dos cualesquiera en partes proporcionales 44

Rectas concurrentes cortadas por dos planos paralelos.—Recíproco 45

Líneas quebradas que tienen sus lados paralelos y proporcionales. 46

NOTA 22 (de las páginas 297 y 298).—Proyecciones sobre un plano de dos rectas paralelas.—Corolario. Caso en que cae en defecto 47

Proyecciones de dos rectas perpendiculares entre sí sobre un plano paralelo á una de ellas.—Teorema directo.—Dos recíprocos parciales.—Caso particular. Teoremas de las tres perpendiculares 49

Págs.

Proyeccion y traza sobre un plano de una recta y un plano perpendiculares entre sí.—Corolario. Caso en que cae en defecto 51

Trazas de dos planos perpendiculares entre sí sobre un plano perpendicular á uno de ellos.—Teorema directo. Dos recíprocos parciales 52

Dependencia lógica entre una proposicion, sus dos recíprocas parciales, las dos contrarias parciales de la directa, y las cuatro contrarias parciales de las recíprocas parciales.—Representacion *schemática* 53

NOTA 23 (de la pág. 303).—Rectilíneos correspondientes á diedros 56

NOTA 24 (de la pág. 307).—Resúmen de las propiedades de paralelismo y perpendicularidad.—Problemas determinados, indeterminados, absurdos 59

NOTA 25 (de la pág. 353).—Discusion de un problema sobre el tronco de pirámide de bases paralelas 63

NOTA 26 (de la pág. 360).—Movimientos más sencillos para llevar á coincidir dos figuras simétricas de una tercera 67

NOTA 27 (de la pág. 375).—Modificacion que puede sufrir un diedro de un ángulo poliedro si todas las caras, á excepcion de una sola, permanecen constantes 69

NOTA 28 (de la pág. 417).

ESFERA.

PROPIEDADES GENERALES.

Radio esférico, diámetro esférico; cuerda esférica de una circunferencia menor 70

En una misma esfera ó en esferas iguales, dos casquetes del mismo radio esférico son iguales.—Todo diámetro esférico divide al casquete en dos partes iguales.—El diámetro es la mayor de las cuerdas esféricas de un casquete 71

En una misma esfera ó en esferas iguales, dos arcos iguales son subtendidos por cuerdas esféricas iguales; á mayor arco corresponde mayor cuerda.—Recíprocos 72

El diámetro esférico perpendicular á una cuerda, divide á ésta y á los arcos subtendidos en dos partes iguales.—Diez teoremas 72

Págs.

En una misma esfera ó en esferas iguales, dos cuerdas iguales equidistan del polo; la menor cuerda dista más del polo.—Recíprocos..... 73
La máxima perpendicular á un radio esférico en su extremo, es tangente á la menor.—Recíproco.—Normales, mínima y máxima..... 75
Si dos arcos de círculo máximo concurren en dos puntos de la máxima cuyos polos son los mismos de una menor, interceptan en esta menor arcos iguales.—Recíproco..... 76
Tres puntos de una superficie esférica no situados en una máxima, determinan una menor..... 78
Posiciones relativas de dos circunferencias menores..... 80
Posiciones relativas de una máxima y una menor..... 82
Tangentes á varias menores, que tienen una cuerda comun, desde un punto cualquiera de la prolongacion de dicha cuerda.... 82

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ESFÉRICA.

Trazar por un punto dado una máxima tangente á una menor.—Discusion..... 84
—Trazar una menor que pase por un punto y sea tangente á una máxima..... 87
—Trazar una menor que pase por un punto y sea tangente á otra menor..... 87
—Trazar una menor que sea tangente á una máxima y á una menor dadas..... 88
—Trazar una menor que pase por dos puntos y sea tangente á una máxima..... 88
—Trazar una menor que pase por dos puntos y sea tangente á una menor..... 89
—Trazar una máxima tangente á dos menores.—Discusion..... 90

POLÍGONOS ESFÉRICOS.

Polígonos inscrito y circunscrito á una menor.—El triángulo es siempre inscriptible y circunscriptible..... 96
Círculo inscrito y círculos ex-inscritos á una menor..... 97
Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto..... 97
Paralelógramo, rombo, rectángulo y cuadrado esféricos..... 98
Polígonos esféricos semejantes..... 101
Polígonos esféricos regulares..... 103

Págs.

Todo polígono esférico regular, es inscriptible y circunscriptible.. 106
Inscripcion en una menor del cuadrado, exágono, triángulo, los dos decágonos, los dos pentágonos, los cuatro pentedecágonos, etc..... 107
NOTA 29 (de la pág. 474).—Secciones paralelas y antiparalelas á la base en un cilindro oblicuo de base circular..... 109
NOTA 30 (de la pág. 490).—Progresiones geométricas de la serie de radios ó de apotemas, de las superficies y volúmenes de la serie de poliedros regulares conjugados..... 111
NOTA 31 (de la pág. 493).—Determinacion de los radios de las esferas circunscrita é inscrita á un poliedro regular..... 116
Aplicacion al tetraedro, exaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro.. 117
NOTA 32 (de la pág. 501).—Generalizacion de la fórmula de Euler para los poliedros de especie superior..... 120

HOMOGRAFIA.

Relacion anarmónica de cuatro puntos..... 123
Relacion anarmónica de cuatro rectas que pasan por un punto.. 129
Sistemas homográficos..... 133
Divisiones homográficas en una misma recta..... 141
Haces homográficos..... 147
Relacion armónica.—Haz armónico..... 149
Puntos en involucion.—Haces en involucion..... 153

PROBLEMAS SOBRE ÁREAS.

1.º Construir un triángulo equivalente á un polígono dado.... 165
2.º Dividir una recta en dos segmentos que guarden entre sí la relacion de las áreas de dos polígonos dados..... 165
3.º Sobre una recta dada como lado construir un rectángulo equivalente á un polígono dado..... 166
4.º Construir un rectángulo de perímetro dado y cuya área sea equivalente á la de un polígono..... 166
5.º Construir un polígono semejante á otro dado conocida la relacion de las dos áreas..... 166
6.º Dados dos polígonos, construir otro semejante al primero y cuya área esté con la del segundo en una relacion dada... 168

Págs.

7.º Dado un polígono, construir otros, en número determinado, que le sean semejantes, cuyas áreas guarden entre sí la relacion de magnitudes conocidas y cuya suma sea igual al área del polígono dado..... 169

8.º Transformar un triángulo en otro que tenga dos vértices en puntos dados y el tercero en una línea determinada..... 170

9.º Dividir un triángulo en partes proporcionales á números ó líneas dadas por medio de rectas que partan de los vértices y converjan en un punto interior..... 170

10.º Dividir un triángulo en partes proporcionales á líneas dadas, por rectas trazadas desde un mismo vértice, ó por paralelas á sus lados..... 171

11.º Dividir un trapecio en partes proporcionales á líneas ó números dados por rectas paralelas á las bases..... 172

12.º Conocida el área de un triángulo y la relacion que guardan entre sí los tres lados, encontrar estos..... 173

13.º Dados varios polígonos semejantes, construir otro semejante y equivalente á su suma ó diferencia..... 174

14.º Por un punto dado sobre el perímetro de un polígono, trazar una recta que separe una parte equivalente á un polígono dado..... 175

15.º Describir un círculo cuya área esté con la de un círculo dado en una relacion conocida..... 175

16.º Describir un círculo cuya área sea equivalente á la suma ó á la diferencia de las de dos círculos dados..... 176

17.º Dividir un círculo en partes proporcionales á líneas dadas por medio de radios ó de circunferencias concéntricas..... 176

Al hacer esta nueva edicion de mis **Notas al Tratado de Geometria** de *MM. Rouché y Comberousse*, he añadido algunas lecciones sobre HOMOGRAFÍA, estrictamente ajustadas á las exigencias del *Programa oficial* para los exámenes de ingreso en la *Escuela general preparatoria de Ingenieros y Arquitectos* publicado el año último. He añadido tambien la resolucion de los PROBLEMAS SOBRE ÁREAS que contiene el citado programa.

A. PORTUONDO.

Madrid, Setiembre de 1888.

GEOMETRÍA PLANA.

NOTA 1.ª (de la pág. 11).

Es cierta la proposicion *recíproca* que dice:

Si las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí, dichos ángulos son suplementarios; porque siendo la suma de las mitades de los dos ángulos adyacentes igual á un recto, la suma de los ángulos mismos valdrá el doble, es decir, dos rectos.

NOTA 2.ª (de la pág. 25).

La relacion ó dependencia lógica que hay entre una sencilla proposicion directa, su recíproca, su contraria y la recíproca de su contraria ó contraria de su recíproca (que es una misma), es la siguiente:

La proposicion *directa* y la *recíproca de su contraria* se entrañan mutuamente de tal modo, que la verdad de la una

implica *necesariamente* la verdad de la otra (*). Así, por ejemplo, demostrada la proposicion *directa:*

Si un punto está situado en la bisectriz de un ángulo equidista de sus lados, es *necesariamente* cierta *la recíproca de su contraria,* que dice:

Si un punto no equidista de los lados de un ángulo, no está en su bisectriz; porque si estuviera en ella equidistaria de los lados segun la directa. Asimismo, si la proposicion última fuera demostrada *directamente,* la primera (recíproca de la contraria de esta última) sería *necesariamente* cierta.

Análogamente, la proposicion *recíproca* y la *contraria* de una proposicion cualquiera se entrañan mutuamente de tal modo, que la verdad de la una implica *necesariamente* la verdad de la otra. Así, por ejemplo, la verdad de la proposicion:

Si un punto equidista de los lados de un ángulo está situado en su bisectriz, lleva *necesariamente* consigo la verdad de esta otra:

Si un punto no está situado en la bisectriz de un ángulo no equidista de sus lados; porque si equidistase de los lados, estaria situado en la bisectriz, segun la proposicion anterior.

Y viceversa: la verdad de la última lleva *necesariamente* consigo la verdad de la primera.

Notando que una cualquiera de las cuatro proposiciones puede ser lógicamente mirada como directa, diremos, en vista de lo que precede, que:

Si se demuestran separadamente

DIRECTA y RECÍPROCA,

ó bien

DIRECTA y CONTRARIA,

quedan establecidas las cuatro proposiciones.

(*) En el Tratado de MM. Rouché y Comberousse hay, como se ve, alguna inexactitud al decir que la proposicion directa, su recíproca y la contraria están ligadas entre sí de manera que *una cualquiera de las dos últimas es una consecuencia de las otras dos.*

NOTA 3.ª (de la pág. 27).

TEOREMA.

Cuando dos rectas son paralelas, toda perpendicular á una de ellas es tambien perpendicular á la otra.

Conviene hacer notar que este teorema es *el recíproco parcial* (*) del siguiente:

Dos rectas perpendiculares sobre una tercera, son paralelas.

Las dos propiedades contenidas en la hipótesis de este teorema son una misma, y por eso los dos recíprocos parciales que admite equivalen en el fondo á *uno solo*, que es el enunciado primeramente.

Merece notarse entre los *contrarios parciales* la siguiente proposicion, que sirvió de *postulado* á Euclides para fundar la teoría de rectas paralelas:

Si una recta es perpendicular y otra no lo es á una tercera recta, tienen que cortarse; porque si fueran paralelas, siendo una de ellas perpendicular á la tercera recta, la otra habria de serlo tambien (en virtud del recíproco), contra lo supuesto.

NOTA 4.ª (de la pág. 31).

Es cierta la proposicion recíproca que dice:

Si dos ángulos son iguales ó suplementarios, y tienen dos de

(*) Cuando la hipótesis de un teorema directo contiene dos propiedades, llamaremos *recíprocos parciales* de él los que se forman adoptando como hipótesis: la conclusion del directo unida á una de las propiedades de su hipótesis—y como conclusion: la otra propiedad de dicha hipótesis. Llamaremos *contrarios parciales* los que se forman adoptando como hipótesis: una de las propiedades de la hipótesis del directo unida á la contraria de la otra propiedad;—y como conclusion: la contraria de la conclusion del directo.

Se ve desde luego que un teorema de este género admite en general dos recíprocos parciales y dos contrarios parciales.

Para más detalles véase el final de la NOTA 22.

sus lados paralelos, los otros dos lo serán tambien; porque si no lo fueran, se podria trazar por el vértice de uno de los ángulos una recta paralela al lado del otro ángulo, y se tendrian por una parte en virtud de la hipótesis, y por otra en virtud del teorema directo dos ángulos iguales á un tercero, ó suplementarios de un tercero, y que no serian iguales entre sí, lo cual es absurdo.

NOTA 5.ª (de la pág. 32).

Es cierta la proposicion reciproca que dice:

Si dos ángulos son iguales ó suplementarios, y tienen dos de sus lados perpendiculares, los otros dos serán tambien perpendiculares. La demostracion es idéntica á la del recíproco anterior (NOTA 4.ª).

Para precisar los casos en que dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son *suplementarios* ó *iguales,* conviene observar que:

Si por el vértice O de un ángulo AOB (*figuras 1.ª* y *2.ª*) se levanta la perpendicular OA′ al lado OA, en la misma region del plano en que está el lado OB (una recta separa siempre en el plano dos regiones), y tambien se levanta la perpendicular OB′ al lado OB, en la misma region en que está el lado OA, el ángulo A′OB′ es *suplementario* de AOB, porque es de diferente especie que éste; así, en la *fig. 1.ª*, en que el ángulo AOB es agudo, el A′OB′ es obtuso, como mayor que el recto A′OA ó B′OB; y en la *fig. 2.ª*, en la cual el ángulo AOB es obtuso, el A′OB′ es agudo, como menor que el recto A′OA ó B′OB.

En vista de esto, un ángulo cuyos lados sean respectivamente perpendiculares á los del ángulo AOB, será *suplementario de éste* si sus lados están dos á dos dirigidos *en los mismos sentidos* ó *en sentidos contrarios* que los del ángulo A′OB′ formado como acabamos de decir; y será *igual al* AOB si tiene

un lado en el mismo sentido y otro en sentido contrario con respecto al ángulo A'OB'.

NOTA 6.ª (de la pág. 37).

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono cóncavo es igual al número $2n - 4$ (siendo la unidad el ángulo recto), *si* n *es el número de lados del polígono.*

En efecto: llegaremos á un polígono cóncavo cualquiera P *(fig. 3.ª)* si partimos de un cierto polígono convexo y reemplazamos sucesivamente un lado ó un segmento de lado por una quebrada de dos rectas. Demostremos, pues, que si en un polígono en el cual se verifique el teorema hacemos una de estas modificaciones, el teorema subsiste.

1.º Sea el polígono ACDEF *(fig. 4.ª)* en el cual va á ser reemplazado el lado AC por la quebrada ABC. El polígono ACDEF tendrá $n - 1$ lados, y la suma de las medidas de sus ángulos es

$$2(n-1) - 4 = 2n - 6:$$

se obtendrá la suma de las medidas de los ángulos del polígono ABCDEF quitando á la anterior las medidas de los ángulos BAC y BCA, y añadiendo la del entrante B, que equivale á 4 — ABC. Así,

$$S = (2n-6) - BAC - BCA + 4 - ABC = 2n - 4.$$

2.º Sea el polígono DEFGH *(fig. 5.ª)* en el cual va á ser reemplazado el segmento AC por la quebrada ABC. El polígono DEFGH tendrá $n - 3$ lados, y la suma de las medidas de sus ángulos es

$$2(n-3) - 4 = 2n - 10:$$

se obtendrá la suma de las medidas de los ángulos del polígono ABCDEFGH aumentándo la anterior en

$$(2 - \text{BAC}) + (4 - \text{ABC}) + (2 - \text{BCA}) = 6.$$

Así,

$$S = (2n - 10) + 6 = 2n - 4.$$

El lector verá fácilmente las transformaciones sucesivas en la fig. 3.ª como en cualquier otro polígono cóncavo.

La suma algebráica de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono cóncavo, es igual al número constante 4 (siendo siempre la unidad el ángulo recto), si se consideran como sumandos *negativos* los exteriores que corresponden á ángulos entrantes.

En efecto, prolongando todos los lados del polígono cóncavo ABCDEFG *(fig. 6.ª)* en los sentidos mismos en que suponemos recorrido el perímetro, si representamos por B, C, D. E, F, G, A los números de medida de los ángulos interiores, y por b, c, d, e, f, g, a los números de medida de los exteriores, se ve que:

$$\left.\begin{aligned} \text{B} + b &= 2 \\ \text{C} - c &= 2 \\ \text{D} + d &= 2 \\ \text{E} + e &= 2 \\ \text{F} - f &= 2 \\ \text{G} - g &= 2 \\ \text{A} + a &= 2 \end{aligned}\right\},$$

y por tanto,

$$S + [b - c + d + e - f - g + a] = 2n;$$

de donde

$$[b - c + d + e - f - g + a] = 2n - S = 2n - (2n - 4) = 4.$$

Esta importante propiedad es más claramente percibida si

se imagina que una recta OB′ paralela á AB′ *(figuras 6.ª y 7.ª)* y en el mismo sentido que ella gire alrededor del punto fijo O, en magnitudes angulares iguales á los ángulos *exteriores* del polígono, pasando á ser paralela á cada uno de los sucesivos lados BC, CD, DE..., y en los mismos sentidos en que estos son recorridos: gira primero la magnitud angular $B'OC' = b$ en el sentido (que adoptamos como positivo) en que lo hacen las agujas de un reloj; despues en sentido negativo (retrocede) la magnitud angular $C'OD' = c$; luego en sentido positivo (avanza) la magnitud angular $D'OE' = d$, y así sucesivamente; la penúltima posicion que ocupa la recta móvil es OA′, y al girar la magnitud angular $A'OB' = a$ en sentido positivo (avanzando), vuelve á la posición OB′ de que partió, despues de haber dado *una vuelta entera* alrededor del punto fijo O. Cuando el polígono es *convexo*, es decir, que no tiene ningun ángulo entrante, los ángulos exteriores son suplementos *positivos* de los ángulos del polígono, y por consiguiente, la recta móvil da *la vuelta entera* alrededor del punto fijo O, avanzando por giros sucesivos, que tienen lugar siempre en el mismo sentido (sumandos positivos).

NOTA 7.ª (de la pág. 38).

Se demuestra fácilmente que el punto *o* en que se cortan las diagonales de un paralelógramo es un *centro;* es decir, que divide en dos partes iguales á toda recta que pase por él y esté limitada en el contorno ABCD.

En efecto, si se considera una recta cualquiera MON, los triángulos opuestos MOB y NOD, ó bien los MOA y NOC, son iguales por tener un lado igual adyacente á dos ángulos iguales; luego OM = ON.

NOTA 8.ª (de la pág. 51).

Son ciertos los tres recíprocos siguientes:

1.° *Si dos cuerdas interceptan arcos iguales sobre una circunferencia* (y no se cortan en el interior de ésta), *son paralelas.*

2.° *Si una cuerda y una tangente interceptan arcos iguales, son paralelas.*

3.° *Si dos tangentes interceptan arcos iguales, son paralelas.*

En efecto:

1.° Si se une el centro con el punto medio de una de las cuerdas, este diámetro será perpendicular á ella y dividirá al arco subtendido en dos partes iguales; por consiguiente, añadiendo ó quitando los arcos interceptados, que son iguales por hipótesis, se ve que el citado diámetro pasa por el centro y por el punto medio del arco subtendido por la otra cuerda, y por tanto será perpendicular á ésta; las dos cuerdas serán, pues, paralelas, como perpendiculares á una misma recta.

2.° Si se une el centro con el punto de contacto, este diámetro será perpendicular á la tangente; pero además este diámetro pasa por el centro y por el punto medio del arco, y será, por tanto, perpendicular á la cuerda; la tangente y la cuerdo serán, pues, paralelas, como perpendiculares á una misma recta.

3.° Si se une el centro con uno de los puntos de contacto, este diámetro será perpendicular á la tangente; pero como este diámetro ha de dividir á la circunferencia en dos partes iguales, tendrá que pasar por el otro punto de contacto y será, por tanto, perpendicular á la otra tangente; las dos tangentes serán, pues, paralelas, como perpendiculares á una misma recta.

NOTA 9.ª (de la pág. 57).

Para que la definicion de número inconmensurable pueda aceptarse, hay que *demostrar* que los números $\frac{k}{n}$ y $\frac{k+1}{n}$ tienden hacia un *límite*, y que este límite es el mismo, cualquiera que sea la ley segun la cual se haga crecer indefinidamente á n. Ó más brevemente: *hay que demostrar que el límite existe y que es único.*

La demostracion que proponen MM. Rouché y Comberousse está dividida en dos partes:

1.ª *Si* $\frac{k}{n}$ *es el número que expresa la medida de* G *en ménos de* $\frac{1}{n}$; *y* $\frac{k'}{nm}$ *es el número que la expresa en ménos de* $\frac{1}{nm}$, *el segundo número es igual ó mayor que el primero* (suponiendo que n y m son dos números enteros cualesquiera).

En efecto, si U es la magnitud *unidad*, se tiene

$$\left.\begin{aligned} k.\frac{U}{n} < G < (k+1).\frac{U}{n} \\ k'.\frac{U}{nm} < G < (k'+1).\frac{U}{nm} \end{aligned}\right\};$$

y multiplicando estas magnitudes por el número entero n, m, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} km.U < nm.G < (k+1)\,m.U \\ k'.U < nm.G < (k'+1).U \end{aligned}\right\};$$

las segundas desigualdades indican que $k'.U$ es el mayor múltiplo de U contenido en la magnitud $nm.G$; y como la primera desigualdad deja ver que $km.U$ es un múltiplo de U menor que dicha magnitud, deducimos que

$$km.U \leqq k'.U, \text{ de donde } k' \geqq km;$$

y dividiendo por nm, se llega á

$$\frac{k'}{nm} \geqq \frac{k}{n}.$$

2.ª Fijándonos en una cierta ley para el crecimiento indefinido del número de partes iguales en que se divida la unidad U, y suponiendo que

$$\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{4}, \frac{h_3}{8}, \ldots \frac{h_s}{2^s}, \ldots$$

son los números que expresan la medida de G en menos de

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \frac{1}{2^s}, \ldots,$$

se ve (1.°) que cada uno de esos números será mayor ó igual que el precedente. Pero como todos ellos son números de medida de magnitudes menores que G, todos ellos habrán de ser menores que $\frac{h_1 + 1}{2}$, puesto que este número es la medida de una magnitud mayor que G. Los números

$$\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{4}, \frac{h_3}{8}, \ldots \frac{h_s}{2^s}, \ldots,$$

tienden, por consiguiente, hácia *un cierto límite* L cuando s crece indefinidamente.

Los dos números

$$\frac{h_s}{2^s} \text{ y } \frac{h_s + 1}{2^s}$$

tienden hacia un mismo límite, porque su diferencia $\frac{1}{2^s}$ decrece indefinidamente.

Para demostrar ahora que este límite es el mismo, sea cualquiera la ley segun la cual crezca indefinidamente, observemos que

$$\left.\begin{aligned}\frac{k}{n} &< \frac{h_s+1}{2^s}\\ \frac{h_s}{2^s} &< \frac{k+1}{n}\end{aligned}\right\} \text{ ó bien } \left.\begin{aligned}\frac{k}{n} &< \frac{h_s+1}{2^s}\\ \frac{h_s}{2^s} - \frac{1}{n} &< \frac{k}{n}\end{aligned}\right\};$$

es decir, que

$$\frac{h_s}{2^s} - \frac{1}{n} < \frac{k}{n} < \frac{h_s+1}{2^s},$$

$\frac{k}{n}$ está comprendido entre dos números que tienden hacia L cuando s y n crecen indefinidamente. Por consiguiente,

$$\text{lim. } \frac{k}{n} = \text{L}.$$

NOTA 10 (de la pág. 104).

Se sabe que las bisectrices interior y exterior del ángulo A de un triángulo ABC descansan sobre la base BC en dos puntos D y D′, conjugados armónicos con respecto á B y C, y conviene hacer notar:

1.° Que si el vértice A está á la izquierda de la perpendicular levantada á BC en su punto medio O, es decir, si dista menos de B que de C, ó lo que es lo mismo, si la relacion de sus distancias á estos puntos es menor que 1, los puntos D y D′ quedarán ambos á la izquierda de O.

2.° Que si el vértice A está, por el contrario, á la derecha de la perpendicular, es decir, si dista más de B que de C, ó lo que es lo mismo, si la relacion de sus distancias á estos puntos es mayor que 1, los puntos D y D′ quedarán ámbos á la derecha de O.

3.° En el caso *límite comun de los dos anteriores,* en que el punto A esté situado en la misma perpendicular levantada á BC en su punto medio O, es decir, en el caso en que equidiste de B y C (triángulo isósceles), ó lo que es lo mismo, en que la relacion de sus distancias á estos puntos es 1, el punto D en que descansa la bisectriz interior coincide con O, y el punto D' en que descansaria la bisectriz exterior se ha alejado al infinito (á la izquierda ó á la derecha), lo cual significa que esta bisectriz exterior es paralela á BC.

NOTA II (de la pág. 106).

Es conveniente que el principiante se acostumbre á ver los lugares geométricos en su variacion continua siempre que intervengan magnitudes ó relaciones que puedan recibir valores por la ley de continuidad.

Así, respecto á la circunferencia, lugar geométrico de los puntos, tales que la relacion de sus distancias á dos fijos B y C sea un número constante K, se ve que:

Empieza reducida al punto B para $K = 0$, puesto que los dos extremos de su diámetro se hallan reunidos en B;

Crece de un modo continuo á medida que K aumenta por la ley de continuidad, puesto que los dos extremos de su diámetro se alejan de B á derecha é izquierda de un modo continuo;

Se convierte (como debia ser) en la perpendicular levantada á BC en su punto medio O para $K = 1$, puesto que uno de los extremos del diámetro se halla en O y el otro en el infinito;

Decrece luego de un modo continuo á medida que K sigue su aumento por la ley de continuidad, puesto que los dos extremos de su diámetro se acercan á C á izquierda y derecha de un modo continuo;

Concluye reducida al punto C para $K = \infty$, puesto que los dos extremos de su diámetro se hallan reunidos en C.

El diámetro variable de la circunferencia en todos los estados por que pasa, es la distancia entre cada dos puntos conjugados armónicos con respecto á B y C; puntos situados á la izquierda del punto O para valores de K menores que 1, á la derecha del punto O para valores de K mayores que 1.

NOTA 12 (de la pág. 122).

El teorema:

Si en una serie de secantes que parten de un punto O, *y descansan sobre una recta* ABCD,..., *se traza una recta* A'B'C'D'... *paralela á* ABCD,..., *las secantes quedarán divididas en partes proporcionales*,

admite este otro como

Recíproco: *Si en una serie de secantes que parten de un punto* O, *y descansan sobre una recta* ABCD,..., *se marcan puntos* A', B', C', D',..., *que las dividan en partes proporcionales, estos puntos estarán en una línea recta* A'B'C'D',..., *paralela á* ABCD...

En efecto, basta observar que la recta de union A'B' habrá de ser paralela á AB; la B'C' á BC; la C'D' á CD,..., y que, por hipótesis, los puntos A, B, C, D,... están en una línea recta.

NOTA 13 (de la pág. 132).

Se sabe que: *el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus distancias á dos fijos* B *y* C *(figura 8.ª) sea* K^2, *es una circunferencia cuyo centro está en el punto*

medio D *de la recta* BC, *y cuyo radio se determina por la fórmula*

$$R = \sqrt{\left(\frac{K}{\sqrt{2}}\right)^2 - \overline{BD}^2}.$$

Observando que la magnitud R es (por su fórmula) cateto de un triángulo rectángulo que tenga por otro cateto la longitud dada BD, y por hipotenusa la longitud $\left(\frac{K}{\sqrt{2}}\right)$, y notando que esta longitud es á su vez (por el teorema de Pitágoras) el cateto de un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa sea la longitud dada K, se llega á la siguiente construccion gráfica:

Trácese por uno de los puntos dados, B por ejemplo, la recta indefinida BN con la inclinacion de 45° sobre la recta dada BC; tómese sobre esta la magnitud BM, igual á K, y bájese desde el punto M la perpendicular MN á la direccion BN; haciendo, finalmente, centro en B con la magnitud BN por radio, córtese la perpendicular indefinida DA y se tendrá en la longitud DA el radio pedido R, con el cual se trazará la circunferencia lugar geométrico.

La fórmula de R nos dice que, segun que

$$\frac{K}{\sqrt{2}} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} BD \ldots \text{ será R } \begin{cases} \text{imaginario} \\ \text{nulo} \\ \text{real} \end{cases}$$

lo cual nos muestra tambien la figura; en efecto, si se toma BM igual á BE (es decir, igual á BD $\sqrt{2}$), la perpendicular M'N' da lugar á un triángulo BM'N' igual á BDE, por tener la hipotenusa y un ángulo agudo iguales; por consiguiente, la magnitud BN' es igual á BD y el arco del círculo descrito desde el punto B como centro con el radio BN' es tangente en D á la perpendicular DA. Se ve, pues, que: *Si la longitud* BM' = K *es menor que* BM' = DB $\sqrt{2}$, el

arco de círculo descrito desde el punto B con el radio BN' es exterior á la recta DA *y no hay lugar geométrico. Si la longitud* BM = K *es igual á* BD $\sqrt{2}$, el arco de círculo descrito con el radio BN' es tangente á la recta DA en el punto D, y *el lugar geométrico* es una circunferencia de radio nulo, cuyo centro es D; es decir, *se reduce al punto* D. *Si la longitud* BM = K *es mayor que* BM' = BD $\sqrt{2}$, el arco de círculo corta en el punto A, *y el lugar geométrico es la circunferencia descrita desde el punto* D *como centro con el radio* DA.

Creciendo la longitud dada K indefinidamente desde BD $\sqrt{2}$ por la ley de continuidad, se ve la circunferencia (lugar geométrico) crecer indefinidamente á partir del punto D, que es el centro comun. Al pasar K por el valor particular BC, la circunferencia es la que tiene por diámetro BC, lugar geométrico, en efecto, de los puntos, tales que la suma de los cuadrados de sus distancias á B y C es $\overline{BC}^2$: las circunferencias envueltas por esta corresponden á los valores de K menores que BC, y las circunferencias que la envuelven corresponden á los valores de K, mayores que BC.

Se sabe que: *el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á dos fijos* B *y* C *(fig. 9.ª) sea* K^2, *es el sistema de dos rectas perpendiculares á* BC, *cuya distancia al punto medio* D *de esta recta se determina por la fórmula*

$$\delta = \frac{K^2}{4\,BD} = \frac{\left(\frac{K}{2}\right)^2}{BD},$$

Observando que la distancia δ es (por su fórmula) la tercera proporcional á BD y $\left(\frac{K}{2}\right)$, la construccion gráfica se reduce á lo siguiente:

Tómese sobre la perpendicular indefinida DM', levantada

á BC en su punto medio, la magnitud DM, igual á $\left(\frac{K}{2}\right)$; únanse los puntos B y C con M, y levántense á estas rectas las perpendiculares MN y MP en el punto M, las cuales cortarán á la recta BC en los puntos N y P á la distancia pedida δ del punto medio D, porque esta longitud $DN = DP$ es la tercera proporcional á BD y $DM = \frac{K}{2}$ por una propiedad conocida del triángulo rectángulo.

Este lugar geométrico existe siempre, cualesquiera que sean la longitud dada K y la distancia entre los puntos fijos B y C.

La fórmula de δ nos dice que si K crece indefinidamente por ley de continuidad desde cero, δ crece tambien indefinidamente por ley de continuidad desde cero, y la construccion gráfica así lo muestra. Las dos perpendiculares empiezan reunidas en la DM', que es, en efecto, el lugar geométrico de los puntos, tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á B y C es *nula;* se van alejando del punto medio D por ley de continuidad, y pasan por los mismos puntos dados B y C cuando K es igual á BC, en cuyo caso particular las perpendiculares á BC, levantadas en sus extremos, son, en efecto, el lugar geométrico de los puntos, tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á B y C es $\overline{BC}^2$: las perpendiculares que están dentro de estas corresponden á los valores de K, menores que BC, y las que están fuera corresponden á los valores de K, mayores que BC.

NOTA 14 (de la pág. 135).

Propongámonos calcular los valores x é y de las diagonales de un cuadrilátero *cualquiera*, y será fácil luégo demostrar el directo y el *recíproco* del siguiente

TEOREMA.

En un cuadrilátero inscriptible, la relacion de las diagonales es igual á la relacion entre la suma de los productos de los lados que terminan en las extremidades de la primera diagonal, y la suma de los productos de los lados que terminan en las extremidades de la segunda.

Consideremos la diagonal x de un cuadrilátero cualquiera ABCD (*fig. 10*): los triángulos ACB y ACD nos dan

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= a^2 + b^2 - 2a.\mathrm{B}m \\ x^2 &= c^2 + d^2 + 2d.\mathrm{D}n \end{aligned}\right\};$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} x^2cd &= (a^2 + b^2)\,cd - 2acd.\mathrm{B}m \\ x^2ab &= (c^2 + d^2)\,ab + 2abd.\mathrm{D}n \end{aligned}\right\};$$

y sumando se tiene

$$x^2\,(ab + cd) = (a^2 + b^2)\,cd + (c^2 + d^2)\,ab + 2ad\,[b.\mathrm{D}n - c.\mathrm{B}m],$$

ó bien

$$x^2\,(ab + cd) = (ac + bd)\,(ad + bc) + 2ad\,[b.\mathrm{D}n - c.\mathrm{B}m];$$

de donde se deduce la fórmula

$$x^2 = \frac{(ac + bd)\,(ad + bc)}{ab + cd} + \frac{2ad}{ab + cd}\,[b.\mathrm{D}n - c.\mathrm{B}m] = \mathrm{H} + \mathrm{S},$$

que *da el valor de la diagonal* x.

De los triángulos BDC y BDA, se deduce análogamente la fórmula

$$y^2 = \frac{(ac + bd)\,(ab + cd)}{ad + bc} + \frac{2cd}{ad + bc}\,[b.\mathrm{A}q - a.\mathrm{C}p] = \mathrm{K} + \mathrm{T},$$

que *da el valor de la diagonal* y.

Obsérvese que H y K son esencialmente positivas, y que

S y T no pueden ser de un mismo signo. Lo primero es evidente. Para hacer ver lo segundo, vamos á demostrar que,

$$\text{segun que } S \gtreqless 0\ldots, \text{ será } B + D \gtreqless 180^0.$$

En efecto,

$$\text{según que } S \gtreqless 0, \text{ se tiene } b.Dn \gtreqless c.mB \text{ ó } b \gtreqless \frac{c.Bm}{Dn};$$

pero tomando sobre D*n* *(fig. 11)* la longitud $Dn' = Bm$, y formando el triángulo rectángulo D*n*'C', la hipotenusa DC' es la cuarta proporcional

$$DC' = \frac{c.Bm}{Dn};$$

comparando este triángulo rectángulo D*n*'C con el B*m*C *(figura 10)*, colocado en la posición D*n*'C'' *(fig. 11)*, se ve que

$$\text{Si } b \gtreqless DC'\ldots \text{ será } B \gtreqless CDn = 180^0 - D; \text{ es decir, } B + D \gtreqless 180^0.$$

Del mismo modo,

$$\text{segun que } T \gtreqless 0\ldots, \text{ será } A + C \gtreqless 180^0.$$

Se comprende ya que S y T no pueden ser del mismo signo, puesto que la suma de los cuatro ángulos del cuadrilátero es igual á 360°.

La demostracion del teorema que hemos enunciado y la de su *recíproco*, son facilísimas despues del estudio analítico que acabamos de presentar.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA DIRECTO.

En efecto, si el cuadrilátero es inscriptible, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} B + D = 180^0; \text{ por consiguiente, } S = 0 \\ A + C = 180^0; \text{ por consiguiente, } T = 0 \end{array}\right\};$$

y, por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = H = \dfrac{(ac + bd)\,(ad + bc)}{ab + cd} \\ y^2 = K = \dfrac{(ac + bd)\,(ab + cd)}{ad + bc} \end{array}\right\};$$

de donde

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{H}{K}} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

DEMOSTRACION DEL RECÍPROCO.

En efecto, si se supone que

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}, \text{ es decir, } \frac{x^2}{y^2} = \frac{H}{K},$$

se tiene

$$\frac{H + S}{K + T} = \frac{H}{K};$$

pero como S y T no pueden ser del mismo signo, la relacion $\frac{S}{T}$ no puede ser igual á $\frac{H}{K}$, que es positiva: por consiguiente, la igualdad anterior obliga á

$$\left.\begin{array}{l} S = 0; \text{ por consiguiente, } B + D = 180 \\ T = 0; \text{ por consiguiente, } A + C = 180 \end{array}\right\};$$

el cuadrilátero es, pues, inscriptible (*).

(*) Se podria dar la siguiente demostracion del recíproco:
Fijémonos en dos vértices cualesquiera B y C, y considerando que CD sea el mayor de los dos lados opuestos BA y CD (es decir, $a < c$) *(fig. 12)*, hagamos pasar la circunferencia por los tres vértices B, C, D: el teorema consiste en demostrar que el cuarto vértice A no podrá ser interior ni exterior á ella si se supone que

NOTA 15 (de la pág. 154).

POLÍGONOS REGULARES DE ESPECIE SUPERIOR.

Si se considera una circunferencia dividida en m partes iguales, que llamaremos a, y se unen sucesivamente á partir de A los puntos de división entre los cuales medie un mismo número p de partes se llegará por primera vez al punto de

---

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

En efecto: si el vértice A quedara interior ó exterior, y se tomara la cuerda BA′ igual al lado BA = a se formaria el *cuadrilátero inscripto* A′BCD, que tendria comunes con el propuesto dos lados b, c y una diagonal y; su lado a' sería igual á a, y por el teorema directo se podria escribir

$$\frac{x'}{y} = \frac{ad' + bc}{ab + cd'}.$$

Ahora bien, considerando los triángulos A′BD y ABD, que tienen dos lados iguales, se ve que:

Si el vértice A *es interior,*

$$d' > d.$$

Pero siendo $a < c$, se ve fácilmente que

$$\frac{ad' + bc}{ab + cd'} < \frac{ad + bc}{ab + cd};$$

y como por hipótesis

$$\frac{ad + bc}{ab + cd} = \frac{x}{y},$$

se tiene en definitiva

$$\frac{x'}{y} < \frac{x}{y};$$

lo cual es absurdo, porque los triángulos A′BC y ABC, que tienen dos lados iguales, dan

$$x' > x, \text{ y por tanto } \frac{x'}{y} > \frac{x}{y}.$$

partida A; es decir, se cerrará el polígono cuando se haya recorrido sobre la circunferencia la longitud que sea *mínimo múltiplo* de ma y pa.

En efecto: si se llega al punto de partida A, el arco total recorrido será evidentemente un múltiplo de pa (arco subtendido por cada lado del polígono) y un múltiplo de ma (circunferencia completa). Y recíprocamente: se llegará al punto de partida A, si se considera un arco total que sea múltiplo común de pa y ma; porque, repitiendo un cierto número de veces el arco pa, se tendrá un arco total que abrace un número exac-

---

Si el vértice A *es exterior,*

$$d' < d.$$

Pero siendo $a < c$, se ve fácilmente que

$$\frac{ad' + bc}{ab + cd'} > \frac{ad + bc}{ab + cd'}$$

y como por hipótesis

$$\frac{ad + bc}{ab + cd} = \frac{x}{y},$$

se tiene en definitiva

$$\frac{x'}{y} > \frac{x}{y};$$

lo cual es absurdo, porque los triángulos A′BC y ABC, que tienen dos lados iguales, dan

$$x' < x, \text{ y por tanto, } \frac{x'}{y} < \frac{x}{y}.$$

La demostracion que precede es debida al antiguo oficial de ingenieros D. José Garin, ex-profesor de la Academia del Cuerpo.

Del teorema contrario ha dado el señor comandante de artillería D. Diego Ollero, ex-profesor de la Academia del Cuerpo, la demostracion siguiente:

Se ha demostrado que si en un triángulo, cuyos lados designaremos por a, b y c, se hace crecer un lado a por ejemplo, permaneciendo constantes los otros dos, el ángulo A crece tambien; y es evidente que para el valor mínimo de a, que sería $b - c$ (en el supuesto de ser $b > c$) corresponde $A = 0$, y para el máximo $a = b + c$ el valor de $A = 180°$. Si se supone que a crece de una manera continua, A tambien crecerá de una manera continua é irá pasando por todos los estados de magnitud intermedios, pues para cualquier valor de A podrá

to (entero) de circunferencias; es decir, se llegará al punto de partida A.

Se ve, pues, que el mínimo múltiplo comun de *pa* y *ma* corresponde á la primera vez que se llegue al punto de partida A; puesto que si se hubiera llegado ántes, se tendria un múltiplo comun menor que el *mínimo*.

El polígono así formado es *regular*, puesto que todos los lados son cuerdas que subtienden arcos iguales (pa), y todos los ángulos son inscritos en arcos iguales ($2\,pa$).

Examinemos ahora toda la variedad de polígonos regula-

---

siempre construirse el triángulo con los lados b y c y quedará determinado el otro lado a.

Recordado el principio anterior, pasemos á demostrar que *si un cuadrilátero* A B C D *(fig. 13) no es inscriptible, la razon* $\frac{AC}{BD}$ *será diferente de la razon*

$$\frac{ad+bc}{ab+cd}$$

Con arreglo al supuesto, la suma de dos de los ángulos opuestos del cuadrilátero será menor que 180°, y la suma de los otros dos mayor que este mismo valor.

Para fijar las ideas, admitamos que es $B+D<180°$, y supongamos además que $a+b<d+c$.

Si se hace crecer de una manera continua la diagonal A C, podremos concebir las formas que sucesivamente irá tomando el cuadrilátero, cuyos lados suponemos constantes. Segun se ha indicado, los ángulos B y D irán creciendo de una manera continua y tambien su suma, convirtiéndose en 180° el ángulo en D cuando la diagonal A C sea igual á $a+b$, en cuyo caso la suma $B+D$ tomará un valor mayor que 180°. Existirá, pues, un caso intermedio en el que se verifique que la suma de los ángulos B y D sea 180°, y en dicho cuadrilátero, que designaremos por A′ B′ C′ D′ *(fig. 14)*, se verificará, con arreglo á la proposicion directa,

$$\frac{A'C'}{B'D'}=\frac{ad+bc}{ab+dc}.$$

Comparando los dos cuadriláteros A B C D y A′ B′ C′ D′, se observa que, por ser $B+D<B'+D'$, deberá verificarse

$$A+C>A'+C',$$

lo cual exige que uno por lo menos de los ángulos A ó C sea mayor que sus correspondientes A′ ó C′. Si se admite, pues, que $A<A'$, de los triángulos B A D y B′ A′ D′ se deduce

$$BD>B'D',$$

res que se obtiene uniendo (de p en p) de todas las maneras posibles los puntos de division de la circunferencia en m partes iguales.—Observaremos primeramente que unir de m en m los puntos de division, equivaldria á no moverse del punto de partida A, es decir, á no trazar lado alguno de polígono; y que:

unir de		unir de
$m+1$ en $m+1$	equivale á	1 en 1
$m+2$ » $m+2$	»	2 » 2
. . .	.	. . .
. . .	.	. . .

Basta, pues, examinar los polígonos regulares que se obtienen uniendo de

$$1 \text{ en } 1;\ 2 \text{ en } 2;\ 3 \text{ en } 3;\ldots\ (m-1) \text{ en } (m-1).$$

---

lo cual indica que también el ángulo C es mayor que C'. Comparando, finalmente, las razones $\frac{AC}{BD}$ y $\frac{A'C'}{B'D'}$ se observa que por ser $AC < A'C'$ y $BD > B'D'$, se verificará

$$\frac{AC}{BD} < \frac{A'C'}{B'D'};$$

y, por lo tanto,

$$\frac{AC}{BD} < \frac{ad+bc}{ab+dc}$$

En el caso de ser $B + D > 180°$, se tendria $A + C < 180°$, y por las mismas consideraciones deduciriamos

$$\frac{AC}{BD} > \frac{ad+bc}{ab+dc}$$

y queda demostrada la proposicion.

Tenemos el mayor gusto en dar á conocer estas demostraciones de los distinguidos profesores ya citados.

Pero si se observa más atentamente, se nota que.

unir de		unir de
$m-1$ en $m-1$	equivale á	1 en 1
$m-2$ » $m-2$	»	2 » 2
$m-3$ » $m-3$	»	3 » 3
. . .	.	. . .
. . .	.	. . .
. . .	.	. . .

porque si dos puntos de division de la circunferencia comprenden en un sentido $m-p$ *emésimas* partes, abrazan tambien por otro lado p *emésimas* partes; basta, pues, en definitiva, examinar los polígonos regulares que se obtienen uniendo de

$$1 \text{ en } 1;\ 2 \text{ en } 2;\ 3 \text{ en } 3;\ldots \frac{m-1}{2} \text{ en } \frac{m-1}{2};$$

ó de

$$1 \text{ en } 1;\ 2 \text{ en } 2;\ 3 \text{ en } 3;\ldots \frac{m}{2}-1 \text{ en } \frac{m}{2}-1;$$

segun que m sea impar ó par; lo cual se expresa diciendo que basta considerar los números de la escala

$$1,\ 2,\ 3,\ldots\ p,\ldots\ \frac{m-1}{2};\ \text{ó}\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ p,\ldots\ \frac{m}{2}-1:$$

en el caso de ser m par, no se considera la unión de los puntos de $\frac{m}{2}$ en $\frac{m}{2}$, porque los lados del polígono serian dos solamente y aparecerian reunidos en un solo y único diámetro; es decir, que no habria polígono.

Ahora bien: entrando en el exámen detenido de los números de la escala con el sentido que acabamos de decir, se ve que los números p y m estarán en uno de estos tres casos:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.^\circ & p \text{ divisor de } m \\ 2.^\circ & \left.\begin{array}{l} p \\ m \end{array}\right\} m.\ c.\ d.\ldots\ \theta \\ 3.^\circ & p \text{ primo con } m \end{array}\right\}.$$

En el primer caso, el arco pa es divisor de ma, y, por consiguiente, el mínimo múltiplo es *una circunferencia;* lo que prueba que el polígono tendrá un número de lados indicado por el número de veces que el arco pa quepa en la circunferencia ma; es decir, indicado por el número entero $\frac{m}{p}$, y que se cerrará al dar la primera vuelta.

En el segundo caso, el mínimo múltiplo de pa y ma es

$$\frac{mp}{\theta} a = \frac{m}{\theta} (pa) = \frac{p}{\theta} (ma);$$

lo que prueba que el polígono tendrá un número de lados indicado por el número de veces que el arco pa quepa en el mínimo múltiplo; es decir, indicado por el número entero $\frac{m}{\theta}$, y que se cerrará al dar el número de vueltas que quepan en el mínimo múltiplo; es decir, que el número de vueltas estará indicado por el número entero $\frac{p}{\theta}$.

En el tercer caso, el mínimo múltiplo de pa y ma es

$$mpa = m\,(pa) = p\,(ma);$$

lo que prueba que el polígono tendrá m lados, y que se cerrará al dar p vueltas.

Para expresarnos brevemente diremos que un polígono es del *género* m cuando tiene m lados, y que es de la *especie* p cuando da p vueltas para cerrarse.

Tenemos, pues, en definitiva, que entre los números p de la escala:

1.° *Los divisores de* m *dan polígonos del género* $\frac{m}{p}$, *especie primera;*

2.° *Los que tienen con* m *un máximo común divisor* θ, *dan polígonos del género* $\frac{m}{\theta}$, *especie* $\frac{p}{\theta}$;

BIBLIOTECA DEL C.C.A.M.

3.° *Los primos con* m *dan polígonos del género* m, *especie* p.

Como se ve, solo estos últimos dan polígonos del género *m;* todos los demás dan géneros $\left[\frac{m}{p} \text{ ó } \frac{m}{\theta}\right]$ inferiores á *m:* por consiguiente, cuando tan solo se trata de averiguar la variedad de especies que admite un género *m,* bastará señalar los números *primos* con *m* que se encuentran en la escala. Así se descubre la variedad de especies que admite el género *triángulo,* el género *cuadrilátero,* el género *pentágono,* etc., etc. Véase el siguiente cuadro de algunos géneros escogidos. Hemos tachado los números primos con *m en cada escala:*

m	ESCALA DE NÚMEROS.	GÉNERO.	ESPECIES.
3	~~1~~.	3	1.
4	~~1~~.	4	1.
5	~~1~~, ~~2~~.	5	1, 2.
6	~~1~~, 2.	6	1.
10	~~1~~, 2, ~~3~~, 4.	10	1, 3.
12	~~1~~, 2, 3, 4, ~~5~~.	12	1, 5.
15	~~1~~, ~~2~~, 3, ~~4~~, 5, 6, ~~7~~. . . .	15	1, 2, 4, 7.
20	~~1~~, 2, ~~3~~, 4, 5, 6, ~~7~~, 8, ~~9~~.	20	1, 3, 7, 9.
30	~~1~~, 2, 3, 4, 5, 6, ~~7~~, 8, 9, 10, ~~11~~, 12, ~~13~~, 14. . .	30	1, 7, 11, 13.

Hemos visto: 1.°, que los números *p* de la escala divisores de *m,* dan polígonos del género $\frac{m}{p}$, especie primera; 2.° los que tengan con *m* un máximo comun divisor θ, dan polígonos del género $\frac{m}{\theta}$, especie $\frac{p}{\theta}$. Si recordamos todo lo dicho anteriormente, es fácil demostrar ahora que:

Si se unen (*de* p *en* p) *de todas las maneras posibles los pun-*

tos de division de una circunferencia en m *partes iguales, se obtendrán polígonos regulares, cuyos* GÉNEROS *estarán indicados por todos los divisores simples y compuestos del número* m, *y aparecerán* TODAS LAS ESPECIES *que admite cada género.*

En efecto:

1.° *Todos* los divisores simples y compuestos del número m (á excepcion del mismo m y de su mitad $\frac{m}{2}$ si es par) se encuentran en la escala

$$1, 2, 3, \ldots p, \ldots \frac{m-1}{2}; \text{ ó } 1, 2, 3, \ldots p, \ldots \frac{m}{2} - 1,$$

puesto que un divisor del número m no puede ser mayor que su mitad. Si se ensaya un divisor p, el número $\frac{m}{p}$ (que indica el género obtenido) es también divisor de m; por consiguiente, al ensayar todos los divisores simples y compuestos de m como números de la escala, se obtendrán géneros indicados por todos esos mismos divisores, de tal modo que si se ensayan los divisores p por órden creciente de magnitud, los géneros $\frac{m}{p}$ irán dando esos mismos divisores en órden decreciente. Los polígonos así formados son todos de 1.ª especie.

2.° Al ensayar los números p que tiene factor comun (θ) con m los géneros $\frac{m}{\theta}$ son divisores de m, y no serán, por consiguiente, géneros nuevos, puesto que ya en el ensayo anterior (1.°) se obtuvieron como géneros todos los divisores de m. Pero si bien no son géneros nuevos, aparecen, sí, *especies superiores* $\left(\frac{p}{\theta}\right)$ de algunos de dichos géneros, y vamos á ver que aparecerán *todas* las especies superiores que admita cada género; en efecto, si consideramos un género $\frac{m}{\theta}$ y formamos la correspondiente escala

$$1, 2, 3, \ldots e \ldots \frac{\frac{m}{\theta} - 1}{2}; \text{ ó } 1, 2, 3, \ldots e \ldots \frac{m}{2\theta} - 1;$$

en la cual e indique una especie del género $\frac{m}{\theta}$ (por ser el número e primo con $\frac{m}{\theta}$), podremos asegurar que el entero $e.\theta$ se encuentra forzosamente en la escala

$$1, 2, 3, \ldots p \ldots \frac{m-1}{2}, \text{ ó } 1, 2, 3, \ldots p \ldots \frac{m}{2} - 1,$$

y es uno de los números p de que estamos tratando; porque siendo

$$e < \frac{m}{2\theta}, \text{ se ve que } e.\theta < \frac{m}{2};$$

y ese número $e.\theta$ [que llamamos p] no es divisor de m, puesto que e es primo con $\frac{m}{\theta}$, ni es primo con m, puesto que tiene con él un factor comun θ. Vemos por consiguiente, que hay un cierto número $p = e.\theta$ que conduce á la especie $\frac{p}{\theta} = e$ del género $\frac{m}{\theta}$: lo dicho de una especie e se diria de todas; luego aparecerán todas las especies del género $\frac{m}{\theta}$. Lo mismo diríamos de cada uno de los géneros, y queda así demostrada la proposicion que habíamos enunciado.

En resúmen;

Si se usan todos los números de la escala

$$1, 2, 3, \ldots p \ldots \frac{m-1}{2}, \text{ ó } 1, 2, 3, \ldots p \ldots \frac{m}{2} - 1,$$

se obtienen todas las especies de los polígonos regulares cuyos

géneros son los divisores simples y compuestos de *m*, de esta suerte:

Los divisores de m, *dan la primera especie de todos los géneros indicados*;

Los primos con m, *dan todas las especies del género* m;

Los que tienen con m *un factor comun, dan todas las especies superiores de los demás géneros.*

Hagamos, por ejemplo la division de la circunferencia en 60 partes iguales, y veamos todo lo que dará de sí. La escala es la siguiente:

~~1~~, 2, 3, 4, 5, 6, ~~7~~, 8, 9, 10, ~~11~~, 12, ~~13~~, 14, 15, 16, ~~17~~, 18, ~~19~~, 20, 21, 22, ~~23~~, 24, 25, 26, 27, 28, ~~29~~.

En ella encontramos primeramente todos los divísores de 60 (á excepcion de 60 y de 30)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20,

que hemos subrayado, y dan la primera especie de los géneros

60, 30, 20, 15, 12, 10, 6, 5, 4, 3.

Los primos con 60

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

que hemos tachado, y dan lugar á las *ocho* especies de polígonos regulares de 60 lados.

Por último, los que tienen con 60 un factor comun

8, 9, 14, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28,

que hemos dejado intactos en la escala, y dan *todas* las especies superiores de los géneros inferiores arriba citados. El lector comprobará esto consultando el cuadro que dimos ántes.

En el tratado de MM. Rouché y Comberousse se dan las construcciones gráficas para la inscripción del triángulo, del cuadrado, del exágono, de las dos especies de pentágonos, las dos especies de decágonos y las cuatro de pentedecágonos, y se calculan los respectivos lados.

Para los dodecágonos no hay dificultad, porque la division en 12 partes iguales se hace inmediatamente; el lado del dodecágono de 1.ª especie se deduce por la fórmula

$$a' = \sqrt{R\,[2\,R - \sqrt{4\,R^2 - a^2}]}$$

en la cual a es el lado del exágono.

Así, se tiene

$$a' = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}:$$

el lado del dodecágono de 5.ª especie es la cuerda suplementaria del lado del dodecágono de 1.ª, y, por consiguiente, su valor es:

$$\sqrt{4\,R^2 - R^2\,(2 - \sqrt{3})} = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$ (*)

Respecto á las cuatro especies del género 20, debe observarse análogamente que los lados de los icoságonos de 1.ª y

---

(*) Lo mismo sucede con los octógonos de 1.ª y de 3.ª especie. El lado del octógono de 1.ª se deduce por la misma fórmula

$$a' = \sqrt{R\,[2\,R - \sqrt{4\,R^2 - a^2}]}$$

en la cual a es el lado del cuadro. Así, se tiene

$$a' = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}:$$

el lado del octógono de 3.ª especie es la cuerda suplementaria, y vale, por consiguiente,

$$\sqrt{4\,R^2 - R^2\,(2 - \sqrt{2})} = R\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

de 3.ª especie se deducen de los decágonos de 1.ª y de 3.ª especie por la fórmula ya citada

$$a' = \sqrt{R\,[2R - \sqrt{4R^2 - a^2}]},$$

dando á a los valores

$$a = \frac{R\,(\sqrt{5} - 1)}{2} \text{ y } a = \frac{R\,(\sqrt{5} + 1)}{2}:$$

si se representan por a'_1 y a'_3 los lados de los icoságonos de 1.ª y de 3.ª especie, se tiene, pues,

$$a'_1 = R\sqrt{2 - \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}}}$$

y

$$a'_3 = R\sqrt{2 - \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}}};$$

por medio de la fórmula algebráica, que sirve para descomponer un radical doble en dos radicales, se pueden poner bajo la forma

$$a'_1 = R.\,\frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2}$$

y

$$a'_3 = R.\,\frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}{2}.$$

Los lados a'_7 y a'_9 de los icoságonos de 7.ª y de 9.ª especie son cuerdas suplementarias de a'_3 y a'_1, por lo cual

$$a'_7 = R\sqrt{2 + \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}}}$$

y

$$a'_9 = R\sqrt{2+\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}};$$

que se pueden poner tambien bajo la forma

$$a'_7 = R.\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}$$

y

$$a'_9 = R.\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}$$

Las cuatro especies del género 30 tienen por lados respectivos las cuerdas suplementarias de los lados de las cuatro especies de pentedecágonos. Si representamos por p_1, p_2, p_4, p_7 estos lados, y por x_1, x_7, x_{11}, x_{13} las incógnitas, y se tiene á la vista los valores conocidos de p_1, p_2, p_4, p_7, se llega á los siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{4R^2-p_7^2} = R.\frac{\sqrt{3.}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)}{8} \\ x_7 &= \sqrt{4R^2-p_4^2} = R.\frac{\sqrt{3.}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)}{8} \\ x_{11} &= \sqrt{4R^2-p_2^2} = R.\frac{\sqrt{3.}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)}{8} \\ x_{13} &= \sqrt{4R^2-p_1^2} = R.\frac{\sqrt{3.}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)}{8} \end{aligned}\right\}.$$

El género 60 admite, como hemos dicho, *ocho* especies, cuya inscripcion en la circunferencia es fácil por medio del trián-

gulo y dos de las especies de icoságonos, por ejemplo la 1.ª y la 3.ª

En efecto, si á partir de un punto cualquiera A de la circunferencia *(fig. 15)* se toma el arco AB que sea la tercera parte de la circunferencia, y desde el extremo B, á uno y otro lado, se toman BC y BD iguales á la vigésima parte de la circunferencia, es decir, que sus cuerdas sean lados del icoságono de 1.ª especie, se tendrán en las cuerdas AC y AD los lados de los polígonos del género 60, especies 17 y 23; porque si representamos por c la longitud de la circunferencia.

$$\left.\begin{array}{l} \text{arco AC} = \text{arco AB} - \text{arco BC} = \dfrac{c}{3} - \dfrac{c}{20} = \dfrac{17c}{60} \\ \text{arco AD} = \text{arco AB} + \text{arco BD} = \dfrac{c}{3} + \dfrac{c}{20} = \dfrac{23c}{60} \end{array}\right\} \therefore$$

si á partir del punto A se toma nuevamente (pero á la izquierda para mayor claridad) el arco AE, que sea la tercera parte de la circunferencia, y desde el extremo E, á uno y otro lado, se toman EF y EG iguales á las tres vigésimas partes de la circunferencia, es decir, que sus cuerdas sean lados del icoságono de 3.ª especie, se tendrán en las cuerdas AG y AF los lados de los polígonos del género 60, especies 11 y 29; porque

$$\left.\begin{array}{l} \text{arco AG} = \text{arco AE} - \text{arco EG} = \dfrac{c}{3} - \dfrac{3c}{20} = \dfrac{11c}{60} \\ \text{arco AF} = \text{arco AE} + \text{arco EF} = \dfrac{c}{3} + \dfrac{3c}{20} = \dfrac{29c}{60} \end{array}\right\} \therefore$$

ahora se ve muy fácilmente que las cuerdas suplementarias A'C, A'D, A'G, A'F dan los lados de las cuatro especies restantes, que son las especies 13, 7, 19, 1.

Podia haberse dispuesto la construccion inversamente haciendo uso del triángulo y de las especies 7.ª y 9.ª de icoságonos.

Los polígonos regulares de especie superior (estrellados) no difieren en nada esencial de los polígonos regulares ordinarios.

Son inscriptibles y circunscriptibles, es decir, que hay una circunferencia que pasa por todos los *vértices* del polígono, y otra tangente á todos los lados (*). Téngase bien presente que se llaman vértices los puntos de interseccion de cada dos lados *consecutivos*, pero no los puntos en que se corten dos de los lados al atravesarse mutuamente. Las dos circunferencias inscrita y circunscrita son concéntricas, y su centro comun se llama *centro del polígono*, aunque no lo sea efectivamente cuando el género es impar.

La suma S de los ángulos interiores de un polígono convexo (**) cualquiera del género m, especie p, está dada por la fórmula

$$S = 2m - 4p.$$

Para demostrarlo basta observar que la suma de los ángulos interiores y exteriores vale $2m$, y que la de los exteriores equivale á p veces 4 rectos, porque se pueden ver reunidos alrededor de un punto cualquiera o, y llenando p veces el espacio angular.

Siendo los *radios* las rectas OA, OB, ..., *(fig. 16)* que unen el centro O con los vértices A, B, ..., y las *apotemas* las perpendiculares OH, OK, ..., á los lados AB, BC, ..., se llama *ángulo en el centro* del polígono el ángulo

$$AOB = HOK$$

formado por dos radios *consecutivos*, ó por dos apotemas *conse-*

(*) La demostracion que se da para los polígonos regulares ordinarios es aplicable á los estrellados.

(**) Aquí tomamos la palabra *convexo* en su sentido propio, que corresponde al polígono que tenga todos sus ángulos interiores menores que 2 rectos, es decir, *salientes*. Se sabe que los ángulos exteriores del polígono son en este caso suplementos positivos de los interiores.

cutivas. El valor del ángulo en el centro de un polígono regular del género m, especie p, es evidentemente $\frac{4p}{m}$, y el valor del ángulo ABC del polígono es

$$2 - \frac{4p}{m},$$

como se ve fácilmente si se observa que el ángulo ABC es el suplemento de HOK (*).

Es claro que cada apotema es bisectriz del ángulo de dos radios consecutivos, y que cada radio es bisectriz del ángulo de dos apotemas consecutivas, al mismo tiempo que bisectriz de un ángulo del polígono.

Cuando haya que considerar el área de un polígono regular de especie superior, se tratará en general de la suma de los triángulos isósceles AOB, BOC, COD, ..., que tienen su vértice en el centro O *(fig. 11)* y por bases los lados AB, BC, CD, ... Esta área, así mirada, tiene por expresion *el producto del semiperímetro por la apotema* (como en los polígonos ordinarios); pero se debe tener siempre presente que, al aplicar esta expresion, el área del núcleo se repite 2, 3, ... p veces si el polígono es de la especie 2, 3, ... p; es decir, que el área del núcleo aparece multiplicada por el número que indica la especie.

Para concluir estas indicaciones acerca de los polígonos regulares de especie superior, vamos á demostrar en general que:

1.° *El polígono convexo que envuelve á un polígono regular estrellado, es siempre regular y de su mismo género.*

(*) Podria llegarse á este valor del ángulo de un polígono regular observando que deberá ser la $m$ésima parte de S, y, por tanto,

$$\overset{\frown}{ABC} = \frac{S}{m} = \frac{2m - 4p}{m} = 2 - \frac{4p}{m}.$$

En efecto, el polígono convexo envolvente tiene ante todo por vértices *todos* los vértices del polígono dado; porque estando situados estos vértices en una circunferencia, el polígono convexo *envolvente* dejaria algunos vértices fuera de él, si no pasara por todos ellos, y no sería envolvente como suponemos: el polígono ordinario ADGBEHCF *(fig. 17)* es, pues, del mismo género que el estrellado ABCDEFGH. Para probar que es regular, basta demostrar que los arcos AD, DG, GB, ... son iguales, y esto se ve con solo observar que dos ángulos como BCD y EFG, cuyos vértices C y F sean seguidos, han de abrazar arcos DGB y GBE iguales (puesto que son inscritos é iguales), y por tanto que el arco DG ha de ser igual al BE: dando vueltas al polígono, se ve así que todos los arcos AD, DG, GB, ..., son iguales entre sí (*).

2.° *El polígono convexo que forma el núcleo de un polígono regular estrellado, es siempre regular y de su mismo género.*

Que es de su mismo género es evidente, porque tiene sus lados en las rectas mismas que forman los lados del estrellado. Para probar que es regular basta demostrar que los arcos MN, NP, PQ, ... son iguales, y esto se ve con solo observar que dos ángulos como BCD y EFG, cuyos vértices C y F sean seguidos, han de abrazar arcos QRST y RSTU iguales (puesto que son circunscritos é iguales), y por tanto que el arco QR ha de ser igual al TU; dando vueltas al polígono, se ve así que todos los arcos MN, NP, PQ, ..., son iguales entre sí.

Recíprocamente: *El polígono estrellado que se forma prolongando los lados de un núcleo regular convexo, es siempre regular y de su mismo género.*

Que es de su mismo género es evidente, porque tiene sus lados en las rectas mismas que forman los lados del núcleo. Y

(*) Este teorema es el *recíproco* del teorema fundamental de polígonos estrellados, en que se supone que el convexo ADGBEHCF es regular, y se demuestra que, uniendo los vértices de p en p, el estrellado del mismo género ABCDEFGH lo es tambien.

es regular, porque los arcos MNPQ, QRST,... que median entre los puntos de cóntacto *consecutivos* M, Q, T,... son iguales, puesto que se componen del mismo número de partes iguales.

Estos dos teoremas (directos y recíprocos), demostrados del modo que acabamos de hacerlo, dejan comprender que se puede razonar siempre en los polígonos regulares estrellados como se razona en los ordinarios.

NOTA 16 (de la pág. 158).

Conviene hacer notar que teniendo en una circunferencia sobre el diámetro AF los lados AB y AD de los decágonos regulares de 1.ª y de 3.ª especie, y los lados FB y FD de los pentágonos de 2.ª y de 1.ª especie:

1.° Si se trazara por el centro O, en el triángulo rectángulo AFB, una paralela á FB, apareceria un triángulo semejante al AFB, que tendria por hipotenusa OA el radio, y el ángulo agudo O sería la mitad del ángulo en el centro del decágono ordinario. En este triángulo: *el cateto opuesto al ángulo O es la mitad del lado del decágono ordinario, y el cateto adyacente á dicho ángulo es la mitad del lado del pentágono estrellado.*

2.° Si se trazara por el centro O, en el triángulo rectángulo AFD, una paralela á FD, apareceria un triángulo semejante al AFD, que tendria por hipotenusa OA el radio, y el ángulo agudo O sería la mitad del ángulo en el centro del decágono estrellado. En este triángulo: *el cateto opuesto al ángulo O es la mitad del decágono estrellado, y el cateto adyacente á dicho ángulo es la mitad del lado del pentágono ordinario.*

NOTA 17 (de las páginas 161 y 162).

Es sabido que el lado a' del polígono regular de $2n$ lados (ordinario), inscrito en una circunferencia, se calcula en funcion del radio R de ésta, y del lado a del inscrito de n lados, por la fórmula

$$(1) \qquad a' = \sqrt{R\,[2R - \sqrt{4R^2 - a^2}]};$$

para calcular inversamente a en funcion de a' y R, basta despejar a de la fórmula (1). Elevando al cuadrado, se tiene

$$a'^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2},$$

ó

$$R\sqrt{4R^2 - a^2} = 2R^2 - a'^2;$$

de donde, elevando al cuadrado y simplificando

$$a^2R^2 = a'^2\,(4R^2 - a'^2),$$

y, finalmente,

$$(1') \qquad a = \frac{a'\sqrt{4R^2 - a'^2}}{R}.$$

Tambien sabemos que el lado α del polígono regular de n lados (ordinario) circunscrito á una circunferencia, se calcula en funcion del radio R de esta y del lado a del inscrito de n lados, por la fórmula

$$(2) \qquad \alpha = \frac{2Ra}{\sqrt{4R^2 - a^2}};$$

para calcular inversamente a en funcion de R y α, basta despejar a de la fórmula (2). Elevando al cuadrado, se tiene

$$\alpha^2 = \frac{4R^2 a^2}{4R^2 - a^2},$$

ó

$$4R^2 \alpha^2 - \alpha^2 a^2 = 4R^2 a^2;$$

de donde

$$a^2 (4R^2 + \alpha^2) = 4R^2 \alpha^2,$$

y, finalmente,

$$(2') \qquad a = \frac{2R\alpha}{\sqrt{4R^2 + \alpha^2}}.$$

Por medio de las cuatro fórmulas (1), (1'), (2), (2') se puede calcular el lado de un polígono regular inscrito ó circunscrito de *doble, mitad* ó *igual* número de lados que otro polígono inscrito ó circunscrito cuyo lado sea dado (siendo tambien conocido el radio de la circunferencia de que se trata), puesto que ellas permiten pasar del inscrito al circunscrito [fórmula (2)] ó viceversa [fórmula (2')] conservando el mismo número de lados, y duplicar [fórmula (1)] ó reducir á la mitad [fórmula (1')] el número de lados en lo inscrito. Así, por ejemplo, dado el lado α' de un polígono regular circunscrito, se calcularia el lado α del circunscrito de un número de lados mitad del anterior por el modo siguiente: del dato α' se pasaría [fórmula (2')] al lado a' del inscrito del mismo número de lados; de éste se pasaría [fórmula (1')] al lado a del inscrito de un número de lados mitad; y, finalmente, se pasaria de éste [fórmula (2)] al lado α.

Se sabe cuál es el procedimiento gráfico directo que hay que emplear para tener el polígono regular inscrito ó circunscrito de *doble, mitad* ó *igual* número de lados que otro polígono inscrito ó circunscrito dado.

NOTA 18 (de la pág. 168).

Cuando una magnitud variable A' es siempre menor que otra variable B', no puede en rigor deducirse que el límite A de la primera es menor que el límite B de la segunda.

La demostracion á que nos referimos en esta Nota quedaria, sin embargo, rigurosa reemplazando un arco de la línea B por su cuerda, y cuidando de que ésta sea exterior ó á lo sumo tangente á la línea convexa A; si, hecho esto, se representa por B_1 la longitud obtenida, reemplazando el arco por la cuerda, esta B_1 vendrá á ser el límite de la variable B', y de la desigualdad permanente

$$A' < B' \text{ deduciremos } A \leqq B_1;$$

pero, como

$$B_1 < B, \text{ se tiene en definitiva } A < B.$$

NOTA 19 (de la pág. 180).

Conviene hacer notar que las cantidades

$$\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2} \cdots$$

son *negativas*, puesto que expresan diferencias entre una media geométrica y una media aritmética; por consiguiente,

$$\frac{a_k + 2r_k}{3}$$

es valor aproximado *por exceso* de $\frac{1}{\pi}$, siendo el error cometido menor que $\frac{4}{45} \cdot \frac{(r_k - a_k)^2}{a_k}$.

Si α y ρ fueran valores aproximados *por defecto* de a_k y r_k, la expresion

$$\frac{\alpha + 2\rho}{3}$$

sería aproximada *por defecto* de $\frac{a_k + 2r_k}{3}$. Si en este supuesto el error de $\frac{a_k + 2r_k}{3}$ sobre π fuera menor que $\frac{1}{2.10^m}$, y el de $\frac{\alpha + 2\rho}{3}$, respecto de $\frac{a_k + 2r_k}{3}$, fuera tambien menor que $\frac{1}{2.10^m}$, se podria asegurar que el error de $\frac{\alpha + 2\rho}{3}$ (por defecto ó por exceso) *respecto de* $\frac{1}{\pi}$ sería menor que $\frac{1}{2.10^m}$.

NOTA 20 (de la pág. 260).

Entre las cuatro cantidades R, n, l, S, que representan respectivamente el radio de un sector circular, su número de grados, la longitud de su arco y su área, se tienen dos ecuaciones que permiten calcular dos cualesquiera de ellas en funcion de las otras dos. Ponemos á continuacion un cuadro con las fórmulas que resuelven los

$$\frac{4.3}{1.2} = 6,$$

problemas que corresponden á las seis combinaciones, dos á dos, de las cuatro cantidades.

R, n	R, l	R, S	n, l	n, S	l, S
$l = \frac{\pi R}{180} n$	$n = \frac{180.l}{\pi R}$	$n = \frac{360.S}{\pi R^2}$	$R = \frac{180.l}{n\pi}$	$R = \sqrt{\frac{360.S}{n\pi}}$	$R = \frac{2S}{l}$
$S = \frac{\pi R^2}{360} n$	$S = l.\frac{R}{2}$	$l = \frac{2S}{R}$	$S = \frac{90.l^2}{n\pi}$	$l = \sqrt{\frac{Sn\pi}{90}}$	$n = \frac{90.l^2}{S\pi}$

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.

NOTA 21 (de la pág. 290).

Se demuestra que: *dos rectas cualesquiera* AC *y* A′C′ (figura 18) *son cortadas por tres planos paralelos* P, Q, R, *en partes proporcionales;* ó en otros términos, que si los tres planos P, Q, R son paralelos, se cumple la proporcion

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

No es verdadera la proposicion recíproca: es decir, que si tres planos P, Q, R cortan á dos rectas cualesquiera AC y A′C′ en partes proporcionales AB, BC, A′B′ y B′C′, *no han de ser por esto* paralelos, porque estando sujeto el plano P á pasar por los puntos A y A′ y no más, queda *indeterminada* su direccion, y tambien quedan indeterminadas las direcciones de los planos Q y R, sujetos tan solo á pasar respectivamente por las rectas BB′ y CC′.

Pero es fácil demostrar que:

TEOREMA.

Si dos rectas cualesquiera AC *y* A′C′ *son cortadas por otras*

tres AA', BB' CC' *en partes proporcionales, estas tres son paralelas á una misma dirección de plano.*

En efecto, si trazamos por el punto B las paralelas BA, y BC, á las rectas dadas AA' y CC', y hacemos pasar por ellas un plano, la recta BB' estará contenida en él; ó en otros términos, este plano pasará por el punto B', porque dicho plano y los paralelos á él, que contienen á AA' y CC', cortan á la recta A'C' en partes proporcionales á AB y BC, y no puede haber entre A' y C' un punto distinto de B' que divida á A'C' en dos segmentos aditivos que estén en la relacion dada de AB á BC.

Del mismo modo se probaria que la recta AA' estaria contenida en un plano paralelo á BB' y CC' que se trazara por el punto A, ó que la recta CC' habria de estar situada en el plano que se hiciera pasar por el punto C paralelamente á AA' y BB' (*).

Se ve, pues, que el hecho de ser cortadas dos rectas cualesquiera por otras tres AA', BB', CC' en partes proporcionales, sólo indica que por estas tres rectas *se pueden hacer pasar tres planos paralelos*, lo cual no es posible por tres rectas cualesquiera que no estén sujetas á la condicion de ser paralelas á una misma direccion de plano.

Si las dos rectas AC y A'C' estuvieran situadas en un plano, los tres planos paralelos P, Q, R cortarian á su plano según tres rectas AA', BB' y CC' paralelas entre sí *(fig. 19)*, y el teorema directo se convertiria en el teorema conocido de Geometría plana que dice: *dos rectas cualesquiera* AC *y* A'C', *son cortadas por tres paralelas en partes proporcionales.*

(*) En el Apéndice al libro v del *Tratado* de Rouché y Comberousse, se demuestra este teorema, enunciado del siguiente modo:

«*Toda recta que divida proporcionalmente á dos lados opuestos de un cuadrilátero alabeado, está situada en un plano paralelo á los otros dos lados.*»

COROLARIOS.

Cuando son varias las rectas AC, A'C', A''C'',... cortadas por tres planos paralelos, P, Q, R, se tiene (por el intermedio de relaciones comunes) la serie de razones iguales *(fig. 20)*.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{A''B''}{B''C''} = \frac{A'''B'''}{B'''C'''} = \ldots$$

Si varias rectas AC, AC', AC''... *(fig. 21) concurren en un punto* A (formando un haz en el espacio) *y son cortadas por dos planos paralelos* Q *y* R, *se tiene análogamente la serie de razones iguales*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'} = \frac{AB''}{B''C''} = \frac{AB'''}{B'''C'''} = \ldots$$

RECÍPROCAMENTE, *si en una serie de secantes* AC, AC', AC''... *que parten de un punto* A *y están cortadas por un plano* R, *se marcan puntos* B, B', B''... *que las dividan en partes proporcionales, estos puntos estarán en un plano paralelo al primero.*

Porque, en efecto, las rectas de union BB', B'B'', B''B''',..., habrán de ser respectivamente paralelas á CC', C'C'', C''C''',..., luego el plano ßB'B'', paralelo á CC'C'', deberá ser el mismo que el B'B''B''' paralelo á C'C''C''', que es R, y así sucesivamente.

Tambien se ve que:

Si dos líneas quebradas cualesquiera BB'B''B''',... *y* CC'C''C''... *(planas ó no) tienen sus lados paralelos y proporcionales, las rectas de union* BC, B'C', B''C'', B'''C''',..., *concurren en un cierto punto* A.

En efecto, si es *r* el valor constante de las relaciones

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{B'B''}{C'C''} = \frac{B''B'''}{C''C'''} = \ldots,$$

se observa que el punto A en que se corten CB y C'B' satisface á la condicion

$$\frac{AB'}{AC'} = r,$$

pero como el punto A' en que C''B'' cortara á C'B' habria de satisfacer tambien á la condicion

$$\frac{A'B'}{A'C'} = r,$$

y no hay más que un punto que satisfaga á esta condicion, se ve que la recta C''B'' habrá de concurrir en A con las dos primeras, y así sucesivamente todas las demás.

En el caso particular de ser la relacion r igual á 1, las rectas de union se cortan mutuamente por mitad si los segmentos en que el punto A las divide son aditivos; si los segmentos son sustractivos, las rectas de union son paralelas: en este último caso se diria que el punto de concurso está en el infinito.

NOTA 22 (de las páginas 297 y 298).

Se demuestra que: *si dos rectas* AB *y* CD *(fig. 22) son paralelas, sus proyecciones* ab *y* cd *sobre un mismo plano* P *son paralelas* (*).

No es verdadera la proposicion recíproca; es decir que si las proyecciones *ab y cd* de dos rectas AB y CD sobre un mismo plano P son paralelas, *no han de ser por esto* paralelas las rectas AB y CD, porque quedan indeterminadas las direcciones de una y otra recta, como sujetas tan solo á la condicion de estar respectivamente en los planos proyectantes M y N.

Pero es fácil demostrar que:

(*) Se prescinde aquí del caso en que las rectas sean perpendiculares al plano de proyeccion, porque las proyecciones son en tal caso puntos.

TEOREMA.

Si las proyecciones a b *y* c d *de dos rectas* A B *y* C D *sobre un mismo plano* P *son paralelas, los planos proyectantes* M *y* N *son paralelos.*

En efecto, siendo paralelas las rectas *a* A y *c* C levantadas perpendicularmente al plano P por dos puntos cualesquiera *a* y *c* de las proyecciones dadas *ab* y *cd*, los planos de los ángulos A*ab* y C*cd*, es decir, los planos proyectantes M y N son paralelos.

COROLARIO.

Si las proyecciones a b *y* c d *(fig. 23) de dos rectas* A B *y* C D *sobre un mismo plano* P *son paralelas, y tambien lo son las proyecciones* a' b' *y* c' d' *de las mismas rectas* A B *y* C D *sobre otro plano* P' *(no paralelo á* P*), las rectas* A B *y* C D *son paralelas entre sí.*

Porque, segun el reciproco anterior, los planos M y N son paralelos, y tambien lo son los planos M' y N', y las dos rectas A B y C D son, por consiguiente, paralelas á la recta H ó á la recta K, y por tanto paralelas entre sí (*).

Este corolario cae en defecto cuando *las proyecciones* a b *y* c d *son perpendiculares á la interseccion* I *de los dos planos* P *y* P' *(fig. 24)*, porque entonces, segun un teorema conocido, los planos proyectantes M y N serian perpendiculares á la recta I,

---

(*) Es necesaria la restriccion de que el plano de proyeccion P' no sea paralelo á P, porque teniendo dos planos paralelos sus perpendiculares comunes, el plano proyectante de una recta A B sobre P sería tambien proyectante de A B sobre P', y las proyecciones de A B sobre P y P' dejarian indeterminada la direccion de A B, equivaliendo á una sola proyeccion. Cuando, tratando de direccion, se hable de proyeccion de una recta sobre un plano, entiéndase que se habla de una *direccion* de plano y no de una determinada posicion. En general no deberia decirse que una recta es perpendicular á un plano, sino que *una direccion de rectas es perpendicular á una direccion de planos.* Del mismo modo, deberia decirse siempre: *perpendicularidad (ó inclinacion cualquiera) de dos direcciones de rectas, de dos direcciones de planos, ó de una direccion de rectas y una direccion de planos.*

y tambien perpendiculares, por tanto, al plano P', que pasa por esta I; pero conteniendo los planos M y N á las rectas AB y CD, y siendo perpendiculares al plano P', habrán de coincidir con los planos proyectantes M' y N', y la demostracion del corolario no es aplicable: queda nuevamente indeterminada la direccion de las rectas AB y CD; y no se puede afirmar, por consiguiente, que estas rectas sean paralelas.

Aquí se ve que: *las proyecciones* a'b' *y* c' d' *habrán de ser en este caso particular perpendiculares á* I *en los mismos puntos* m *y* n *en que lo sean* ab *y* cd; porque, siendo intersecciones de P', con M y N pasan por *m* y *n*, y estando situadas en los planos M y N, son perpendiculares á I.

Las rectas AB y CD son perpendiculare á la intersección I.

Están demostrados los dos teoremas siguientes:

1.º *Si dos rectas* AB *y* CD *(fig. 25) son perpendiculares entre sí, y una de ellas* CD *es paralela al plano* P *ó está contenida en él, sus proyecciones* ab *y* cd *sobre este plano son perpendiculares entre sí.*

2.º *Si las proyecciones* ab *y* cd *de dos rectas* AB *y* CD *sobre un plano* P *son perpendiculares entre sí, y una de ellas* CD *es paralela al plano* P *ó está contenida en él, las rectas* AB *y* CD *son perpendiculares entre sí.*

Véase además que:

TEOREMA.

3.º *Si las proyecciones* ab *y* cd *de dos rectas* AB *y* CD *sobre un plano* P *son perpendiculares entre sí, y estas rectas* AB *y* CD *son tambien perpendiculares entre sí, una de ellas,* AB *ó* CD, *habrá de ser paralela al plano* P *ó estar contenida en él.*

En efecto, si la recta AB no es paralela al plano P ni está contenida en él, le cortará en un punto *p*, que (como se sabe) pertenece á su proyeccion *ab*. Ahora bien, si la recta CD no

fuera paralela al plano P ni estuviera contenida en él, se podria trazar por uno de sus puntos *n* una recta C' D' paralela al plano P (que habria de estar forzosamente contenida en el plano N), y tendríamos: por una parte la recta *pba*, que, siendo perpendicular á *ocd* y á una proyectante *oo'*, es perpendicular al plano N; y por otra parte la *p*BA, que, siendo perpendicular á CD por hipótesis, lo sería tambien á C'D' en virtud del teorema 2.°, y sería, por consiguiente, perpendicular tambien al plano N; es decir, que tendríamos desde el punto *p* dos perpendiculares *pba* y *p*BA al plano N, lo cual es absurdo.

Caso particular. Si una de las dos rectas está situada en el plano P, sólo tienen razon de ser los dos primeros teoremas, que pueden enunciarse entónces de este modo:

1.° *Si una recta* AB *es perpendicular á otra* cd *situada en un plano* P, *la proyeccion* ab *de* AB *sobre este plano, tambien lo es.*

2.° Recíproco.—*Si la proyeccion* ab *de una recta* AB *sobre un plano* P *es perpendicular á otra* cd *situada en este plano, la recta* AB *tambien lo es.*

Si en este caso particular las dos rectas AB y *cd* se cortaran en un punto *p (fig. 26)*, podrian enunciarse los tres teoremas conocidos por *Teoremas de las tres perpendiculares*, á saber:

TEOREMAS.

1.° *Si una recta* AB *corta perpendicularmente en* p *á otra* cd *situada en un plano* P, *y se baja la perpendicular* Aa *desde un punto cualquiera* A *de la primera sobre el plano* P, *y se unen los piés* a *y* p (es decir, se proyecta la recta AB), *esta recta* ap *será perpendicular á* cd.

2.° *Si desde el pié* a *de una perpendicular* Aa *á un plano* P *se baja la perpendicular* ap *á una recta* cd *situada en este plano,*

y se une un punto cualquiera A *de la primera con* p, *esta recta* A p *será perpendicular á* c d (*).

3.° *Si una recta* A B *corta perpendicularmente en* p *á otra* c d *situada en un plano* P, *y por el punto* p *se levanta en este plano la perpendicular* p a *á* c d, *y desde un punto cualquiera* A *de la primera se baja la perpendicular* A a *sobre* p a, *esta recta* A a *será perpendicular al plano* P; porque, si así no fuera, bajando la perpendicular A *a'* al plano P, la recta de union *a' p* seria perpendicular á *c d* (1.°) y se tendrian por el punto *p* dos perpendiculares á *c d* en el plano P.

Como se ve, las tres propiedades de perpendicularidad son:

1.ª La de la recta A *a* y el plano P;

2.ª La de las rectas A B y *c d;*

3.ª La de las rectas *a p* y *c d.*

Está demostrado el siguiente

TEOREMA.

Si una recta A B *(fig. 27) es perpendicular á un plano* Q, *su proyeccion* a b *sobre otro plano cualquiera* P *es perpendicular á la traza* c d *de* Q *sobre* P.

No es verdadera la proposicion recíproca; es decir, que si la proyeccion *a b* de una recta A B sobre un plano P es perpendicular á la traza *c d* de un plano Q sobre P, *no ha de ser por esto* perpendicular la recta A B al plano Q, porque la direccion de la recta A B queda indeterminada, como sujeta tan solo á la condicion de estar situada en el plano proyectante M.

Pero es fácil demostrar que:

TEOREMA.

Si la proyeccion a b *de una recta* A B *sobre un plano* P *es*

(*) Estos dos primeros teoremas no son otra cosa que el directo y el recíproco del caso particular que se acaba de considerar.

perpendicular á la traza cd *de un plano* Q *sobre* P, *el plano proyectante* M *es perpendicular al plano* Q.

En efecto, la recta *cd* es perpendicular á *ab* por hipótesis, y á una proyectante cualquiera de AB; por consiguiente, es perpendicular al plano M; luego el plano Q, que pasa por *cd*, tambien lo es.

Corolario.

Si las proyecciones ab *y* a'b' *(fig. 28) de una recta* AB *sobre dos planos* P *y* P' *(no paralelos), son respectivamente perpendiculares á las trazas* cd *y* c'd' *de un plano* Q, *sobre los mismos* P *y* P', *la recta* AB *es perpendicular al plano* Q.

Porque, segun el reciproco anterior, los planos proyectantes M y M' son perpendiculares al plano Q, y, por consiguiente, su interseccion AB tambien lo es.

Este corolario cae en defecto *cuando la proyeccion* ab *es perpendicular á la interseccion* I *de los dos planos* P *y* P' *(figura 29)*, porque entonces el plano proyectante M es perpendicular á la recta I, y, por tanto, al plano P' que pasa por esta I; pero conteniendo el plano M á la recta AB, y siendo perpendicular á P', coincide con el proyectante M', y la demostracion del corolario no es aplicable: la direccion de la recta AB queda nuevamente indeterminada, y no se puede, por consiguiente, asegurar que sea perpendicular al plano Q.

Como se acaba de ver, la proyeccion *a'b'* ha de ser en este caso particular perpendicular á I en el mismo punto *m* en que lo sea *ab:* las trazas *cd* y *c'd'* del plano Q serán paralelas á I, como perpendiculares á *ab* y *a'b'* respectivamente; el plano Q es paralelo á la recta I, y la recta AB es perpendicular á ella, como situada en el plano M, que lo es.

En la *fig. 27* se ve fácilmente que los teoremas anteriores dan lugar á estos otros

TEOREMAS.

1.° *Si dos planos* Q *y* M *son perpendiculares entre sí, y uno de ellos* M *es perpendicular al plano* P, *sus trazas* ab *y* cd *sobre este plano son perpendiculares entre sí:* porque siendo los dos planos P y Q perpendiculares á un tercero M, su interseccion *cd* tambien lo es, y, por consiguiente, *cd* es perpendicular á la recta *ab*, que está situada en el plano M.

2.° *Si las trazas* ab *y* cd *de dos planos* M *y* Q *sobre un plano* P *son perpendiculares entre sí, y uno de los planos* M *es perpendicular á* P, *los planos* M *y* Q *son perpendiculares entre sí;* porque siendo la recta *cd*, en el plano P, perpendicular á la recta *ab*, lo es tambien al plano M; luego el plano Q, que pasa por ella, es perpendicular al plano M.

3.° *Si dos planos* M *y* Q *son perpendiculares entre sí, y sus trazas* ab *y* cd *sobre un mismo plano* P *son tambien perpendiculares entre sí, uno de los planos* Q *ó* M *habrá de ser perpendicular al plano* P.

En efecto, si el plano Q *(fig. 27)* no es perpendicular á P (como suponemos que le corta), será oblicuo á P, y la recta *ab* es en este supuesto oblicua al plano Q; porque si le fuera perpendicular, el plano P, que pasa por *ab*, tambien lo sería.

Ahora bien, si el plano M levantado por *ab* no fuera perpendicular á P, se podria levantar otro M′ que lo fuese, y tendríamos: por una parte, el plano M perpendicular á Q por hipótesis, y por otra parte el plano M′ tambien perpendicular á Q, en virtud del teorema 2.°; es decir, que tendríamos por la recta *ab* (oblicua á Q) dos planos M y M′ perpendiculares al plano Q, lo cual es absurdo.

Las tres propiedades de perpendicularidad son aquí:

1.ª La de los planos M y P;

2.ª La de los planos M y Q;

3.ª La de las trazas *ab* y *cd*.

En lo que precede se ven ejemplos de proposiciones cuyas hipótesis contienen *dos propiedades*, de las cuales depende la conclusión. Así, en esta proposición:

Si dos rectas A B *y* C D *son perpendiculares entre sí, y una de ellas* C D *es paralela al plano* P, *ó está contenida en él, sus proyecciones* ab *y* cd *sobre este plano son perpendiculares entre sí,* la conclusión depende de dos propiedades contenidas en la hipótesis, que son:

1.ª Ser las rectas A B y C D perpendiculares entre sí.

2.ª Ser una de las rectas C D paralela al plano P, ó estar contenida en él.

En este género de proposiciones intervienen tres propiedades, y puede verse (con entera generalidad) que si se demuestran los tres teoremas formados, combinando dos á dos las tres propiedades, es decir, que si se demuestra que una cualquiera de ellas es consecuencia de las otras dos, *será* NECESARIAMENTE *cierto que si una de las tres propiedades se cumple y otra no, la tercera no se cumplirá;* porque si esta tercera se verificase, deduciríamos de su unión, con la que se cumple por el supuesto, que la otra habría de cumplirse tambien, lo cual es contra el supuesto.

Enunciaremos así seis teoremas (que podrian llamarse *contrarios parciales* de los tres primeros), porque cada uno de estos tres primeros dará origen á dos contrarios parciales, si se supone que la propiedad que se cumple es ya una, ya otra de las dos que entran en su hipótesis.

Si bien se mira, dos cualesquiera de los tres teoremas que se forman combinando dos á dos las tres propiedades, son *recíprocos parciales* del tercero, puesto que entra en sus hipótesis la conclusión de este, y pasa á ser conclusión una de las dos propiedades que estaban contenidas en la hipótesis. Así, las dos recíprocas parciales de la proposicion que citamos antes como ejemplo, son:

1.ª *Si las proyecciones* ab *y* cd *de dos rectas* A B *y* C D *sobre un plano* P *son perpendiculares entre sí, y una de estas* C D *es paralela al plano* P *ó está contenida en él, las rectas* A B *y* C D *son perpendiculares entre sí.*

2.ª *Si las proyecciones* ab *y* cd *de dos rectas* A B y C D *sobre un plano* P *son perpendiculares entre sí, y estas dos rectas son tambien perpendiculares entre sí, una de ellas* A B *ó* C D *habrá de ser paralela al plano* P *ó estar contenida en él* (*).

Los seis contrarios parciales se enunciarían sin dificultad; por ejemplo:

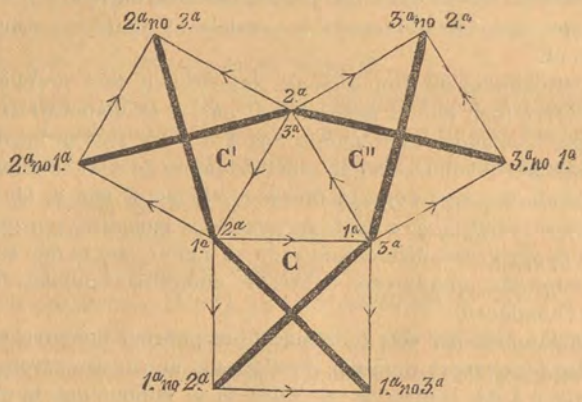
Si dos rectas A B *y* C D *son perpendiculares entre sí y ninguna de ellas*

(*) En la obra de MM. Rouché y Comberousse se considera solo la 1.ª recíproca, y queda, por consiguiente, incompleto el estudio de este teorema.

es paralela á un plano P *ni está contenida en él, sus proyecciones* ab *y* cd *sobre este plano* P *no son perpendiculares entre sí;*

Etc., etc.

La dependencia lógica de estos contrarios parciales, respecto del teorema primero y de sus dos recíprocos parciales, puede representarse por medio de tres cuadrados colocados en los tres lados de un triángulo de esta suerte (*):



Consideremos tres propiedades, 1.ª, 2.ª, 3.ª, de tal manera ligadas entre sí, que cada una de ellas sea consecuencia de las otras dos; es decir, que adoptando como

hipótesis		*conclusion*
1.ª, 2.ª	se deduzca	3.ª
1.ª, 3.ª	»	2.ª
2.ª, 3.ª	»	1.ª

Las seis proposiciones que hemos llamado *contrarias parciales* de estas son:

hipótesis	*conclusion*
1.ª, no 2.ª,.....	no 3.ª
2.ª, no 1.ª,.....	no 3.ª
1.ª, no 3.ª,.....	no 2.ª
3.ª, no 1.ª,.....	no 2.ª
2.ª, no 3.ª,.....	no 1.ª
3.ª, no 2.ª,.....	no 1.ª

(*) La representacion que damos es puramente *schemática*.

La representacion *schemática* que proponemos, es como sigue: En cada uno de los nueve puntos esta puesta la hipótesis de un teorema. Las hipótesis de los tres primeros están en los tres vértices del triángulo de manera que, si se consideran dos de ellos, por ejemplo:

hipótesis	*conclusion*
Si 1.ª, 2.ª,.....	3.ª
Si 1.ª, 3.ª,.....	2.ª

se advierte que, siendo la 1.ª propiedad un supuesto comun de los dos teoremas, podemos tratarlos como *directo y recíproco simples*, puesto que sus enunciados se reducen (sobre el supuesto comun de estar satisfecha la 1.ª propiedad) á los siguientes:

	hipótesis	*conclusion*
Directo:	Si 2.ª,.....	3.ª
Recíproco:	Si 3.ª,.....	2.ª

Mirados estos dos teoremas como directo y recíproco simples, fórmese el cuadrado C de la Nota 1.ª y veremos reproducido lo que allí dijimos:

Contrario: Si no 2.ª,..... no 3.ª,

que se deriva necesariamente del

Recíproco: Si 3.ª..... 2.ª;

y tambien:

Contrario del recíproco: Si no 3.ª,..... no 2.ª,

que se deriva necesariamente del

Directo: Si 2.ª,..... 3.ª

Estas cuatro proposiciones, lo repetimos, se enuncian así sobre el supuesto comun de estar satisfecha la 1.ª propiedad, de la cual hacemos abstraccion (en los enunciados que preceden) para apreciar más fácilmente el enlace lógico que hay entre las cuatro proposiciones.

El cuadro C′ corresponde á las dos proposiciones:

hipótesis	*conclusion*
Si 2.ª, 3.ª,.....	1.ª
Si 2.ª, 1.ª,.....	3.ª

miradas como directa y recíproca simples sobre el supuesto comun de la 2.ª propiedad.

El cuadro C'' corresponde á las dos

hipótesis	*conclusion*
Si 3.ª, 1.ª,.....	2.ª)
Si 3.ª, 2.ª,.....	1.ª)

miradas tambien como directa y recíproca simples sobre el supuesto comun de la 3.ª propiedad.

Se ve que la verdad de cada teorema de los que ocupan los vértices del triángulo implica *necesariamente* la verdad de dos de los contrarios parciales, y que la verdad de uno cualquiera de estos implica necesariamente la verdad de uno de los primeros.

Diremos, pues, en definitiva que:

Si se demuestran separadamente

DIRECTA Y SUS DOS RECÍPROCAS PARCIALES;

ó bien

DIRECTA Y SUS DOS CONTRARIAS PARCIALES;

quedan establecidas las nueve proposiciones.

Lo más natural (y ordinariamente lo más sencillo) será demostrar la directa y las dos recíprocas parciales, lo cual equivale á hacer ver que cada una de las tres propiedades que intervienen en la cuestion es consecuencia de las otras dos.

Se podria generalizar esto considerando proposiciones en que intervinieran cuatro ó más propiedades.

NOTA 23 (de la pág. 303).

Se sabe que si por un punto de la arista de un diedro se levantan perpendiculares á esta arista en cada una de las caras, *las magnitudes de estos ángulos rectilíneos son proporcionales á las magnitudes de los diedros,* porque se cumplen las dos

condiciones que son *esenciales* para la proporcionalidad, á saber:

1.ª *Que dos rectilíneos correspondientes á diedros iguales, son iguales;*

2.ª *Que si un diedro es igual á la suma de otros dos, el rectilíneo correspondiente es igual á la suma de los rectilíneos correspondientes á los otros dos.*

Veamos si estas dos condiciones pueden cumplirse con algun otro ángulo formado por dos rectas trazadas en uno y otro plano.

Ante todo, la correspondencia en la igualdad exige que haya coincidencia de los ángulos rectilíneos al suponer dos diedros iguales, y esto, á su vez, exige que las inclinaciones de sus lados sobre la arista sean dos á dos iguales; pero hay que considerar dos casos:

1.° Que los dos lados *oa* y *ob* del ángulo rectilíneo tengan la misma inclinacion α sobre la arista OI;

2.° Que el lado *oa* tenga una inclinacion α, y el lado *ob* tenga una inclinacion ε sobre OI.

En el primer caso *(fig. 30)*, el lado *ob* del rectilíneo *aob* correspondiente al diedro PoIQ, es tambien uno de los lados del rectilíneo *boc* correspondiente al diedro QoIR; y entonces las tres rectas *oa, ob, oc* no pueden estar situadas en un mismo plano; porque la recta Io formaria ángulos agudos iguales con las tres rectas *oa, ob, oc,* que pasarian por su pié *o* sobre ese plano, lo cual se sabe que no puede ser. Se tendrá, pues, un triedro *oabc*, en el cual

$$aoc < aob + boc;$$

luégo no hay correspondencia en la suma.

En el segundo caso *(fig. 31)*, el lado *ob* del rectilíneo *aob* forma con la arista oI un ángulo ε diferente del ángulo α que el lado *oa* forma con la misma arista; y, por consiguiente, el lado *ob* del rectilíneo *aob* es distinto del lado *oa'* del rectilíneo *a'ob'*: en este segundo caso tampoco puede haber correspondencia en la suma *para magnitudes, cualesquiera de los diedros.*

En efecto, coloquemos el diedro Q*o*IR, adyacente al P*o*IQ, y supongamos que, dejando fijos los planos P y Q, pase el plano R á ocupar la posición R_1, y el lado *ob* á la posición ob_1. Si hubiera correspondencia en la suma, se tendría

$$\left.\begin{aligned} aob + a'ob' &= aob' \\ aob + a'ob'_1 &= aob'_1 \end{aligned}\right\};$$

de donde

$$aob' - a'ob' = aob'_1 - a'ob'_1;$$

lo que no puede ser si tomamos dos posiciones ob' y ob'_1 que no estén situadas en el plano aoa', porque se tienen dos triedros $oaa'b'$ y $oaa'b'_1$ con una cara comun, dos caras que se cortan y dos que no se cortan, y en ellos se tiene

$$aob' + a'ob'_1 > a'ob' + aob'_1;$$

de donde

$$aob' - a'ob' > aob'_1 - a'ob'_1.$$

Vemos, pues, que, si hay correspondencia en la igualdad, no la hay en la suma.

Si dejáramos satisfecha, por el contrario, la correspondencia en la suma por medio de ángulos rectilíneos tales que al colocar los diedros como adyacentes aparecieran ellos tambien adyacentes en un mismo plano oblicuo á la arista, quedaria desatendida la correspondencia en la igualdad, porque las inclinaciones de los lados sobre la arista OI serian diferentes.

Queda así demostrado que *sólo los rectilíneos formados por perpendiculares á la arista* cumplen las dos condiciones esenciales para la proporcionalidad con los diedros.

NOTA 24 (de la pág. 307).

Como resúmen de las diversas propiedades de paralelismo y perpendicularidad de rectas entre sí, de planos entre sí, y de rectas y planos, conviene ver que:

Son DETERMINADOS *los siguientes*

PROBLEMAS GENERALES:

1.° *Trazar por un punto* A *una recta paralela á otra recta* B, porque se imponen á la recta *dos* condiciones, que son: pasar por un punto y tener una direccion dada.

2.° *Trazar por un punto* A *un plano paralelo á otro plano* B, porque se imponen al plano *tres* condiciones, que son: pasar por un punto y ser paralelo á dos direcciones situadas en el plano B.

3.° *Trazar por una recta* A *un plano paralelo á otra recta* B, porque se imponen al plano *tres* condiciones, que son: pasar por dos puntos de la recta A y ser paralelo á la direccion de la otra recta B.

Esta tercera condicion sería una consecuencia de las dos primeras si B fuera paralela á A, en cuyo caso el problema sería *indeterminado*, porque se impondrian sólo *dos* condiciones al plano.

4.° *Trazar por un punto* A *una recta perpendicular á un plano* B, porque se imponen á la recta *dos* condiciones, que son: pasar por un punto y tener la direccion de una perpendicular á un plano.

5.° *Trazar por un punto* A *un plano perpendicular á una recta* B, porque se imponen al plano *tres* condiciones, que son: pasar por un punto y ser paralelo á dos direcciones en un plano perpendicular á la recta B.

6.° *Trazar por una recta* A *un plano perpendicular á un plano* B, porque se imponen al plano *tres* condiciones, que son:

pasar por dos puntos de la recta A, y ser paralelo á la direccion de una perpendicular al plano B.

La tercera condicion sería una consecuencia de las dos primeras si la recta A fuera perpendicular al plano B, en cuyo caso sería *indeterminado*, porque el plano quedaria solamente sujeto á *dos* condiciones.

Son INDETERMINADOS *los siguientes*

PROBLEMAS GENERALES:

1.° *Trazar por un punto* A *un plano paralelo á una recta* B, porque solo se imponen al plano *dos* condiciones, que equivalen á que el plano contenga la paralela trazada por el punto A á la recta B.

2.° *Trazar por un punto* A *una recta paralela á un plano* B, porque sólo se impone á la recta *una* condicion: la de pasar por el punto A en el plano trazado por él paralelamente al plano B.

3.° *Trazar por un punto* A *un plano perpendicular á un plano dado* B, porque solo se imponen al plano *dos* condiciones, que son: pasar por A y ser paralelo á la direccion de una perpendicular al plano B, lo cual equivale á que el plano contenga la perpendicular trazada por el punto A al plano B.

4.° *Trazar por el punto* A *una recta perpendicular á una recta dada* B, porque sólo se impone á la recta *una* condicion: la de pasar por el punto A en el plano trazado por él perpendicularmente á la recta B.

Son ABSURDOS *los siguientes*

PROBLEMAS GENERALES:

1.° *Trazar por una recta* A *un plano paralelo á un plano dado* B, porque se imponen al plano *cuatro* condiciones, que son: pasar por dos puntos de la recta A y ser paralelo á dos direcciones en el plano B.

Una de estas cuatro condiciones sería consecuencia de las

otras tres si la recta A fuera paralela al plano B, en cuyo caso las condiciones quedarian reducidas á *tres* y el problema sería *determinado* (el 2.° de los enunciados).

2.° *Trazar por una recta* A *un plano perpendicular á una recta dada* B, porque se imponen al plano *cuatro* condiciones, que son: pasar por dos puntos de la recta A y ser paralelo á dos direcciones en un plano perpendicular á la recta B.

Una de estas cuatro condiciones sería consecuencia de las otras tres si la recta A fuera perpendicular á la recta B, en cuyo caso las condiciones quedarian reducidas á tres y el problema sería *determinado* (el 5.° de los enunciados).

Conviene ver tambien que es, en general, *determinado* el siguiente

PROBLEMA.

Trazar por un punto A *una recta que se apoye sobre dos rectas dadas* B *y* B'.

Queda sujeta la recta á las *dos* condiciones de estar situada en el plano AB y tambien en el plano AB', y estas dos condiciones la determinan en general.

Si una de las rectas, B, por ejemplo, fuera paralela al plano AB', la interseccion de los planos AB y AB' sería paralela á B; entónces podría decirse que la recta que resolviera el problema se apoyaria sobre B en el punto del infinito.

Si las dos rectas B y B' estuvieran en un mismo plano, podrian cortarse ó ser paralelas, y en uno y otro caso podria estar el punto A en ese plano ó no; si el punto A no está en el plano BB', la recta está *determinada* y es la que une el punto A con el de interseccion de B y B' (si éstas se cortan), ó la paralela á ellas que pasa por el punto A (si son paralelas): si el punto A está en el plano BB', el problema es *indeterminado*, porque sólo queda sujeta la recta á *una* condicion:

la de pasar por el punto A en el plano BB', ya se corten B y B' ó sean paralelas.

Si en cualquiera de los casos anteriores el punto A perteneciera á una de las rectas, B por ejemplo, el problema sería evidentemente *indeterminado*, puesto que sólo quedaria sujeta la recta á *una* condicion: la de pasar por el punto A y apoyarse en la recta B; es decir, la de pasar por el punto A en el plano AB'.

El exámen del problema que precede, hace ver que es *indeterminado* el siguiente

PROBLEMA.

Hallar una recta que se apoye sobre tres rectas dadas B, B', B''.

Si se toma un punto cualquiera A en la recta B'', nos encontramos en el problema anterior, que es *determinado*. Si nos fijáramos en el punto A de la recta B'', tal que el plano determinado por él y una de las otras dos rectas, B' por ejemplo, fuera paralelo á B, la recta correspondiente á este punto sería paralela á B (como ya vimos), y sería la solucion del siguiente problema *determinado:*

PROBLEMA.

Hallar una recta paralela á B *que se apoye en otras dos rectas dadas* B' *y* B''.

Este problema se resuelve, como acabamos de ver, trazando por B' un plano paralelo á B, hallando la interseccion de este plano con B'' y trazando por este punto la paralela á B: ó lo que es igual, trazando por B' y B'' dos planos paralelos á B y hallando su interseccion.

Fácil es ver todas las combinaciones de casos particulares que pueden ofrecerse en estos últimos problemas.

NOTA 25 (de la pág. 353).

PROBLEMA.

Se da el volúmen V, *la altura* h *y el lado* A *de la base inferior de un tronco de pirámide de bases paralelas; se supone que esta base es un exágono* (ú otro polígono cualquiera) *regular, y se pide el lado* x *del exágono regular que sirve de base superior al tronco.*

Se sabe que este problema numérico queda planteado en la ecuacion de 2.° grado

$$V = \frac{Bh}{3}\left(1 + \frac{x}{A} + \frac{x^2}{A^2}\right),$$

ó

$$x^2 + Ax + A^2\left(1 - \frac{3V}{Bh}\right) = 0,$$

en la cual B representa el área del polígono regular que sirve de base, y cuyo lado es A; si se trata de un exágono, como en el enunciado se ha dicho, la expresion de B es

$$B = \frac{3\sqrt{3}}{2}A^2.$$

Resuelta la ecuacion, da

$$x = -\frac{A}{2} \pm \frac{A}{2}\sqrt{3\left(\frac{4V}{Bh} - 1\right)}.$$

El problema admite, pues, en general *dos soluciones.*

DISCUSIÓN.

Las raíces son *imaginarias* cuando $V < \frac{Bh}{4}$; *reales é iguales*

$á - \frac{A}{2}$, cuando $V = \frac{Bh}{4}$; *reales y desiguales* cuando $V > \frac{Bh}{4}$. En este último caso, el radical es *menor, igual* ó *mayor* que 1, segun que V sea *menor, igual* ó *mayor* que $\frac{Bh}{3}$; y por consiguiente: las raíces reales y desiguales son *ambas negativas* cuando $V < \frac{Bh}{3}$; una raíz es *cero*, y otra $-A$, cuando $V = \frac{Bh}{3}$; una es *positiva* y otra *negativa*, cuando $V > \frac{Bh}{3}$. En este último caso, todavía vemos que, segun sea V *menor, igual* ó *mayor* que Bh, la raiz positiva x' será *menor, igual* ó *mayor* que A, y la raíz negativa x'' será numéricamente *menor, igual* ó *mayor* que 2A.

Para mayor claridad agrupemos los resultados dados por la fórmula que resuelve el problema:

$V < \frac{Bh}{4}$. . . . . raíces imaginarias.

$V = \frac{Bh}{4}$. . . . . $x' = x'' = -\frac{A}{2}$.

$$V > \frac{Bh}{4} \begin{cases} V < \frac{Bh}{3}. \ldots\ldots\ldots\

meramente que la inclinación del eje del tronco de pirámide sobre el plano de la base es arbitraria, y en nada afecta ni interesa al problema de que tratamos; porque estando situada la base inferior B del tronco en el plano P *(fig. 32)*, y en una posicion dada, bastará colocar el exágono regular, cuyo lado sea x en el plano P' y con sus lados paralelos á los del exágono B: *en cualquiera de estas posiciones,* el exágono situado en el plano P' determinará en union de B, un tronco de pirámide cuyo volúmen es V y cuya altura es h, pero de figura indeterminada, con tal que se tenga presente que debe formarse *tronco de primera especie* si el lado x' de la base superior es *positivo,* y de *segunda especie* si el lado x'' es *negativo*.

Ahora bien, si teniendo el plano P' paralelo á P, y á la distancia h, concebimos un plano Q' paralelo á ellos y á la distancia $\frac{3}{4}h$ del plano P, é imaginamos una pirámide cualquiera (la llamaremos q') que tenga por base B y su vértice en el plano Q', y otra pirámide cualquiera (la llamaremos p') que tenga por base B y su vértice en el plano P', el volúmen de la primera q' sería $\frac{Bh}{4}$, y el volúmen de la segunda p' sería $\frac{Bh}{3}$: en vista de esto, la interpretacion de los resultados que preceden es clara.

Considerando B y h constantes, y haciendo variar V por ley de continuidad, diremos que:

Si el volúmen dado V es menor que el volúmen $\frac{Bh}{4}$ de la pirámide q', *no hay solucion.*

Si el volúmen dado V es igual al volúmen $\frac{Bh}{4}$ de la pirámide q', hay *un solo tronco* de pirámide que resuelve el problema, y es tronco de 2.ª especie: las dos pirámides opuestas por el vértice que lo constituyen, tienen su vértice comun en el plano D paralelo á P, y á la distancia $\frac{2}{3}h$ de él, puesto que x' y x'' son iguales á $-\frac{A}{2}$, lo cual indica (en virtud de

la propiedad conocida de las secciones causadas en una pirámide por un plano paralelo á la base) que la altura de la pirámide superior es mitad de la altura de la pirámide inferior.

Creciendo el volúmen desde $\frac{Bh}{4}$ (el de la pirámide q') hasta $\frac{Bh}{3}$ (el de la p'), hay siempre *dos troncos* de pirámide de 2.ª especie que resuelven el problema para cada valor de V.

Si el volúmen dado V es igual al volúmen $\frac{Bh}{3}$ de la pirámide p' resuelven el problema por una parte la pirámide p, y por otra un tronco de 2.ª especie, constituido por dos pirámides opuestas é iguales, cuyo vértice comun está, por consiguiente en el plano M paralelo á P á la distancia $\frac{1}{2}h$ de este; como se ve, el vértice de uno de los troncos de pirámide de 2.ª especie (que resolvían el problema para valores de V comprendidos entre $\frac{Bh}{4}$ y $\frac{Bh}{3}$) ha subido hasta el plano P'', y un tronco se ha convertido en pirámide; mientras que el vértice del otro tronco de 2.ª especie ha bajado hasta el plano medio M.

Cuando el volúmen dado V es mayor que $\frac{Bh}{3}$, hay siempre dos troncos, uno de 1.ª y otro de 2.ª especie, que resuelven el problema para cada valor de V, y se ve que:

Si el volúmen dado V es menor que el volúmen Bh del prisma que tiene por base B y por altura h, la base superior del tronco de 1.ª especie es menor que la inferior B, puesto que la raiz positiva x' es menor que A; y el vértice comun de las dos pirámides opuestas que constituyen el tronco de 2.ª especie, está comprendido entre el plano medio M y el plano E que se halla á la distancia $\frac{1}{3}h$ de P puesto que x'' es menor que 2A.

Si el volúmen dado V es igual al volúmen Bh del prisma citado, el tronco de 1.ª especie se convierte en este prisma, puesto que x' es igual á A; y el vértice comun de las dos pi-

rámides opuestas que constituyen el tronco de 2.ª especie está en el plano E, paralelo á P á la distancia $^1/_3 h$: como se ve, el vértice de la pirámide á que pertenece el tronco de 1.ª especie ha subido hasta el infinito.

Si el volúmen dado V es, finalmente, mayor que el volúmen Bh del prisma, el tronco de 1.ª especie pertenece á una pirámide que tiene su vértice debajo del plano P, puesto que x' es mayor que A; y el vértice comun de las dos pirámides opuestas que constituyen el tronco de 2.ª especie está debajo del plano E paralelo á P á la distancia $^1/_3 h$: creciendo el volúmen V desde Bh indefinidamente, el vértice de la pirámide á que pertenece el tronco de 1.ª especie (que está debajo del plano P) se acerca á él indefinidamente, mientras que el vértice del tronco de 2.ª especie (que está encima del plano P) se acerca tambien indefinidamente á él.

NOTA 26 (de la pág. 360).

Se sabe que *cuando dos figuras* F′ *y* F″ *son simétricas* (simetría respecto á un centro ó á un plano) *de una tercera* F, *son iguales entre sí*. Pero conviene ver cuál es el movimiento *más sencillo* para llevar á coincidir la figura F′ con la F″ en los diversos casos.

1.° *Si las dos simetrías son respecto á dos centros* o *y* o′ *(fig. 33) ó respecto á dos planos paralelos* P *y* P′ *(fig. 34), el movimiento más sencillo es un simple movimiento de traslacion*, porque las dos figuras iguales F′ y F″ están igualmente orientadas.

Se ve facilmente que, en uno y otro caso, la magnitud de la traslacion es doble de la distancia que media entre los dos centros ó entre los dos planos de simetría, y en la direccion indicada por esta distancia. En el caso de dos planos de simetría paralelos P y P′, se tiene

$$aa'' = 2ap' \text{ y } aa' = 2ap;$$

de donde, restando,

$$a'a'' = 2pp'.$$

2.° *Si las dos simetrías son respecto á dos planos* P *y* P′ *que se corten (fig. 35), el movimiento más sencillo es un simple movimiento de rotacion.*

Para demostrarlo, hagamos el dibujo sobre un plano perpendicular á la interseccion I de los dos planos: entónces esta interseccion aparece representada por el punto I, y los planos P y P′ por rectas. Se ve primeramente que la figura F′ podria pasar á ocupar la posicion F_1 por un primer giro de 180° alrededor del eje *p;* y que de esta posicion F_1 podria pasar á F″ por un segundo giro de 180° alrededor del eje *p′*, siendo F_1 la figura simétrica de F respecto á un punto cualquiera I de la interseccion, y *p*, *p′* las perpendiculares levantadas á P y P′ en dicho punto.

Pero se puede llevar directamente F′ á F″ por un simple giro alrededor de la recta I en una magnitud angular doble del ángulo que forman entre sí los dos planos P y P′ de simetría. En efecto; si se mira un corte como el representado en el dibujo, se nota que el punto I equidista de *a′* y *a″* (ó de *b′* y *b″*, de *c′* y *c″*, . . .) y que

$$a'oa'' = b'ob'' = \ldots = 2\text{PIP}';$$

lo cual prueba que el corte plano de la figura F′ llegaria á coincidir con el de la figura F″ por un giro alrededor del punto *o* en una magnitud angular doble del ángulo PIP′. Ahora bien, lo dicho para un corte se diria para todos, y el conjunto de giros planos quedaria realizado de una vez mediante el giro en el espacio de la figura F′ alrededor de la recta I (*).

(*) El caso de dos planos de simetría paralelos, es un caso particular de este: la interseccion I está en el infinito y el movimiento de rotacion se convierte en un movimiento de traslacion perpendicularmente á los planos.

3.° *Si las dos simetrías son respecto á un centro* o *y á un plano* P *(fig. 36), se requieren dos movimientos uno de traslacion y otro de rotacion;* el primero para llevar la figura F' á la posicion F_1, y el segundo en 180° alrededor de una perpendicular al plano P para llevarla de la posicion F_1 á la F'', siendo F_1 la figura simétrica de F respecto á un punto cualquiera del plano P, por el cual se levantará la perpendicular que ha de servir de eje de giro.

Los dos movimientos más sencillos son: 1.°, movimiento de traslacion, cuya magnitud sea doble de la distancia *op* que media entre el centro *o* y el plano P, y en la *direccion* y *sentido* de esta distancia; 2.°, movimiento de rotacion en 180° alrededor de la perpendicular *op*. Es decir, que los dos movimientos *más sencillos* consisten en un movimiento paralelamente á *op* seguido de otro alrededor de la misma *op:* el punto cualquiera que había que escoger en el plano P, es ahora el pié mismo de la distancia entre el centro y el plano de simetría.

NOTA 27 (de la pág. 375).

El primer Lema considera exclusivamente el caso en que uno ó varios diedros *no adyacentes* á la cara ASB (del ángulo poliedro SABCDEF) que puede variar, aumenten ó disminuyan.

No se puede suponer que aumente ó disminuya uno de los diedros SA ó SB adyacentes á dicha cara. En efecto, si ASB es la única cara que puede variar, es decir, si se sabe que las demás caras permanecen constantes, no se puede suponer que permaneciendo constantes los diedros SC, SD, SE, SF, varíen en manera alguna el diedro SA ó el SB; porque si se construye el ángulo poliedro S á partir de la arista SB, y de la cara BSC, habremos de colocar sucesivamente en posiciones

obligadas las caras CSD, DSE, ESF, FSA y egaremos por consiguiente, á una obligada posicion de la última arista SA, lo cual significa que no hay variacion posible para la cara ASB, ni para el diedro SA, ni para el diedro SB.

El único supuesto admisible es el de que aumente ó disminuya un diedro como el SD. En este supuesto se nota que uno de los diedros adyacentes ó los dos SA y SB habrán de variar: porque si se empieza la construccion del ángulo poliedro por la arista SB y la cara BSC, y se pone la cara CSD (con lo cual tendremos ya el ángulo BSD), y se aumenta por ejemplo, el diedro SD, dejando constante lo demás, al llegar á la última arista (que llamaremos SA′) se observa que el triedro SBDA′ quedaria con respecto al SBDA, en la posicion siguiente: la cara BSD, comun, el diedro BSDA, siendo una parte del BSDA′; y la cara DSA, igual á DSA′. Se ve bien que, en cualquiera de las tres posiciones en que puede quedar la arista SA con respecto á la cara BSA′, habrá variado forzosamente uno de los diedros adyacentes ó los dos.

Es evidente que en un ángulo triedro no se puede suponer que varíe ningun diedro si permanecen constantes las tres caras, puesto que dos triedros que tengan sus caras iguales una á una, tienen tambien sus diedros iguales uno á uno. Por esta razon, al suponer que todas las caras de un poliedro sean constantes y que varien todos los diedros, no cabe pensar en que se trate de un ángulo triedro.

NOTA 28 (de la pág. 415).

ESFERA.

PROPIEDADES GENERALES.

Asimilando la superficie esférica de un casquete á la superficie plana de un círculo, el polo (que está en el casquete)

de la circunferencia menor queda asimilado al centro del círculo plano, y podremos llamar *cuerda esférica* de un casquete al arco de círculo máximo (el menor) que una dos puntos de la circunferencia que lo limita; y *diámetro esférico* de un casquete á una cuerda esférica que pase por el polo, así como se llama *radio esférico* al arco de círculo máximo que une el polo con un punto de la circunferencia.

Un diámetro esférico de un casquete, se compone de dos radios esféricos; y como se sabe que todos los radios esféricos de un mismo casquete son iguales, queda establecido que *todos sus diámetros esféricos son iguales.*

TEOREMAS.

En una misma esfera, ó en esferas iguales, dos casquetes del mismo radio esférico son iguales; porque, superpuestas las esferas de modo que los polos de los círculos coincidan, éstos coinciden tambien.

Un punto de una superficie esférica es *interior* ó *exterior* á un casquete, segun que su distancia al polo sea *menor* ó *mayor* que el radio esférico.

Todo diámetro esférico divide al casquete en dos partes iguales; porque si completada la circunferencia de círculo máximo de que forma parte el diámetro esférico, se hace girar uno de los hemisferios alrededor del eje polar hasta que coincida con el otro hemisferio, las dos partes en que estaba dividido el casquete coinciden tambien.

El diámetro es la mayor de las cuerdas esféricas de un casquete; porque una cuerda cualquiera, como lado de un triángulo esférico, es menor que la suma de los dos radios esféricos que terminan en sus extremos, y esta suma equivale á un diámetro esférico.

Una cuerda esférica que no es diámetro de un casquete, subtiende dos arcos diferentes de la circunferencia menor que sirve de base. Refiriéndonos al menor de los arcos subtendi-

dos, diremos que en una misma esfera ó en esferas iguales, y en un mismo casquete ó en casquetes iguales:

TEOREMAS.

1.° *Dos arcos iguales, son subtendidos por cuerdas esféricas iguales;* porque, superpuestos los casquetes de modo que coincidan los arcos de que se trata, sus cuerdas coincidirán tambien por tener sus extremos comunes; si los arcos ab y $a'b'$ *(fig. 37)* están en la base de un mismo casquete, bastará trazar el diámetro esférico mPn que pase por un punto cualquiera m del arco aa', y hacer girar el semicasquete $mPnb$ alrededor del eje polar PoP', hasta que el punto a llegue á b', porque en esta posicion el punto b' estará en a' por la supuesta igualdad de los arcos ab y $a'b'$, y las cuerdas habrán coincidido tambien.

2.° *De dos arcos desiguales* ac *y* ab, *el mayor* ac *es subtendido por mayor cuerda;* porque si se trazan los radios esféricos Pb y Pc correspondientes á los puntos b y c, se tiene

$$ab + Pc < ac + Pb;$$

y suprimiendo los radios Pc y Pb, que son iguales, se llega á

$$ab < ac;$$

si los arcos fueran ac y $a'b'$, se llevaria éste á la posicion ab por un giro alrededor del eje polar PoP'.

Los recíprocos de los dos teoremas (1.° y 2.°) son ciertos y se demuestran por reducción al absurdo, como todos los que se hallan en un caso análogo.

TEOREMA.

El diámetro esférico mPm' *(fig. 38) perpendicular á una cuerda* anb, *divide á esta y á los arcos subtendidos* amb *y* am'b *en dos partes iguales.* En efecto, al trazar los radios esféricos Pa y Pb, que son oblicuos iguales que caen sobre anb, habrán

de equidistar (según se sabe) del pié *n* del perpendicular. Por otra parte, siendo *mn*P*m'* el lugar geométrico de los puntos equidistantes de *a* y *b*, las cuerdas esféricas *ma* y *mb* serian iguales; luego los arcos *ma* y *mb* lo son tambien: otro tanto se diria de los arcos *am'* y *bm'*.

El diámetro esférico *m'* P*nm* tiene las cinco propiedades:

1.ª Pasa por el polo P;

2.ª Pasa por el punto medio *n* de la cuerda *anb;*

3.ª Pasa por el punto medio *m* del arco *amb;*

4.ª Pasa por el punto medio *m'* del arco *am'b:*

Y 5.ª Es perpendicular á la cuerda *anb.*

Dos de estas condiciones determinan el arco de círculo máximo *m'* P*nm;* por consiguiente, si se cumplen dos cualesquiera de ellas, habran de quedar satisfechas las otras tres. Se pueden enunciar tantos teoremas como combinaciones dos á dos puedan hacerse con las cinco condiciones.

Todas las cuerdas perpendiculares á un diámetro *m*P*m' (figura 39)* forman parte de las circunferencias de círculo máximo que concurren en los polos Q y Q' del diámetro; por lo que acabamos de decir, este diámetro divide en dos partes iguales á todas esas cuerdas, ó bien es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas.

En una misma esfera ó en esferas iguales, y en un mismo casquete ó en casquetes iguales:

TEOREMAS.

1.° *Dos cuerdas iguales* anb, a'n'b' *(fig. 40) equidistan del polo ó de los polos,* porque las distancias P*n* y P*n'* son catetos homólogos de los triángulos rectángulos P*bn* y P*a'n',* que son iguales por tener las hipotenusas P*b* y P*a'* iguales como radios, y los catetos *bn* y *a'n'* iguales como mitades de las cuerdas dadas.

2.° *De dos cuerdas desiguales* a'b' *y* a'b'', *la menor* a'b' *dista más del polo:* porque siendo, como ya sabemos, el arco *a'b'* me-

nor que $a'b''$, el perpendicular Pn' cortará á la cuerda $a'b''$ entre P y n', y por tanto

$$Pn' > Pc;$$

pero á su vez

$$Pc > Pn'',$$

porque el oblicuo es mayor que el perpendicular; luego

$$Pn' > Pn'':$$

si las cuerdas no partieran de un mismo punto de la circunferencia, se las llevaría á esta disposicion mediante un giro.

Los recíprocos son ciertos y se demuestran por reduccion al absurdo.

Los teoremas que preceden tienen lugar si los casquetes son menores que el hemisferio: si se tratara de casquetes mayores que el hemisferio, los teoremas se invertirian. Así, en tales casquetes:

El diámetro es la menor de las cuerdas, porque los suplementos á cuatro rectos (circunferencia completa de círculo máximo) están en orden inverso de magnitud en el casquete que falta para completar la superficie esférica.

De dos arcos desiguales (en casquetes iguales de esferas iguales), *el mayor es subtendido por menor cuerda;*

La menor cuerda dista ménos del polo;

Etc., etc.

Se dice que una circunferencia de círculo máximo es *tangente* á una menor cuando no tiene más que un punto comun con ella, ó mejor: cuando es *el límite* de una circunferencia máxima secante que gire alrededor de uno de los puntos de interseccion hasta que el otro llegue á confundirse con el primero.

TEOREMA.

La circunferencia máxima perpendicular á un radio esférico de círculo menor en su extremo, es tangente á éste; porque hallándose todos sus puntos, á excepcion del punto de contacto, á distancias del polo mayores que el radio (como oblicuos), estarán fuera del casquete. Si el casquete que se considera es mayor que el hemisferio, se dirá, por el contrario, que hallándose todos los puntos de la circunferencia máxima, á excepcion del punto de contacto, á distancias del polo menores que el radio (como oblicuos), estarán dentro del casquete.

Cuando se considera el primer casquete, se dice que la circunferencia máxima está en contacto exterior con su base; y si se atiende al segundo casquete, se dice que está en contacto interior con su base.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Toda circunferencia máxima tangente á una menor, es perpendicular al radio esférico que termina en el punto de contacto; porque, teniendo por hipótesis todos sus puntos, á excepción del punto de contacto, fuera del casquete, están á una distancia del polo mayor que el radio esférico; por tanto, el radio esférico que va al punto de contacto es la dirección de la mínima distancia, y, por consiguiente, la perpendicular. Si se considera el casquete mayor que el hemisferio, se dice lo inverso, y se llega á la misma consecuencia.

Se ve que por un punto de una circunferencia menor se puede siempre trazar una, y sólo una circunferencia máxima tangente á la menor, puesto que por un punto se puede levantar una, y sólo una máxima perpendicular al radio esférico.

Escolio.

Los radios esféricos son, pues, las direcciones de las cir-

cunferencias máximas *normales* á una menor. Así, desde un punto interior m ó exterior n á un casquete P *(fig. 41)* se pueden trazar dos normales ma y ma', ó na y na', *que son las distancias mínima y máxima de los puntos* m *ó* n *á los de la circunferencia menor.* En efecto, si se trata del punto m, se tiene uniéndole con un punto cualquiera b de la circunferencia, y trazando el radio Pb,

$$mb > Pb - Pm, \text{ ó bien } mb > Pa - Pm = ma$$

y

$$mb < mP + Pb, \text{ ó bien } mb < mP + Pa' = ma'.$$

Análogamente, para el punto n

$$nb > nP - Pb, \text{ ó bien } nb > nP - Pa = na,$$

y

$$nb < nP + Pb, \text{ ó bien } nb < nP + Pa' = na'. \text{ (*)}$$

TEOREMA.

Si dos arcos de círculo máximo concurren en dos puntos Q (que serán diametralmente opuestos) *(fig. 42) de la circunferencia máxima* pq, *cuyos polos son los mismos de una menor, interceptan en esta menor arcos iguales.*

Se distinguen tres casos:

1.° Que los dos arcos de círculo máximo sean secantes á la circunferencia menor;

2.° Que uno sea secante y otro tangente;

3.° Que los dos sean tangentes.

Sean en el primer caso los arcos secantes amb y cnd que concurren en Q; trazando el diámetro ePe' perpendicular á uno de los arcos, cnd por ejemplo, se ve que tendrá su polo en un

(*) Si el casquete P es un hemisferio, las dos normales ma y mb son también *máxima* y *mínima* entre los diversos arcos de círculo máximo que caen de m sobre ab, propiedad muy conocida.

punto de este arco *cnd*, puesto que es perpendicular á él, y en un punto de la máxima *pq*, puesto que ha de pasar por P, y, por consiguiente, que sus polos serán precisamente los puntos Q; por tanto, este diámetro *ePe'* será tambien perpendicular al otro arco *ab* (que por el supuesto pasa por Q); ahora bien, segun un teorema ya demostrado,

$$ace = edb \text{ y } ce = ed;$$

luego

$$ac = bd.$$

Sean en el segundo caso los arcos *Qe* y *Qcd*, el primero tangente y el segundo secante, que concurren en Q; trazando, como anteriormente, el diámetro esférico *ePe'* perpendicular á *cnd* (cuyo polo es Q), será tambien perpendicular á *Qe;* luégo terminará en el punto de contacto *e*, y segun el mismo teorema aplicado antes,

$$ce = ed.$$

Sean en el tercer caso los dos tangentes *Qe* y *Qe'*; trazando el diámetro perpendicular á *Qe* (cuyo polo es Q); será tambien perpendicular á *Qe'*; luégo terminará en los puntos de contacto *e* y *e'* y dividirá á la circunferencia menor en dos partes iguales.

Reciprocamente:

TEOREMA.

Si dos arcos de círculo máximo interceptan en una circunferencia menor arcos iguales, concurrirán en dos puntos Q (diametralmente opuestos) *de la circunferencia máxima* pq, *cuyos polos son los mismos de la menor.*

Distinguiendo los mismos tres casos, vemos que:

1.° Si los arcos interceptados *ac* y *bd* son iguales, bajando el diámetro *ePe'* perpendicular á la cuerda *cd*, se tiene

$$ce = ed,$$

y, por consiguiente,

$$ac + ce = bd + dc \text{ ó } ae = ed;$$

lo que indica que el diámetro será tambien perpendicular al arco *ab;* luego los dos arcos de círculo máximo *cd* y *ab,* perpendiculares á *e*P*e'*, concurrirán en los polos de éste, que pertenecen á la circunferencia *pq.*

2.° Si los arcos interceptados *ce* y *ed* son iguales, el diámetro *e*P*e'* que baja al punto de contacto *e* es perpendicular al tangente Q*e,* y tambien al secante *cd,* puesto que pasa por el polo y por el punto medio *e* del arco subtendido *ced;* luego los dos arcos de círculo máximo concurrirán en los polos Q de *e*P*e'*, que pertenecen á la circunferencia *pq.*

3.° Si los arcos interceptados *eae'* y *ebe'* son iguales, los puntos *e* y *e'* estarán diametralmente opuestos en el casquete, y, por consiguiente, Q*e* y Q*e'*, perpendiculares al diámetro *e*P*e'*, concurrirán en los polos de éste, que pertenecen á la circunferencia *pq.*

TEOREMA.

Tres puntos a, b, c *(fig. 43) de la superficie esférica no situados en una misma circunferencia máxima, determinan una circunferencia menor;* porque si se levantan los máximos perpendiculares P*m*P' y P*n*P' en los puntos medios *m* y *n* de los arcos de círculo máximo *amb* y *bnc,* los puntos P y P' de interseccion equidistan de *a, b* y *c,* y son, por consiguiente, los polos del menor pedido que existe siempre, y es único; como comprobacion, el máximo perpendicular en el punto medio de *ac* concurrirá en los mismos puntos P y P' (puesto que éstos equidistan de *a* y *c),* lo cual se expresa diciendo que: *los tres arcos de círculo máximo, perpendiculares á los tres lados de un triángulo en sus puntos medios, concurren en los polos*

del círculo menor circunscrito al triángulo. Si los tres puntos *a, b, c* estuvieran situados en una misma circunferencia máxima, no habria triángulo.

Se sabe que: *si dos circunferencias menores se cortan (fig. 44), el arco de círculo máximo que une sus polos* P *y* Q *es perpendicular á la cuerda comun* ab *y la divide en dos partes iguales,* porque los puntos P y Q equidistan de *a* y *b*.

Tambien se sabe que cuando los dos puntos de interseccion *a* y *b* se reunen en uno solo *a'*, el arco PQ pasa por este punto *a'* y es perpendicular al límite de *ab*, que es el máximo tangente en *a'*.

Así, pues:

Si dos circunferencias menores son tangentes, el punto de contacto está en la circunferencia máxima que une los polos, y la circunferencia máxima perpendicular á ésta en el punto de contacto, es la tangente comun á las dos menores: el punto de contacto deja á diferente lado ó á un mismo lado á los dos polos, segun que el contacto sea exterior ó interior.

De aquí los cinco teoremas conocidos y sus recíprocos, en que se expresan las condiciones necesarias y suficientes para definir la posicion relativa de dos circunferencias situadas en una superficie esférica. No hay lugar de distinguir estas varias posiciones relativas cuando se trata de dos circunferencias máximas, puesto que dos de estas se cortan siempre en puntos diametralmente opuestos y se cumplen las condiciones

$$D \begin{matrix} < R + R = \frac{1}{2} \text{ circunferencia máxima,} \\ > R - R = 0. \end{matrix}$$

porque dos puntos cualesquiera de una superficie esférica distan siempre uno de otro ménos de media circunferencia máxima.

Recordamos estos teoremas con el objeto de hacer ver que las condiciones

$D > r + r_1$ para dos circunferencias menores exteriores,
$D < r - r_1$ » » » interior una á otra,
$D = r + r_1$ » » tangentes exteriormente.
$D = r - r_1$ » » » interiormente.
se refieren á la distancia de los polos P y P_1 que están en los casquetes menores que el hemisferio y á los radios esféricos r y r_1 correspondientes á estos casquetes; pero no á la combinacion de un casquete menor que el hemisferio para una circunferencia y el mayor que el hemisferio para la otra, ni á la combinacion de los dos mayores que el hemisferio, como vamos á demostrar.

Representaremos siempre por P y P' los dos polos de la primera circunferencia menor, cuyos radios esféricos respectivos llamaremos r y r'; por P_1 y por P'_1 los dos polos de la otra circunferencia menor, cuyos radios esféricos respectivos llamaremos r_1 y r'_1; y por D la distancia entre los polos P y P_1. Nótese, ante todo, que

$$r' = 2 - r \text{ y } r'_1 = 2 - r_1.$$

1.ª *posicion.* EXTERIORES: $PP_1 = D > r + r_1$.

Considerando *(fig. 45)* las otras tres distancias que median entre los cuatro polos, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} P'P_1 = 2 - D < 2 - r - r_1 = r' - r_1. \ldots\ldots\ldots \\ PP'_1 = 2 - D < 2 - r - r_1 = r'_1 - r. \ldots\ldots\ldots \\ P'P'_1 = D > r + r_1 = 2 - r' + 2 - r'_1 = 4 - (r' + r'_1) \end{array}\right\} :$$

En ninguna de estas tres combinaciones de polos se verifica que *la distancia de los polos sea mayor que la suma de los radios esféricos correspondientes.* En dos de ellos, la distancia de los polos es menor que la diferencia de los radios esféricos correspondientes, y en la última, la distancia de polos es mayor que el suplemento á cuatro rectos de la suma de los radios esféricos correspondientes.

2.ª *posicion.* INTERIOR UNA Á OTRA: $PP_1 = D < r - r_1$.

Considerando *(fig. 46)* las otras distancias entre los cuatro polos, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} P'P_1 = 2 - D > 2 - r + r_1 = r' + r_1 \ldots\ldots\ldots \\ PP'_1 = 2 - D > 2 - r + r_1 = 2 - r + 2 - r'_1 = 4 - (r + r'_1) \\ P'P'_1 = D < r - r_1 = 2 - r' - (2 - r'_1) = r'_1 - r_1 \end{array}\right\} :$$

En ninguna de estas tres combinaciones se verifica que *la distancia de los polos sea menor que la diferencia de los radios esféricos correspondientes.* Se enunciarian sin dificultad, por simple lectura, los resultados de las tres combinaciones.

3.ª *posición.* CONTACTO EXTERIOR: $PP_1 = D = r + r_1$.

Considerando *(fig. 47)* las otras tres distancias de polos, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} P'P_1 = 2 - D = 2 - r - r_1 = r' - r_1 \ldots\ldots\ldots \\ PP'_1 = 2 - D = 2 - r - r_1 = r'_1 - r \ldots\ldots\ldots \\ P'P'_1 = D = r + r_1 = 2 - r' + 2 - r'_1 = 4 - (r' + r'_1) \end{array}\right\} :$$

En ninguna de las tres combinaciones se verifica que *la distancia de los polos sea igual á la suma de los radios esféricos correspondientes.* Se podrian leer fácilmente los resultados obtenidos.

4.ª *posición.* CONTACTO INTERIOR: $PP_1 = D = r - r_1$.

Las otras tres distancias de polos *(fig. 48)* son

$$\left.\begin{array}{l} P'P_1 = 2 - D = 2 - r + r_1 = r' + r_1 \ldots\ldots\ldots \\ PP'_1 = 2 - D = 2 - r + r_1 = 2 - r + 2 - r'_1 = 4 - (r + r'_1) \\ P'P'_1 = D = r - r_1 = 2 - r' - (2 - r'_1) = r'_1 - r' \end{array}\right\} .$$

Tampoco en ninguna de estas tres combinaciones se verifica que *la distancia de polos sea igual á la diferencia de los radios*

esféricos correspondientes. Se podria ver tambien el enunciado propio de cada combinacion.

En vista de todo lo dicho, aparece claramente la ventaja que hay en hablar siempre de los polos que están en los casquetes menores que el hemisferio, y de los radios esféricos correspondientes, que son entonces menores que un cuadrante; de esta suerte se conservan los mismos enunciados de Geometría plana, y no hay equívocos. Como se sabe, las tres magnitudes D, r, r_1, satisfacen entonces á la condicion

$$D + r + r_1 < 4.$$

Cuando se trate de una circunferencia máxima y una menor, deben considerarse tan solo tres posiciones relativas, á saber: *que la máxima sea exterior, tangente ó secante á la menor (fig. 45)* (lo mismo que una recta con respecto á una circunferencia en Geometría plana), puesto que las posiciones de exterior é interior son una misma, é igualmente el contacto es interior á la vez que exterior. El carácter que distingue á las tres posiciones es: que *la menor distancia del polo* P *al máximo sea mayor, igual ó menor que el radio esférico* r.

TEOREMA.

Si se consideran varias circunferencias menores ABx, ABy,... *(fig. 50) que pasen por dos puntos* A *y* B *sobre una superficie esférica, y desde un punto* P *de la cuerda esférica comun* AB *prolongada se trazan los máximos* Px, Py,..., *tangentes á dichas menores, las longitudes de estas tangentes serán iguales.*

Para demostrarlo, observemos ante todo que la recta ABM es la interseccion comun de los planos de las menores con el plano del máximo ABP, y que esa recta ABM prolongada cortará en general al radio *o*P (tambien prolongado en un cierto punto M). Fijémonos además en que, si se une con M el

punto x de contacto de una de los menores A Bx con el máximo Px, la recta de union Mx es la tangente comun á la menor que consideramos y al máximo, porque es la interseccion de sus planos.

Visto esto, es fácil demostrar el Teorema, porque basta unir el centro o con los puntos x, y,... y formar así los triángulos rectángulos Mox, Moy,... que tienen la hipotenusa oM comun, y los catetos ox, oy,... iguales (*): la igualdad de estos triángulos demuestra ya que los ángulos Pox, Poy,... es decir, que las longitudes de las tangentes Px, Py,... son iguales. En el caso particular en que la recta A B fuera paralela al radio oP, el punto M estaría (como se dice vulgarmente) en el infinito, y los arcos Px, Py,... serian cuadrantes: la circunferencia xy... sería máxima.

El Teorema de Geometría esférica que acabamos de demostrar, es análogo al siguiente de Geometría plana:

Si se consideran varias circunferencias que pasen por dos puntos A *y* B, *y desde un punto* M *de la cuerda comun* AB *prolongada se trazan las tangentes* Mx, My,..., *estas tangentes serán iguales.*

Su demostracion es mucho más sencilla que la de Geometría esférica, porque basta notar que

$$\left.\begin{aligned} \overline{Mx}^2 &= MA.MB \\ \overline{My}^2 &= MA.MB \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\},$$

para deducir que $Mx = My = \ldots$

Cuando el punto M se aleja al infinito, las tangentes Mx, My,... son paralelas, y la circunferencia xy,... es una línea recta.

(*) Se ve tambien directamente que los catetos Mx, My,... son iguales, puesto que

$$\left.\begin{aligned} \overline{Mx}^2 &= MB.MA \\ \overline{My}^2 &= MB.MA \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\},$$

y por tanto, $Mx = My = \ldots$

Corolarios.

La circunferencia menor que tiene su polo en P, y Px por radio esférico, es el lugar geométrico de los puntos de contacto x, y,... Esta circunferencia menor xy,... corta normalmente á todas las dadas, puesto que estas son tangentes á los radios esféricos Px, Py,... en los puntos x, y,..., y estos radios esféricos son normales á la menor xy,...

En Geometría plana se ve igualmente que la circunferencia que tiene su centro en M y Mx por radio, es el lugar geométrico de los puntos de contacto xy,..., y que esta circunferencia es normal á todas las circunferencias dadas.

Problemas de Geometría esférica.

PROBLEMA 1.°

Trazar por un punto dado A *una circunferencia máxima tangente á una menor dada, cuyo radio es* r.

Se sabe que para resolver este problema hay que describir desde el polo P *(fig. 51)* con el radio esférico $2r$ una circunferencia, y desde el punto dado A, con el radio esférico AP, otra circunferencia; unir con P por arcos de círculo máximo los puntos M y N comunes á estas dos circunferencias auxiliares, y los puntos en que estos arcos de union corten á la circunferencia dada son los puntos de contacto x é y que se buscan. Conviene, para mayor claridad en la discusion, suponer que la distancia D á que se halla el punto dado A del polo P de la circunferencia menor, pase por todos los estados de magnitud desde 0 á 2.

Discusion.

1.° $D < r$: en este caso, el punto A es interior al casquete dado y se verifica

$$D < 2r - D,$$

por lo cual la circunferencia auxiliar descrita desde el punto

A como polo, con el radio esférico D, es interior á la descrita desde el punto P con el radio $2r$, y *no hay solución*.

2.° $D = r$: en este caso, el punto A está en la circunferencia menor y se verifica

$$D = 2r - D,$$

y la primera circunferencia auxiliar es tangente interiormente á la segunda; el punto de contacto es el mismo dado A, y *hay una solucion*, que no aparece determinada por esta construcción, porque el punto dado y el de contacto son uno mismo; pero que se obtiene (como es sabido) trazando en el punto A la perpendicular al radio esférico; es decir, haciendo polo en el punto que dista un cuadrante del punto A sobre dicho radio esférico.

3.° $D \begin{matrix} > r \\ < 2 - r \end{matrix}$: en este caso, el punto A está en la zona comprendida entre la circunferencia menor dada y su simétrica, y se verifica

$$D \begin{matrix} < 2r + D \\ > 2r - D \end{matrix} \Big\}; \; D + 2r + D = 2(r + D) < 4;$$

y las dos circunferencias auxiliares se cortan, y *hay dos soluciones*, que se trazan fácilmente, porque aparece determinada cada una de ellas por dos puntos.

4.° $D = 2 - r$: en este caso, el punto A está en la circunferencia simétrica de la dada y se verifica

$$D = 4 - (D + 2r),$$

que es la condicion del contacto interior cuando (como en el caso presente) una de las circunferencias tiene radio esférico D mayor que un cuadrante; el punto de contacto está sobre la superficie esférica, diametralmente opuesto al punto dado A, y *hay una solucion* que no está determinada por los dos puntos (por ser estos los extremos de un diámetro de la esfera, como acabamos de decir): se la obtendrá trazando una perpendicular al radio esférico de la circunferencia menor dada.

5.° $D > 2 - r$: en este caso, el punto A es interior al casquete simétrico del dado y se verifica

$$D > 4 - (D + 2r),$$

que es la condicion para que la cincunferencia auxiliar, cuyo polo es A, y su radio D (mayor que un cuadrante) sea interior á la circunferencia auxiliar cuyo polo es P y cuyo radio es $2r$: *no hay solucion.*

En todos estos casos, el radio $2r$ de una de las circunferencias auxiliares puede ser menor, igual ó mayor que un cuadrante, y todo lo dicho subsiste.

Hé aquí el cuadro de discusion:

Casos.		Soluciones.
1.° $D < r$.	$D < 2r - D$.	0
2.° $D = r$.	$D = 2r - D$.	1
3.° $D \begin{cases} > r \\ < 2 - r \end{cases}$	$D \begin{cases} > 2r - D \\ < 2r + D \end{cases}$ $D + 2r + D < 4$.	2
4.° $D = 2 - r$. .	$D = 4 - (D + 2r)$.	1
5.° $D > 2 - r$. .	$D > 4 - (D + 2r)$.	0

Si se imagina (para verlo todo más claramente) que el punto A recorre la zona A′ A″ *(fig. 52)* bajando desde la posicion A′ (en la circunferencia dada) hasta la posicion A″ (en su simétrica), se ve en la primera posicion una sola circunferencia máxima tangente en A′ á la menor dada, y en A'_1 á su simétrica; para todas las posiciones sucesivas hay siempre dos soluciones, cuyos dos puntos de contacto se van separando en arcos iguales sobre la menor dada á uno y otro lado del punto A′ (á medida que el punto dado A va descendiendo por el máximo A′ A″) hasta llegar á reunirse en A''_1 cuando el punto dado llega á A″, en cuya última posicion las dos soluciones se convierten de nuevo en una sola. Cuando el punto dado A ocupa la posicion media, se encuentra á la distancia un cuadrante de los polos P y P′; la primera circunferencia auxiliar es la máxima Pxy' $P'x'y$, y al unir con P los puntos comu-

nes que tendria con la 2.ª circunferencia auxiliar, se obtendrian los mismos puntos x é y, que son los de contacto; este es el único caso en que los radios esféricos Px y Py, que terminan en los puntos de contacto x é y, están en prolongacion uno de otro, siendo estos puntos diametralmente opuestos en la circunferencia menor; entonces las dos soluciones forman entre sí el mayor ángulo posible, que (como se ve) tiene la misma medida que el diámetro esférico $2r$ de la circunferencia menor dada.

Se sabe que, en todos los casos, las circunferencias máximas que se obtienen son tangentes á la menor dada y á su simétrica, siendo los puntos de contacto con una y otra diametralmente opuestos sobre la superficie esférica.

PROBLEMA 2.º

Trazar una circunferencia menor que pase por un punto dado B, *y sea tangente á una máxima dada en un punto* A. Levántese la máxima XAX′ *(fig. 53)* perpendicular á la dada en el punto A, y la XmX′ perpendicular en el punto medio de AB: los puntos X y X′ en que estas dos máximas se corten serán los polos de la menor pedida, que tendrá por radio esférico XA = XB.

PROBLEMA 3.º

Trazar una circunferencia menor que pase por un punto dado B, *y sea tangente á otra menor dada en un punto* A. Trácese el radio esférico PA *(fig. 54)*, y levántese la perpendicular mX en el punto medio m de AB; el punto X y su diametralmente opuesto en que se corten las dos máximas, serán los polos de la menor pedida.

Es evidente que la menor que se obtenga estará en el mismo casquete P′ en que se nos da el punto B; y que si este punto estuviera situado en la circunferencia menor, la solucion del problema coincidirá con esta misma.

PROBLEMA 4.°

Trazar una circunferencia menor que sea tangente á una máxima dada en un punto A, *y á una menor* b. Levántese la máxima AQ *(fig. 55)* perpendicular á la dada en el punto A; tómese sobre ella, á partir del punto A, la magnitud AD, igual al radio esférico *r* de la menor dada *b;* únase P con D por un arco de círculo máximo, y levántese una máxima CX perpendicular á él en su punto medio C: en X se tendrá el polo de la menor pedida, que será tangente exterior á la dada *b*. Tomando AD′ igual á *r*, y procediendo análogamente, se hallaría otra solucion tangente interiormente á *b*, que no representamos en la figura por temor de hacerla confusa.

Si las circunferencias máxima y menor dadas tuvieran los mismos polos como en la *fig. 56*, la máxima levantada perpendicularmente á la dada en el punto A pasaria por el polo P, y al hacer la construccion anterior llegaríamos á los puntos X é Y sobre la misma circunferencia AP, y los puntos de contacto B y B′ de las soluciones tangentes exterior é interiormente, estarian diametralmente opuestos sobre la menor dada *b*.

En el caso de que la máxima dada fuera tangente á la menor *b (fig. 57)*, se observa que la segunda solucion sería la misma circunferencia máxima dada; porque al tomar AD′ igual á *r*, unir P con D′, y levantar la perpendicular EQ en su punto medio, esta perpendicular pasaria por el polo Q, puesto que, siendo MP = AD′, el punto Q equidista de P y D′. Si en este caso el punto A fuera el mismo de contacto, el problema sería evidentemente indeterminado.

PROBLEMA 5.°

Trazar una circunferencia menor que pase por dos puntos dados A *y* B *y sea tangente á una máxima dada* CD.

El polo de la circunferencia pedida ha de estar situado en

la máxima Y*m*X *(fig. 58)*, perpendicular en el punto medio *m* al arco de círculo máximo AB. Pero si vemos el punto P en que el arco de círculo máximo AB prolongado corta á la circunferencia CD, la distancia esférica desde el punto P al punto de contacto que se busca habrá de ser igual á la longitud de la tangente trazada desde el punto P á una cualquiera de las menores que pasan por A y B (en virtud de un teorema demostrado ántes); luego bastará trazar una tangente de estas PT, y llevar su longitud á uno y otro lado del punto P, sobre la máxima dada; para tener los puntos de contacto C y D. Es evidente que los puntos A y B no pueden estar en distinto hemisferio con respecto á la máxima dada; si uno de los puntos A estuviera en la misma circunferencia dada, este problema sería uno de los anteriores (2.°).

PROBLEMA 6.°

Trazar una circunferencia menor que pase por dos puntos A *y* B, *y sea tangente á otra menor dada* NMC, *cuyo polo es* P. El polo de la circunferencia pedida ha de estar situado en la máxima Y*m*X *(fig. 59)*, perpendicular en el punto medio *m* al arco de círculo máximo AB; pero si trazamos por A y B una menor cualquiera que corte á la dada en dos puntos M y N, se observa que, si desde el punto P en que se corten los dos arcos de círculo máximo AB y MN, se trazan las tangentes PC y PD á la menor NMC, las circunferencias que pasen por los puntos A, B, C y por los A, B, D son tangentes á la menor dada. En efecto, P es un punto de la cuerda esférica comun NM prolongada; por consiguiente, las tangentes PD y PT son iguales, lo mismo que PC y PT; tambien P es un punto de la cuerda BA prolongada; por consiguiente, el arco de círculo máximo tangente que se trace desde el punto P á la menor BAD ha de ser igual á PT; pero como el arco PD tiene ya esta longitud, se deduce que este arco D será el tangente á la menor BAD; las dos menores CMN y BAD tienen, pues, en D la tangente comun PD; luego son tangentes entre sí. Lo mismo se diria de la otra solucion BAC.

PROBLEMA 7.°

Trazar una circunferencia máxima tangente á dos menores dadas P *y* P_1.

Se sabe que para determinar el polo X de la circunferencia máxima tangente comun exterior, hay que construir sobre $P\,P_1 = D$ un triángulo cuyos otros dos lados sean

$$(1 - r) \text{ y } (1 - r_1): (*)$$

construyendo el triángulo esférico simétrico del anterior con respecto á PP_1, se hallaria el polo X_1 de la otra circunferencia máxima tangente comun exterior.

Se sabe tambien que, para determinar los polos Y é Y_1 de las circunferencias máximas tangentes comunes interiores, hay que construir sobre PP_1 dos triángulos simétricos con respecto á PP_1, y cuyos otros dos lados sean

$$(1 - r) \text{ y } (1 + r_1): (**)$$

Discusion.

Para fijar las ideas, supongamos $r > r_1$.

Antes de entrar en la discusion detallada, vemos desde luego que la construccion de los primeros triángulos requiere la condicion de posibilidad

$$D + (1 - r) + (1 - r_1) < 4,$$

ó sea

$$D < 2 + r + r_1;$$

y la construccion de los segundos triángulos requiere la condicion

---

(*) Podria construirse el triángulo cuyos tres lados fueran D, $(1 + r)$, $(1 + r_1)$.

(**) Podria construirse el triángulo cuyos tres lados fueran D, $(1 + r)$, $(1 - r_1)$.

$$D + (1 - r) + (1 + r_1) < 4,$$

ó sea

$$D < 2 + r - r_1:$$

una y otra están cumplidas siempre, porque la distancia D entre los polos P y P_1 es menor que 2.

En vista de esto, quedan como *necesarias y suficientes* para la existencia de los primeros triángulos las condiciones

$$\left.\begin{matrix} D < (1 - r) + (1 - r_1) \\ D > (1 - r_1) - (1 - r) \end{matrix}\right\} \text{ó sean } \left.\begin{matrix} D + r + r_1 < 2 \\ D > r - r_1 \end{matrix}\right\}:$$

habrá, por tanto, *dos tangentes comunes exteriores cuando la circunferencia menor* P_1 *sea exterior á la simétrica de* P, *y al mismo tiempo exterior, tangente exteriormente, ó secante á la circunferencia* P. Pero en los *casos límites*

$$D + r + r_1 = 2, \text{ ó } D = r - r_1,$$

los triángulos simétricos de que tratamos quedan reducidos á un arco de círculo máximo en la direccion misma de PP_1, puesto que, en el primer caso límite, el lado D es igual á la suma de los otros dos, y en el segundo caso límite es igual á su diferencia. Se tendrá un punto sobre el arco PP_1, en el cual aparecerán entónces reunidos los polos X y X_1, que eran en general simétricos respecto de PP_1: *hay,* por tanto, *una sola tangente comun exterior cuando la circunferencia menor* P_1 *sea tangente exteriormente á la simétrica de* P, *ó tangente interiormente á la circunferencia* P.

Quedan asimismo, como *necesarias y suficientes* para la existencia de los segundos triángulos, las condiciones

$$\left.\begin{matrix} D < (1 + r_1) + (1 - r) \\ D > (1 + r_1) - (1 - r) \end{matrix}\right\} \text{ó sean } \left.\begin{matrix} D + r - r_1 < 2 \\ D > r + r_1 \end{matrix}\right\}:$$

habrá, por tanto, *dos tangentes comunes interiores cuando la circunferencia menor* P_1 *sea exterior, tangente exteriormente ó*

secante á la simétrica de P, *y al mismo tiempo exterior á esta circunferencia* P. Pero en los *casos límites*

$$D + r - r_1 = 2, \text{ ó } D = r + r_1,$$

los triángulos de que tratamos ahora se reducirán á un arco de círculo máximo en la direccion PP_1, puesto que en estos casos límites el lado D es igual á la suma ó diferencia de los otros dos. Aparecerán reunidos en un mismo punto de PP_1 los polos Y é Y_1, que eran en general simétricos respecto de PP_1, *hay*, por tanto, *una sola tangente comun interior cuando la circunferencia menor* P_1 *sea tangente interiormente á la simétrica de* P, *ó tangente exteriormente á la circunferencia* P.

Los resultados que preceden serán vistos con toda claridad si se imagina que la distancia D, á que se hallan los polos P y P_1 (de las circunferencias menores de radios esféricos constantes r y r_1) pase por todos los valores de 0 á 2, segun ley de continuidad, y para fijar más aún las ideas supondremos que la circunferencia P está fija, y que la P_1 ocupa diversas posiciones. Hay que considerar los siguientes casos:

1.° *Que la circunferencia* P_1 *sea interior á* P: $D < r - r_1$.

2.° *Que la circunferencia* P_1 *sea tangente interiormente á* P. . . . . $D = r - r_1$.

3.° *Que la circunferencia* P_1 *sea secante á* P: $D \begin{matrix} > r - r_1 \\ < r + r_1 \end{matrix}$.

En este caso la circunferencia P_1 puede ser *exterior, tangente exteriormente* ó *secante* (no puede admitirse el supuesto de ser tangente interiormente ni interior) *á la simétrica de* P. . . . . $D + r + r_1 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 2$.

4.° *Que la circunferencia* P_1 *sea tangente exteriormente á* P. . . . . $D = r + r_1$.

En este caso la circunferencia P_1 puede ser *exterior, tangente exteriormente* ó *secante* (no puede admitirse el supuesto

de ser tangente interiormente ni interior) *á la simétrica de*

$$P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots D + r + r_1 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 2.$$

5.° *Que la circunferencia* P_1 *sea exterior á* $P : D > r + r_1$.

En este caso la circunferencia P_1 puede ser *exterior* ó *tangente exteriormente á la simétrica de* $P : D + r + r_1 \geq 2$.

O bien puede ser *secante, tangente interiormente* ó *interior á la simétrica de* $P : D + r + r_1 > 2$; $D + r - r_1 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 2$.

Los distintos casos que preceden están reunidos en el siguiente cuadro:

CASOS.	SOLUCIONES. Exteriores.	Interiores.
1.° $D < r - r_1$.	0	0
2.° $D = r - r_1$.	1	0
3.° $D \begin{matrix} > r - r_1 \\ < r + r_1 \end{matrix}$; $D + r + r_1 = 2$. . . $<$	2	0
$=$	1	0
$>$	0	0
4.° $D = r + r_1$; $D + r + r_1 = 2$. . . $<$	2	1
$=$	1	1
$>$	0	1
5.° $D > r + r_1$ $D + r + r_1 < 2$.	2	2
$D + r + r_1 = 2$.	1	2
$D + r + r_1 > 2$; $D + r - r_1 = 2$ $<$ ..	0	2
$=$ ..	0	1
$>$ ..	0	0

Habiendo dicho ya que las condiciones para la existencia de los triángulos que dan los polos X y X_1 de las tangentes comunes exteriores, son:

$$D \begin{matrix} < (1 - r_1) + (1 - r) \\ > (1 - r_1) - (1 - r) \end{matrix} \text{ ó bien } \begin{matrix} D + r + r_1 < 2 \\ D > r - r_1 \end{matrix};$$

y que las condiciones para la existencia de los triángulos que dan los polos Y é Y_1 de las tangentes comunes interiores son:

$$D \begin{matrix} < (1 + r_1) + (1 - r) \\ > (1 + r_1) - (1 - r) \end{matrix} \text{ ó bien } \begin{matrix} D + r - r_1 < 2 \\ D > r + r_1 \end{matrix},$$

no hay dificultad en seguir paso á paso á la circunferencia P_1, verla en todos los casos y descubrir las soluciones. Así (*)

En el 1.er caso, siendo $D < r - r_1$, los primeros triángulos no existen, puesto que un lado es menor que la diferencia de los otros dos: *à fortiori*, $D < r + r_1$; por consiguiente no existen los segundos triángulos, y por la misma razon. No hay solucion exterior ni interior.

En el 2.º caso, siendo $D = r - r_1$, los primeros triángulos simétricos se reducen á un arco de círculo máximo en la direccion misma de PP_1, y aparecen los dos vértices X y X_1 reunidos en un solo punto sobre dicho arco: *à fortiori* $D < r + r_1$; por consiguiente, no existen los segundos triángulos. Hay una solucion exterior, no la hay interior.

En el 3.er caso, siendo $D \begin{matrix} > r - r_1 \\ < r + r_1 \end{matrix}$:

Si $D + r + r_1 < 2$, existen los primeros triángulos simétricos; pero no existen los segundos triángulos. Hay dos soluciones exteriores, no la hay interior.

Si $D + r + r_1 = 2$, los primeros triángulos se reducen á un arco de círculo máximo en la direccion misma de PP_1 y aparecen los dos vértices X y X_1 reunidos en un solo punto sobre dicho arco; pero no existen los segundos triángulos. Hay una solucion exterior, no la hay interior.

Si $D + r + r_1 > 2$, los primeros triángulos no existen, puesto que un lado es mayor que la suma de los otros dos; tampoco existen los segundos triángulos. No hay solucion exterior ni interior.

(*) Recomendamos al lector que haga las figuras.

En el 4.° caso, siendo $D = r + r_1$, y, por tanto, $D > r - r_1$, se ve que:

Si $D + r + r_1 < 2$, existen los primeros triángulos simétricos; pero los segundos triángulos se reducen á un arco de círculo máximo en la direccion misma de PP_1 y aparecen los dos vértices Y é Y_1 reunidos en un solo punto sobre dicho arco. Hay dos soluciones exteriores y una interior.

Si $D + r + r_1 = 2$, los primeros triángulos se reducen á un arco de círculo máximo y aparecen los dos vértices X y X_1 reunidos en un solo punto; los segundos triángulos siguen reducidos á un arco de círculo máximo y los dos vértices Y é Y_1 reunidos en un solo punto. Hay una solucion exterior y otra interior.

Si $D + r + r_1 > 2$, los primeros triángulos no existen, puesto que un lado es mayor que la suma de los otros dos; los segundos triángulos siguen dando los dos vértices Y é Y_1 reunidos en un solo punto. No hay solucion exterior, y hay una interior.

En el 5.° caso, siendo $D > r + r_1$, y, por tanto, $D > r - r_1$, se ve que:

Si $D + r + r_1 < 2$, y, por tanto, $D + r - r_1 < 2$, hay dos soluciones exteriores y dos interiores.

Si $D + r + r_1 = 2$, y, por tanto, $D + r - r_1 < 2$, hay una solucion exterior y dos interiores.

Si $\left.\begin{matrix} D + r + r_1 > 2 \\ D + r - r_1 < 2 \end{matrix}\right\}$, no hay solucion exterior, y hay dos interiores;

Si $\left.\begin{matrix} D + r + r_1 > 2 \\ D + r - r_1 = 2 \end{matrix}\right\}$, no hay solucion exterior, y hay una interior;

Si $\left.\begin{matrix} D + r + r_1 > 2 \\ D + r - r_1 > 2 \end{matrix}\right\}$, no hay solucion exterior ni interior.

Polígonos esféricos.

Se sabe que *polígono esférico* es la porcion de superficie esférica comprendida entre varios arcos de círculo máximo.

Diremos que un polígono esférico está *inscrito* en una circunferencia menor cuando sus vértices son puntos de esta menor; los lados del polígono son entonces cuerdas esféricas de la circunferencia menor. Diremos que un polígono esférico está *circunscrito* á una circunferencia menor cuando sus lados son tangentes á esta menor. En un polígono esférico inscrito, las circunferencias máximas perpendiculares á los lados en sus puntos medios concurren en los polos de la menor, puesto que éstos equidistan de todos los vértices. En el polígono circunscrito, las circunferencias máximas bisectrices de sus ángulos concurren en los polos de la circunferencia menor, puesto que éstos equidistan de todos los lados. En uno y otro caso, los polos de esas circunferencias máximas concurrentes en dos puntos diametralmente opuestos, están en la circunferencia de círculo máximo que tiene por polos estos dos puntos de concurso.

Se sabe que las tres circunferencias máximas perpendiculares en los puntos medios de los lados de un triángulo concurren en dos puntos diametralmente opuestos, y que las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo tambien concurren, y, por consiguiente, que *un triángulo esférico es siempre inscriptible y circunscriptible*. Es evidente que para trazar la circunferencia máxima bisectriz de un ángulo bastará hacer polo en el punto medio del arco de círculo máximo que une los polos de los dos lados del ángulo; y tambien que las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares entre sí; es decir que los polos de cada una de ellas están en la otra.

Si se completan las tres circunferencias de círculo máximo de que son partes los tres lados de un triángulo esférico, se forman ocho triángulos, y hay, por consiguiente, *ocho* cir-

cunferencias menores tangentes á las tres máximas; las ocho circunferencias menores son dos á dos simétricas; una de ellas está propiamente inscrita en el triángulo dado, otra está inscrita en el triángulo simétrico, y de las seis restantes pueden considerarse tres de ellas como ex-inscritas al triángulo que se considera, y las otras tres como ex-inscritas á su simétrico. Así, se ven en la *fig. 60* las cuatro circunferencias menores, cuyos polos o, o', o'', o''' son los puntos de interseccion de las circunferencias máximas bisectrices de los ángulos A, B, C y sus suplementarios adyacentes: los puntos de la superficie esférica diametralmente opuestos de o, o', o'', o''', son los otros puntos de interseccion de estas bisectrices; están en el hemisferio posterior y son los otros polos de las mismas circunferencias menores y de sus cuatro simétricas.

Si se representan por a, b, c, las longitudes de los tres lados del triángulo ABC, y por $2p$ el perímetro $(a + b + c)$, se encuentran las distancias de los cuatro puntos de contacto F, E, D, G, con el lado AB, á uno de sus vértices (A por ejemplo), por las fórmulas

$$AF = p;\ AE = p - a;\ AD = p - b;\ AG = p - c,$$

que se demuestran como en Geometría plana.

TEOREMA.

Las tres medianas de un triángulo esférico, concurren en un punto; porque siendo M, N, Q *(fig. 61)* los puntos medios de los tres lados, se ve que los radios de la esfera oM, oN, oQ dividen tambien en dos partes iguales á las cuerdas BC, AC, AB, y, por consiguiente, los planos AoM, BoN, CoQ de las tres máximas que son medianas del triángulo esférico ABC, contienen respectivamente á las medianas Am, Bn, Cq del triángulo plano y rectilíneo ABC; pero siendo estas tres últimas concurrentes en un punto d, los tres planos se cortan segun el radio odD, y las tres medianas del triángulo esférico concurren, por lo tanto, en el punto D.

Las tres alturas de un triángulo esférico no concurren en general en un punto, salvo en algunos casos particulares, como en el triángulo equilátero, en que las alturas son al mismo tiempo perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados, bisectrices y medianas, ó en el triángulo rectángulo, en que el vértice del ángulo recto es evidentemente punto de concurso de las alturas.

Entre los cuadriláteros esféricos, merecen especial mención los que tienen *sus lados opuestos iguales dos á dos.*

TEOREMA.

Si un cuadrilátero esférico tiene sus lados opuestos iguales dos á dos, *sus ángulos opuestos serán tambien iguales dos á dos y sus diagonales se cortarán mutuamente en partes iguales.* En efecto, si en el cuadrilátero ABCD *(fig. 62)* se supone

$$AB = CD \text{ y } BC = AD,$$

trazando la diagonal BPD se descompone en dos triángulos ABD y BDC, que son iguales porque tienen sus tres lados respectivamente iguales; por la misma razon, la diagonal APC descompone el cuadrilátero en dos triángulos iguales; se ve, pues, que los ángulos opuestos son dos á dos iguales: además dos triángulos opuestos como APB y CPD son iguales, porque tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; por consiguiente, $AP = PC$ y $BP = PD$; luego las diagonales se cortan mutuamente en partes iguales.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Si las diagonales de un cuadrilátero esférico se cortan mutuamente en partes iguales, sus lados opuestos serán iguales dos á dos y sus ángulos opuestos tambien lo serán. En efecto, los triángulos APB y CPD tienen un ángulo igual comprendido entre la-

dos iguales, y en el mismo caso se hallan los triángulos BPC y APD; luego los lados opuestos son iguales dos á dos; de aquí se deduce ya que sus ángulos opuestos son tambien iguales dos á dos.

Este cuadrilátero corresponde al ángulo poliedro en el vértice de una pirámide, cuya base plana fuera un paralelógramo que tuviese el centro correspondiendo al punto P y los lados y diagonales correspondiendo á los lados y diagonales del cuadrilátero esférico que consideramos.

Como caso particular:

TEOREMA.

Si los cuatro lados de un cuadrilátero son iguales entre sí, las diagonales (además de cortarse mutuamente en partes iguales) *son perpendiculares entre sí y son bisectrices de los ángulos del cuadrilátero.* En efecto, las diagonales son perpendiculares entre sí, porque los puntos A y C *(fig. 63)* equidistan de B y D, ó B y D equidistan de A y C: las diagonales son bisectrices porque son alturas de triángulos isósceles.

RECÍPROCAMENTE:

TEOREMA 1.°

Si las diagonales de un cuadrilátero esférico se cortan en partes iguales y son perpendiculares entre sí, los cuatro lados del paralelógramo serán iguales entre sí y las diagonales serán bisectrices. En efecto, los puntos A y C equidistarán de B y D, y B y D de A y C por un teorema conocido: de aquí se deduce ya que las diagonales serán bisectrices.

TEOREMA 2.°

Si las diagonales se cortan en partes iguales y son bisectrices de los ángulos opuestos del cuadrilátero, este tendrá sus cuatro lados iguales entre sí y sus diagonales perpendiculares entre

sí. En efecto, por cortarse las diagonales en partes iguales, los lados opuestos del cuadrilátero serán iguales dos á dos, y, como ya se vió, el ángulo ABD será igual á BDC; pero el ABD es tambien igual por hipótesis al DBC; luego BDC = DBC, y en el triángulo BDC, á ángulos iguales se oponen lados iguales BC = DC; de aquí se deduce ya que las diagonales serán perpendiculares entre sí. Este caso particular corresponde al ángulo poliedro de una pirámide cuya base plana fuera un rombo en condiciones análogas á las dichas anteriormente para el paralelógramo en general. El rombo esférico de que hablamos ahora es circunscriptible á una circunferencia menor, puesto que el punto P equidista de sus cuatro lados.

Como caso particular:

TEOREMA.

Si un paralelógramo esférico tiene sus cuatro ángulos iguales entre sí, las diagonales (además de cortarse en partes iguales) *serán iguales entre sí.* En efecto, los triángulos ABC y ABD *(fig. 64)* son iguales por tener el lado AB comun, los lados BC y AD iguales, puesto que se supone que el cuadrilátero es un paralelógramo, y el ángulo ABC igual al BAD tambien por hipótesis; se ve, pues, que APC = BPD.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan mutuamente en partes iguales y son iguales entre sí, los cuatro ángulos del cuadrilátero serán iguales entre sí. En efecto; por cortarse las diagonales en partes iguales, el cuadrilátero tiene sus lados opuestos iguales dos á dos, y sus ángulos opuestos iguales dos á dos; pero por ser iguales entre sí las diagonales, los triángulos APB, BPC, CPD, DPA son isósceles, y, por tanto,

$$ABP = BAP \text{ y } PBC = PCB = PAD;$$

luego

$$ABP + PBC = BAP + PAD,$$

ó bien

$$ABC = BAD,$$

y los cuatro ángulos son iguales entre sí porque se componen de dos partes respectivamente iguales.

Este caso particular corresponde al rectángulo. El rectángulo esférico de que hablamos es inscriptible en una circunferencia menor, puesto que sus cuatro vértices equidistan del punto P.

Finalmente:

TEOREMA.

Si el cuadrilátero esférico tiene sus cuatro lados iguales entre sí y sus cuatro ángulos iguales entre sí, sus diagonales se cortan mutuamente en partes iguales, son perpendiculares entre sí é iguales entre sí. Basta reunir las demostraciones de los teoremas anteriores.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Si las diagonales de un cuadrilátero esférico se cortan mutuamente en partes iguales, son perpendiculares entre sí (ó son bisectrices de los ángulos opuestos) y son iguales entre sí, el cuadrilátero tendrá todos sus lados iguales entre sí y tambien sus ángulos iguales entre sí. Basta reunir las demostraciones de los recíprocos anteriores.

Este caso particular corresponde al cuadrado. El cuadrado esférico es inscriptible y circunscriptible.

Cuando los polígonos esféricos corresponden á ángulos poliedros iguales, y pertenecen á superficies esféricas de radios diferentes R y R', sus ángulos son iguales y sus lados

proporcionales, y los polígonos se llaman *semejantes;* la relacion de un lado cualquiera del uno á su homólogo en el otro, es $\frac{R}{R'}$, y se llama *relacion de semejanza.*

Se llaman *puntos homólogos* los puntos de una y otra superficie esférica que, unidos á dos vértices homólogos, dan lugar á triángulos semejantes y semejantemente colocados. Es evidente que si se hicieran coincidir los centros de las esferas y los ángulos poliedros correspondientes (que son iguales), los puntos homólogos serian puntos de una y otra superficie esférica situados en un mismo radio.

TEOREMA.

La relacion de dos arcos de círculo máximo homólogos es igual á la relacion de semejanza, puesto que haciendo coincidir los ángulos poliedros correspondientes á los polígonos (como acabamos de decir), los arcos de círculo máximo cuyos extremos son puntos homólogos son arcos descritos desde el centro con los radios R y R' entre los lados de un mismo ángulo. Dos lados homólogos, y en general dos arcos de círculo máximo homólogos, son del mismo número de grados.

Dos polígonos esféricos semejantes se pueden descomponer en igual número de triángulos semejantes y semejantemente colocados, ya tomando puntos de las superficies esféricas en el interior de los polígonos, ya en los perímetros mismos, ya fuera; en las dos primeras descomposiciones los triángulos son todos aditivos, y en la última hay triángulos aditivos y triángulos sustractivos.

TEOREMAS.

1.° *La relacion de los perímetros de dos polígonos esféricos semejantes, es igual á la relacion de semejanza* $\frac{R}{R'}$, puesto que siendo los lados proporcionales, se tiene una serie de razones iguales de la cual se deduce la relacion de los perímetros.

2.° *La relacion de las áreas de dos polígonos esféricos semejantes, es igual al cuadrado de la relacion de semejanza* $\frac{R}{R'}$; porque siendo sus ángulos respectivamente iguales, los números de medida de las áreas son los mismos, y, por tanto, la relación de las áreas de los polígonos es igual á la relacion de las unidades, que son los triángulos esféricos trirectángulos en una y otra esfera; pero siendo cada uno de éstos la octava parte de la superficie esférica á que pertenece, la relacion es, en definitiva, la misma que la de las dos superficies esféricas que es $\frac{R^2}{R'^2}$.

3.° *La relacion de los volúmenes de dos pirámides esféricas semejantes, es el cubo de la relacion de semejanza,* porque cada uno de ellos tiene por expresion el producto del área del polígono esférico que le sirve de base por el tercio del radio; luego su relacion será el producto del cuadrado de la relacion de semejanza por esta misma relacion; es decir, el cubo de la relacion de semejanza.

Llamaremos ángulo poliedro *regular* al que tiene todas sus caras iguales entre sí, y tambien sus diedros iguales entre sí. Un ángulo poliedro regular es forzosamente convexo, porque si tuviera diedros entrantes y salientes no serian todos iguales entre sí.

Se llama polígono esférico *regular* el que tiene todos sus lados iguales entre sí y tambien todos sus ángulos iguales entre sí. A todo ángulo poliedro regular cuyo vértice esté en el centro de la esfera, corresponde un polígono esférico regular, y viceversa. Todo polígono esférico regular es, pues, convexo.

TEOREMA.

El ángulo poliedro en el vértice de una pirámide regular, es un ángulo poliedro regular.

En efecto, siendo regular la pirámide, sus aristas laterales son iguales, como oblicuas cuyos piés equidistan del pié de la altura, y, por consiguiente, los triángulos que sirven de caras laterales á la pirámide son todos iguales entre sí; de lo cual se deduce que las caras del ángulo poliedro son iguales entre sí. Los ángulos triedros formados en los vértices de la base son iguales, por tener sus tres caras respectivamente iguales; por consiguiente, sus diedros lo son; así pues, los diedros de los ángulos poliedros que se consideran son tambien iguales entre sí.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Si sobre las aristas de un ángulo poliedro regular se toman distancias iguales, se forma una pirámide regular.

En efecto, los puntos así obtenidos están en un mismo plano; porque siendo iguales los triángulos laterales isósceles, se ve que en los extremos de las aristas se forman ángulos triedros que son iguales, por tener un diedro igual comprendido entre dos caras iguales; luego los planos BCD y ABC *(fig. 65)*, que pasan por la recta BC y forman el mismo diedro con el plano *o*BC, tienen que coincidir: lo mismo se diria de los demás vértices. Este polígono, base de la pirámide, es pues, regular, porque tiene sus lados iguales y tambien sus ángulos iguales. Finalmente, la altura de la pirámide caerá en un punto equidistante de los vértices A, B, C, . . .; es decir, en el centro de la circunferencia circunscrita á este polígono, puesto que las aristas son oblicuas iguales por construccion.

De lo dicho se deduce que:

TEOREMA.

Si se divide una circunferencia menor de una superficie esférica en n *partes iguales, y se unen dos á dos consecutivamente los puntos de division por arcos de círculo máximo, se forma un polígono esférico regular,* puesto que la pirámide que tenga por vértice el centro de la esfera, y por base el polígono plano (regular) inscrito en la circunferencia menor, es regular, y lo es, por tanto, el ángulo poliedro en su vértice; luego el polígono esférico correspondiente es regular.

TEOREMA.

Si se trazan los arcos de círculo máximo tangentes en los puntos de division, el polígono esférico que se forma es tambien regular, puesto que su ángulo poliedro correspondiente es el ángulo en el vértice de la pirámide regular, cuya base es el polígono plano regular de n lados circunscrito á la circunferencia menor; los lados de este polígono plano son, como se ve, las tangentes rectilíneas comunes al menor y á cada uno de los lados del polígono esférico; y así como el polígono plano es la base de una pirámide ordinaria regular de n caras, así el polígono esférico es la base de una pirámide esférica regular de n caras.

En una palabra: si se considera una cónica de revolucion y dos ángulos poliedros regulares de n caras, uno inscrito en ella y otro que esté circunscrito, al cortar por una superficie esférica cuyo centro sea el vértice comun, la cónica da una circunferencia menor, y los ángulos poliedros dan polígonos esféricos regulares de n lados, uno inscrito y otro circunscrito á la circunferencia menor; los lados del primero son cuerdas esféricas de la circunferencia menor, y los lados del segundo son tangentes á ésta. Se forman, pues, dos pirámides esféricas, una inscrita en el sector esférico, y otra circunscrita á él.

Recíprocamente:

TEOREMA.

Todo polígono esférico regular, es inscriptible y circunscriptible.

En efecto, al polígono esférico regular corresponde, como ya hemos demostrado, un ángulo poliedro regular; y siendo iguales á R las longitudes de sus aristas laterales, al unir los vértices del polígono dado por rectas se tiene un polígono plano regular. Ahora bien, el plano de este polígono corta á la superficie esférica segun una circunferencia menor que pasa por todos los vértices; luego el polígono esférico dado está inscrito en ella; y siendo ya sus lados cuerdas esféricas iguales de una menor, equidistan de su polo; luego si con un radio esférico igual á esta distancia se describe una circunferencia menor, se tendrá el polígono circunscrito á esta circunferencia, puesto que sus lados le serán tangentes.

Se ve que las dos circunferencias menores inscrita y circunscrita á un polígono esférico regular tienen los polos comunes. Llamaremos *radio* del polígono regular al radio esférico de la circunferencia circunscrita; *apotema* del polígono regular al radio esférico de la inscrita, y *ángulo en el polo* el ángulo de dos radios consecutivos ó de dos apotemas consecutivas, cuyo valor es constante é igual á $\left(\frac{4}{n}\right)$. Trazando las tangentes en los vértices de un polígono esférico inscrito, ó en los puntos medios de los arcos subtendidos por sus lados, se obtiene el esférico regular circunscrito del mismo número de lados; cuando se hace la segunda construccion, los vértices de los dos polígonos están dos á dos en arcos de círculo máximo que pasan por el polo, y son las bisectrices de los ángulos formados por dos apotemas consecutivas.

En una misma esfera ó en esferas iguales, dos polígonos regulares del mismo número de lados son iguales cuando lo son las circunferencias menores circunscritas ó inscritas, ó bien cuando lo son los ángulos poliedros correspondientes; los

polígonos regulares que corresponden á ángulos poliedros iguales, son semejantes cuando pertenecen á esferas de diferente radio, y su relacion de semejanza, que es (como se sabe) la relacion de los radios de las esferas, es igual á la relacion de sus radios esféricos ó de sus apotemas esféricas, ó en general, de sus líneas homólogas.

Si dividida una circunferencia menor en *m* partes iguales se unen los puntos de division de *p* en *p* por arcos de círculo máximo, se forma un polígono esférico regular *de* m *lados de la especie* p si este número es primo con *m*, porque será preciso dar *p* vueltas para cerrarlo y se habrán trazado *m* cuerdas. A esta clase de polígonos esféricos regulares de especie superior corresponden ángulos poliedros regulares de especie superior, cuyo vértice es el centro de la esfera y que pertenece á una pirámide regular, cuya base es el polígono plano regular de *m* lados y de la especie *p*, inscrito en la circunferencia menor. Todo cuanto se dice en Geometría plana de las varias especies de polígonos regulares, es aplicable á los esféricos.

Es fácil hacer la inscripción en una circunferencia menor de los polígonos esféricos regulares de 3, 4, 5,... lados.

Cuadrado.—Hasta trazar por el polo P de la circunferencia menor dos diámetros esféricos perpendiculares entre sí, para lo cual se hace polo en dos puntos que disten un cuadrante sobre la máxima C descrita desde P: se tendrá así dividida la circunferencia menor en cuatro partes iguales, y se inscribirá el cuadrado esférico. Los ángulos de este cuadrado esférico no son rectos.

Exágono.—Para dividir la circunferencia menor en seis partes iguales, se empieza, como antes, por describir, desde P como polo, la circunferencia máxima C y dividir ésta en seis partes iguales llevando el radio R; si se hace polo en tres puntos consecutivos de estos seis y se trazan tres circunferencias máximas, éstas dividirán á la menor en seis partes iguales. Es evidente que los otros tres puntos consecutivos de la circunferencia C serían polos de las mismas circunferencias

máximas ya descritas. El lado del exágono esférico regular es menor que el radio esférico de la menor circunscrita, porque la cuerda rectilínea del lado, que es el lado del exágono plano regular (y, por tanto, igual al radio rectilíneo del menor) es menor que la distancia polar.

Triángulo.—Uniendo de dos en dos los puntos de division de la circunferencia menor en seis partes iguales, se tendrá el triángulo equilátero ó regular; pero en éste la apotema no es, como en Geometría plana, la mitad del radio.

Decágonos.—Se empieza siempre por describir desde P como polo la circunferencia máxima C, cuyo radio es el mismo de la esfera (hay que determinarlo préviamente cuando se trata de hacer construcciones sobre la superficie esférica): haciendo en un papel la division de esta circunferencia en diez partes iguales, y trasladando éstas á la superficie esférica por medio de sus cuerdas rectilíneas bastará trazar las circunferencias de círculo máximo que bajan desde el polo P á esos diez puntos de division, y ellas dividirán á la menor dada en diez partes iguales. El decágono de 1.ª especie se obtendrá uniendo los puntos de division *de uno en uno* por cuerdas esféricas, y el de 3.ª especie uniéndolos *de tres en tres.*

Pentágonos.—Uniendo los mismos puntos de division en diez partes iguales *de dos en dos,* se obtendrá el pentágono de 1.ª especie, y uniéndolos *de cuatro en cuatro* se obtendrá el pentágono de 2.ª especie.

Pentedecágonos.—Dividiendo la circunferencia menor dada en 15 partes iguales por el procedimiento antes indicado, se tendrán los pentedecágonos de 1.ª, de 2.ª, de 4.ª ó de 7.ª especie si se unen los puntos de division de uno en uno, de dos en dos, de cuatro en cuatro, ó de siete en siete.

Lo mismo se procederia para *todos los géneros y especies* de polígonos esféricos regulares. En cualquiera de ellos quedará determinado el lado (arco de círculo máximo) por medio de su cuerda rectilínea en la circunferencia máxima; esta cuerda rectilínea es á su vez el lado del polígono plano *del mismo género y de la misma especie* inscrito en la circunferencia menor

dada (*) Se diria lo mismo para los icoságonos regulares ó para los polígonos regulares cuyos géneros fueran 30, 60, etc., etc.

Las construcciones gráficas para tener el polígono esférico regular inscrito ó circunscrito de *doble, mitad* ó *igual* número de lados que otro polígono inscrito ó circunscrito dado, son las mismas de Geometría plana.

NOTA 29 (de la pág. 474).

Fundándose en la propiedad de Geometría plana de que los segmentos de dos rectas A′ B′ y CD, la primera paralela y la segunda antiparalela á AB *(fig. 66)* comprendidos entre dos paralelas AA′ y BB′ son iguales entre sí (**), se ve fácilmente que en el cilindro oblicuo de base circular las secciones antiparalelas á la base y las paralelas á ésta son circunferencias *iguales entre sí,* puesto que tienen igual diámetro.

Se demuestra (como para el cono circular oblicuo) que dos secciones, una paralela á la base, y otra antiparalela á la base de un cilindro oblicuo de base circular, están siempre situadas en una misma esfera. Pero se ve además, como acabamos de decir, que son *círculos iguales* en dicha esfera.

(*) Si esta circunferencia menor está dada por *su radio esférico,* es fácil determinar en un papel su diámetro rectilíneo como cuerda que subtiende á su diámetro esférico en una circunferencia máxima.

(**) Esta propiedad se demuestra con solo notar que los triángulos PA′C y PB′D, son isósceles; y esto es evidente, porque

$$\text{ángulo } A' = \text{ángulo } A = \text{ángulo } D = \text{ángulo } C$$

é igualmente

$$\text{ángulo } B' = \text{ángulo } D;$$

por consiguiente,

$$PA' = PC \text{ y } PB' = PD;$$

de donde

$$A'B' = CD.$$

E inversamente: Que por dos *círculos iguales* situados en una esfera se puede siempre hacer pasar un cilindro oblícuo.

Los círculos iguales que consideramos serán máximos en la esfera cuando la interseccion de sus planos sea un diámetro comun.

NOTA 30 (de la pág. 490).

Poliedros regulares conjugados.

La esfera inscrita en un poliedro regular P está circunscrita á su conjugado *interior* P_1, porque los centros de las caras del primero, que son los puntos de contacto con la superficie esférica, son al mismo tiempo los vértices del segundo; por consiguiente, las apotemas del poliedro son los radios de su conjugado P_1. E inversamente: la esfera circunscrita al primer poliedro P está inscrita en su conjugado *exterior* P′, porque los vértices del primero, por los cuales pasa la superficie esférica, son al mismo tiempo los centros de las caras de este otro conjugado, y estas caras son planos perpendiculares á los radios respectivos; por consiguiente, los radios del poliedro P son las apotemas de su conjugado P′.

Si representamos por R y r el radio y la apotema del primer poliedro P; por R_1 y r_1 el radio y la apotema de su conjugado P_1, y por R′ y r' el radio y la apotema de su conjugado P′, se ve que las tres apotemas

$$r_1, r, r',$$

y los tres radios

$$R_1, R, R',$$

no corresponden más que á cuatro esferas concéntricas (cuyo centro comun es el centro comun de los tres poliedros P_1, P, P′).

de las cuales la de radio r_1 está inscrita en el poliedro interior P_1, la de radio R' está circunscrita al exterior P', y las dos intermedias de radios

$$r = R_1 \quad y \quad R = r'$$

están: la primera circunscrita al poliedro P_1 é inscrita á P, y la segunda circunscrita á este P é inscrita en P'.

En vista de esto, se puede afirmar que á la serie infinita (creciente ó decreciente, segun se mire) de poliedros regulares

$$\ldots P_4, P_3, P_2, P_1, P, P', P'', P''', P^{IV} \ldots$$

deducidos uno de otro segun la ley de *conjugacion* (directa ó inversa) corresponde una serie infinita (creciente ó decreciente) de esferas inscritas ó circunscritas á dichos poliedros regulares. Los radios de esta serie de esferas son

$$\left.\begin{array}{l} \ldots\ldots\ r_4, r_3, r_2, r_1, r, r', r'', r''', r^{IV} \ldots\ldots \\ \text{ó bien} \qquad\quad \| \quad \| \quad \| \quad \| \quad \| \quad \| \quad \| \quad \| \\ \ldots\ldots\ldots\ R_4, R_3, R_2, R_1, R, R', R'', R''', R^{IV} \ldots \end{array}\right\}.$$

Esta serie de radios es una progresion geométrica. En efecto, se sabe que en dos poliedros conjugados P_1 y P, la relacion del radio á la apotema es la misma; es decir, que

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R}{r},$$

ó bien

$$\frac{r}{r_1} = \frac{r'}{r}, \text{ que es lo mismo que } \frac{R_1}{R_2} = \frac{R}{R_1},$$

lo cual prueba que la relacion de un radio (ó apotema) al que le precede es constante.

Siendo una progresion geométrica, se ve que cada radio r es medio proporcional entre el precedente r_1 y el siguiente r': lo cual se podría hacer ver más directamente observando que una apotema r es cateto de un triángulo rectángulo que tiene

por hipotenusa el radio R, y en el cual la proyeccion de r sobre R es la apotema precedente r_1.

En la serie de poliedros regulares

$$\ldots P_4, P_3, P_2, P_1, P, P', P'', P''', P^{IV}\ldots$$

dos términos consecutivos son conjugados, y dos términos alternos son semejantes; de manera que las dos series

$$\ldots P_4, P_2, P, P'', P^{IV}\ldots$$

y

$$\ldots\ldots P_3, P_1, P', P'''\ldots\ldots$$

son series de poliedros semejantes.

La relacion de semejanza es constante y la misma para una y otra serie.

En efecto, tomando la relacion de las apotemas de los dos poliedros semejantes que se comparen, se ve que

$$\text{la relacion de semejanza entre} \begin{cases} P''' \text{ y } P' \text{ es } \dfrac{r'''}{r'} \\ P'' \text{ y } P \text{ » } \dfrac{r''}{r} \\ P' \text{ y } P_1 \text{ » } \dfrac{r'}{r_1} \\ P \text{ y } P_2 \text{ » } \dfrac{r}{r_2} \end{cases}$$

Basta poner á la vista la progresion geométrica

$$\ldots r_4, r_3, r_2, r_1, r, r', r'', r'''\ldots$$

para que resalte la serie de relaciones iguales

$$\frac{r'''}{r'} = \frac{r''}{r} = \frac{r'}{r_1} = \frac{r}{r_2};$$

cuyo valor constante es *el cuadrado de la razon de la progresion de radios;* porque en efecto, si se llama K esta razon, se

ve inmediatamente que una cualquiera $\frac{r'}{r_1}$ de las relaciones de semejanza es

$$\frac{r'}{r_1} = \frac{\frac{r'}{r}}{\frac{r_1}{r}} = \frac{K}{\frac{1}{K}} = K^2.$$

De aquí se deduce fácilmente que las dos series de números de medida de las superficies de los poliedros semejantes

$$\ldots S_4,\ S_2,\ S,\ S'',\ S^{IV},\ldots$$

y

$$\ldots S_3,\ S_1,\ S',\ S''',\ldots$$

así como tambien las dos series de números de medida de sus volúmenes

$$\ldots V_4,\ V_2,\ V,\ V'',\ V^{IV},\ldots$$

y

$$\ldots V_3,\ V_1,\ V',\ V''',\ldots$$

son progresiones geométricas, cuyas razones son respectivamente K^4 *y* K^6. En efecto: se tiene por comparacion de las superficies de poliedros semejantes

$$\left.\begin{aligned} \frac{S}{S_2} &= \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 = (K^2)^2 = K^4 \\ \frac{S''}{S} &= \left(\frac{r''}{r}\right)^2 = (K^2)^2 = K^4 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{S'''}{S'} &= \left(\frac{r'''}{r'}\right)^2 = (K^2)^2 = K^4 \\ \frac{S'}{S_1} &= \left(\frac{r'}{r_1}\right)^2 = (K^2)^2 = K^4 \end{aligned}\right\};$$

y por comparacion de los volúmenes,

$$\left.\begin{aligned} \frac{V}{V_2} &= \left(\frac{r}{r^2}\right)^3 = K^6 \\ \frac{V''}{V} &= \left(\frac{r''}{r}\right)^3 = K^6 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{V'''}{V'} &= \left(\frac{r'''}{r'}\right)^3 = K^6 \\ \frac{V'}{V_1} &= \left(\frac{r'}{r_1}\right)^3 = K^6 \end{aligned}\right\};$$

Si imagináramos inscritos en la esfera de radio R el poliedro regular P y otro Q semejante á los conjugados de P (*), es evidente que la apotema x de Q será la misma que la apotema r de P; es decir, que el poliedro Q estará circunscrito á la misma esfera que P, puesto que las relaciones de radio á apotema

$$\frac{R}{x} \text{ y } \frac{R}{r}$$

son las mismas para los dos poliedros. E inversamente: si hiciéramos que Q estuviera circunscrito á la misma esfera que P, quedaria inscrito en la misma esfera que éste.

Ahora bien, si á partir del poliedro Q formáramos (en órden creciente y en órden decreciente) la serie de poliedros

$$\ldots Q_4, Q_3, Q_2, Q_1, Q, Q', Q'', Q''', Q^{IV}, \ldots,$$

se ve desde luego que las dos series distintas

$$\left.\begin{array}{l} \ldots P_4, P_3, P_2, P_1, P, P', P'', P''', P^{IV}, \ldots \\ \ldots Q_4, Q_3, Q_2, Q_1, Q, Q', Q'', Q''', Q^{IV}, \ldots \end{array}\right\}$$

se corresponderian de tal suerte que un término cualquiera de la primera serie y su correspondiente en la segunda aparecerian inscritos en una misma esfera y circunscritos á otra, por lo cual habria una sola y única serie de esferas, cuyos radios son

$$\ldots r_4, r_3, r_2, r_1, r, r', r'', r''', r^{IV}, \ldots$$

Los poliedros

$$\ldots P_4, Q_3, P_2, Q_1, P, Q', P'', Q''', P^{IV}, \ldots$$

son semejantes entre sí: tambien son semejantes entre sí los poliedros

$$\ldots Q_4, P_3, Q_2, P_1, Q, P', Q'', P''', Q^{IV}, \ldots$$

(*) Si además lo colocáramos semejantemente, los radios de Q y de todos los conjugados estarian en las mismas líneas rectas.

La relacion de semejanza entre dos consecutivos de los primeros ó de los segundos, es ahora la razon K de la progresion de radios, puesto que

$$\text{la relacion de semejanza entre} \begin{cases} Q' \text{ y } P \text{ es } \dfrac{r'}{r} \\ P \text{ y } Q_1 \text{ es } \dfrac{r}{r_1} \end{cases}$$

$$\text{y la relacion de semejanza entre} \begin{cases} P' \text{ y } Q \text{ es } \dfrac{r'}{r} \\ Q \text{ y } P_1 \text{ es } \dfrac{r}{r_1} \end{cases}:$$

por consiguiente, las progresiones geométricas de sus superficies y de sus volúmenes tienen por razon respectivamente K^2 y K^3; estas progresiones no son otra cosa que las que se obtienen interpolando un término entre cada dos consecutivos de las progresiones de superficies y volúmenes que consideramos antes.

NOTA 31 (de la pág. 493).

La determinacion geométrica de los radios r y R de las esferas inscrita y circunscrita á un poliedro regular, puede hacerse tambien del siguiente modo:

Sea ABCD *(fig. 67)* uno cualquiera de sus ángulos poliedros; $AB = a$ la arista; $oA = R$ el radio de la esfera circunscrita; $o'C = R'$ el radio del polígono BCD que se obtiene uniendo los extremos de las aristas que concurren en el vértice A: este polígono (triángulo, cuadrilátero ó pentágono, segun que el ángulo A sea triedro, tetraedro ó pentaedro) es regular y su plano es perpendicular al radio oA de la esfera.

Radio de la esfera circunscrita.—Considerando el diámetro AA′ de la esfera, y uniendo C con A′, se tiene

$$a^2 = 2R.\,Ao' = 2R.\,\sqrt{a^2 - R'^2};$$

de donde

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - R'^2}}.$$

Para aplicar esta fórmula á los cinco poliedros regulares, habrá de calcularse previamente el valor de R′, lo cual es fácil si se determina, como diagonal de una cara, el lado BC del polígono regular BCD.

Radio de la esfera inscrita.—Si $Om = r$ es el radio de la esfera inscrita, y $mA = r'$ es el radio de la cara del poliedro, se tiene en el triángulo omA

$$r = \sqrt{R^2 - r'^2}.$$

Para aplicar esta segunda fórmula, habrán de calcularse previamente R y r'.

Hagamos aplicacion á los cinco poliedros regulares.

Tetraedro: El lado BC es en este caso igual á la arista a, y el radio

$$o'C = R' = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

por consiguiente, la primera fórmula da

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

El radio $mA = r'$ es también en este caso igual á $\frac{a}{\sqrt{3}}$; por consiguiente, la segunda fórmula da

$$r = \sqrt{\frac{6a^2}{16} - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{48}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

EXAEDRO: El lado BC es en este caso $a\sqrt{2}$ y el radio

$$o'C = R' = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

por consiguiente, la primera fórmula da

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

El radio $mA = r'$ es en este caso igual á $\frac{a}{\sqrt{2}}$; por consiguiente, la segunda fórmula da

$$r = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{2}.$$

OCTAEDRO: El lado BC es en este caso igual á la arista a, y el radio

$$o'C = R' = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

por consiguiente, la primera fórmula da

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

El radio $mA = r'$ es en este caso igual á $\frac{a}{\sqrt{3}}$; por consiguiente, la segunda fórmula da

$$r = \sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

DODECAEDRO: Para determinar en este caso el lado BC, conviene hacer uso de la fórmula (1') dada en la NOTA 17, que es aquí

$$BC = \frac{a\sqrt{4r'^2 - a^2}}{r'};$$

pero el valor del radio r' del pentágono se sacará de la ecuacion

$$a = \frac{r'}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

de la cual se deduce

$$r' = \frac{2a}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{2a.\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{\sqrt{2 \times 20}} = a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}};$$

sustituyendo este valor en el de BC, se tiene

$$BC = \frac{a\sqrt{\frac{4a^2(5 + \sqrt{5})}{10} - a^2}}{a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}} = \frac{a}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

Ya se ve que

$$o'C = R' = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{3}};$$

por consiguiente, la primera fórmula da

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2(6 + 2\sqrt{5})}{12}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{a(\sqrt{3} + \sqrt{15})}{4}$$

Ya hemos visto cuál es el valor del radio $mA = r'$; por consiguiente, la segunda fórmula da

$$r=\sqrt{\frac{a^2(18+6\sqrt{5})}{16}-\frac{a^2(5+\sqrt{5})}{10}}=a\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{80}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$$

Icosaedro: El lado BC es en este caso igual á la arista a y el radio $o'C = R'$ es el de un pentágono: se saca de la relacion

$$a=\frac{R'}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

de donde

$$R'=\frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}};$$

por consiguiente, la primera fórmula da

$$R=\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-\frac{a^2(5+\sqrt{5})}{10}}}=\frac{a}{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{1}}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

El radio $mA = r'$ es en este caso igual á $\frac{a}{\sqrt{3}}$; por consiguiente, la segunda fórmula da

$$r=\sqrt{\frac{a^2(5+\sqrt{5})}{8}-\frac{a^2}{3}}=a\frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{2\sqrt{6}};$$

pero se tiene

$$\sqrt{7+3\sqrt{5}}=\sqrt{7+\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{7+2}{2}}+\sqrt{\frac{7-2}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\,[3+\sqrt{5}]}{\sqrt{6}}$$

y, por tanto,

$$r=\frac{a\sqrt{3}\,(3+\sqrt{5})}{12}\ (*)$$

(*) Debemos el método expuesto en esta Nota al distinguido profesor D. José Garin, ex-profesor de la Academia de Ingenieros militares.

NOTA 32 (de la pág. 501).

Poliedros de especie superior.

Veamos la fórmula de Euler generalizada para los poliedros de especie superior.

Adoptando las mismas notaciones del Tratado de MM. Rouché y Comberousse, se sabe que el área a del polígono esférico de especie superior (*) correspondiente á una cara del poliedro es

$$a = \Sigma\alpha - 2n = s + 4\phi - 2n.$$

Si las diversas caras del poliedro son polígonos de géneros y especies distintos, las áreas de todos los polígonos esféricos correspondientes á todas las caras del poliedro tendrán las expresiones:

$$\begin{aligned} a &= s + 4\phi - 2n \\ a' &= s' + 4\phi' - 2n' \\ a'' &= s'' + 4\phi'' - 2n'' \\ &\cdot \quad\quad \cdot \\ &\cdot \quad\quad \cdot \\ &\cdot \quad\quad \cdot \\ &\cdot \quad\quad \cdot \end{aligned}$$

que, sumadas, conducen á la fórmula

$$8E = (s+s'+s''+\ldots)+4(\phi+\phi'+\phi''+\ldots)-2(n+n'+n''+\ldots).$$

Ahora bien, la suma $(s + s' + s'' \ldots)$ de los ángulos esféricos de todos los polígonos, equivale á la suma de los que

---

(*) Tomada esta área esférica en el sentido que dijimos en la Nota 15, pág. 35, al hablar del área plana de un polígono regular de especie superior.

hay en los vértices; pero si los ángulos poliédricos son de las especies σ, σ', σ'', ..., las sumas de los ángulos esféricos en esos diversos vértices, son

$$4\sigma,\ 4\sigma',\ 4\sigma'',\ \ldots;$$

por tanto,

$$s + s' + s'' + \ldots = 4\sigma + 4\sigma' + 4\sigma'' + \ldots = 4\Sigma\sigma.$$

Se ve, pues, que la fórmula anterior debe escribirse del modo siguiente:

$$8E = 4.\Sigma\sigma + 4.\Sigma\Phi - 4A,$$

que, simplificada, es la fórmula general de Euler

$$A + 2E = \Sigma\varphi + \Sigma\sigma. \ (*)$$

Como caso particular de ella, puede considerarse la fórmula

$$A + 2E = \varphi.F + \sigma S$$

para los poliedros *regulares* de especie superior. Se deduce de la general con sólo notar que, por ser el poliedro *regular*, las especies

$$\varphi,\ \varphi',\ \varphi'',\ \ldots$$

de las caras son iguales entre sí, por cuya razon su suma equivale al producto del número φ que indique la especie de una cualquiera de las caras por el número F de ellas; y que, asimismo, las especies

$$\sigma,\ \sigma',\ \sigma'',\ \ldots$$

(*) Hemos repetido aquí la demostracion que hay en el Tratado de MM. Rouché y Comberousse, porque creemos equivocada la fórmula

$$A + 2E = \Sigma\,(\varphi.F) + \Sigma\,(\sigma.S)$$

que se da en el original francés.

de los ángulos poliédricos son iguales entre sí, y, por tanto su suma equivale al producto del número σ que indique la especie de un ángulo poliédrico por el número de ellos; es decir, por el número S de vértices.

En el caso particular de ser el poliedro convexo ú ordinario, los números E, ϕ, σ son iguales á la unidad, y la fórmula general de Euler se convierte en la fórmula muy conocida

$$A + 2 = F + S.$$

HOMOGRAFÍA.

Relacion anarmónica de cuatro puntos.

Si se tiene un sistema de cuatro puntos fijos a, b, c, d, sobre una línea recta R *(fig. 68)*, y se considera el grupo de dos de ellos c, d, por ejemplo, y se toma:

1.° La relacion $\frac{ac}{ad}$ de las distancias del punto a á los c, d;

2.° La relacion $\frac{bc}{bd}$ de las distancias del punto b á los mismos c, d;

el cociente ó relacion de estas dos relaciones

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$

se llama *relacion anarmónica de los cuatro puntos* a, b, c, d y la representaremos por $(abcd)$.

Adoptando como *positivo* un sentido sobre la recta (el de izquierda á derecha, por ejemplo), las cuatro distancias consideradas tendrán el signo que les corresponda, segun el sentido en que se cuenten sobre la recta, y se verá fácilmente el *signo de la relacion anarmónica*. Así *(fig. 68)*, la relacion anarmónica $(abcd)$ que vale

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd},$$

es *positiva;* y esta otra $(acbd)$, que vale

$$\frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd}$$

es *negativa,* porque los segmentos ab, ad, cd son positivos y cb es negativo.

La relacion anarmónica representada por $(abcd)$ podria escribirse de dos modos:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} \text{ ó bien } \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd},$$

que es una misma en magnitud y signo. Conviene adoptar una costumbre para escribir con prontitud, y adoptaremos el primer modo

Si se observa que con cuatro letras a, b, c, d se pueden formar

$$4.3.2.1 = 24$$

permutaciones, y que cada agrupacion dará una relacion anarmónica, aparecen 24 de estas entre cuatro puntos dados. Pero se ve sin dificultad:

1.° *Que la relacion anarmónica no varía en magnitud ni en signo, si sólo se cambian de lugar los grupos.* Así, por ejemplo

$$(abcd) = (cd\,ab);$$

2.° *Que tampoco varía la relacion anarmónica si se invierte el órden de las letras en ambos grupos.*

Por consiguiente, las *cuatro* relaciones anarmónicas

$$(abcd), (badc), (cdab), (dcba)$$

son una misma.

Así, pues, las 24 permutaciones dan solamente *seis relaciones anarmónicas diferentes.* Para formarlas, bastaría escribir como primer grupo de dos letras, la a seguida de una de las otras tres b, c ó d: despues, el segundo grupo de dos letras sólo puede ser ya directo ó inverso. Por ejemplo, al primer grupo ab puede seguirle como segundo el cd ó el dc.

En vista de esto, las *seis* relaciones anarmónicas son

$$\left.\begin{matrix}(ab\ cd)\\(ab\ dc)\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}(ac\ db)\\(ac\ bd)\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}(ad\ bc)\\(ad\ cb)\end{matrix}\right\}:$$

pero se ve que: *la inversion del órden de las letras en uno sólo de los grupos, produce la inversion de la relacion anarmónica,* es decir, que si $(abcd)$ vale, por ejemplo, m, la $(ab\ dc)$ valdrá

$$\frac{ad}{ac} : \frac{bd}{bc} = \frac{1}{\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}} = \frac{1}{m}.$$

Conocidas las *tres* relaciones anarmónicas

$$\left.\begin{aligned}(ab\,cd) &= \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = m\\(ac\,db) &= \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = n\\(ad\,bc) &= \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} = p\end{aligned}\right\}$$

las otras tres son sus *recíprocas.*

Para ver ahora si entre las tres relaciones anarmónicas m, n, p existe algun enlace ó dependencia, calculemos sus valores. Representando por x, y, z las tres distancias ab, ac, ad; se tiene

$$m = \frac{ac \times bd}{ad \times bc} = \frac{y\,(z-x)}{z\,(y-x)},$$

$$n = \frac{ad \times cb}{ab \times cd} = \frac{z\,(x-y)}{x\,(z-y)}.$$

Si entre estas dos ecuaciones se elimina la x por ejemplo, se obtiene

$$n = \frac{z\left[\frac{yz\,(m-1)}{mz-y} - y\right]}{\frac{yz\,(m-1)}{mz-y}\,(z-y)},$$

BIBLIOTECA DEL C.I.C.A.M.

ó reduciendo

$$n = -\frac{1}{m-1} = \frac{1}{1-m},$$

ecuacion que enlaza á m y n; podría escribirse bajo la forma

$$m = 1 - \frac{1}{n}.$$

Análogamente se deduciria la ecuacion

$$n = 1 - \frac{1}{p},$$

y tambien

$$p = 1 - \frac{1}{m}$$

que es, por otra parte, consecuencia de las dos anteriores.

En conclusion: á cuatro puntos dados a, b, c, d en línea recta solo corresponden seis relaciones anarmónicas diferentes, de las cuales tres son recíprocas de las otras tres (que llamaremos *principales*); y como entre estas *tres* m, n, p existen *dos* ecuaciones, y por tanto dos de ellas n, p, pueden deducirse de la tercera m, por las fórmulas

$$n = \frac{1}{1-m}, \quad p = 1 - \frac{1}{m}; \text{ (*)}$$

resulta que: *basta una de las relaciones anarmónicas para determinar un sistema de cuatro puntos en línea recta;* es decir, para

---

(*) De las tres relaciones anarmónicas principales hay siempre *una negativa* y *dos positivas:* de estas, una es *menor* y otra *mayor que 1.* En efecto:

si $m \gtrless \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$, serán $n \gtrless \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$, $p < 0$.

si $m \gtrless \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$, serán $n < 0$, $p \gtrless \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$.

si $m < 0$, serán $n \gtrless \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$, $p \gtrless \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$.

fijar el cuarto punto cuando se conocen los otros tres. Por ejemplo: dados los tres primeros puntos a, b, c y dada la relacion anarmónica $(abcd) = m$, se determinará el punto d sobre la recta, calculando su distancia z al punto a por la ecuacion de primer grado

$$\frac{y\,(z-x)}{z\,(y-x)} = m$$

en la cual x é y son *datos* lo mismo que m (*). Para la relacion $m = -1$ (que como veremos más adelante se llama *armónica)* el valor de z sería

$$z = \frac{xy}{2y-x}.$$

Método gráfico.—El problema, en general, se resuelve *gráficamente* con sencillez. Sean a, b, c los tres puntos dados en la recta R *(fig. 69);* trácese por el punto a una recta indefinida aH, en direccion arbitraria, y tómese sobre ella, una longitud cualquiera aL $= l$, únase su extremo L con c, y por el punto b trá-

---

(*) Siendo la relacion anarmónica

$$m = \frac{ac \times bd}{ad \times bc},$$

y dados los puntos a, b, c se ve:

1.° Que m solo podria valer *cero,* cuando el segmento bd fuera cero, y por tanto *el punto d coincidiera con b.* Aunque el punto d situado en el infinito sobre la recta haría que el segmento ad fuera *infinito; m* no valdria sin embargo cero, porque el segmento bd sería tambien infinito, y la relacion anarmónica m se presentaria bajo la forma $\frac{\infty}{\infty}$; el valor de m sería en este caso $\frac{ac}{bc}$, puesto que $\frac{bd}{ad} = 1$.

2.° Que m solo podria valer *infinito,* cuando el segmento ad fuera cero, y por tanto *el punto d coincidiera con a.* Acabamos de ver que el punto d en el infinito daría á m el valor $\frac{ac}{bc}$.

3.° Que m sólo podria valer 1, cuando $\frac{ad}{bd} = \frac{ac}{bc}$, y por tanto *el punto* d *coincidiera con c.*

cese la bP paralela á la direccion arbitraria que escogimos, con lo cual, por la semejanza de triángulos, se tiene:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{l}{bP}.$$

Si hecho esto, se toma sobre la misma recta indefinida aH otra longitud $aL' = l'$, tal que

$$\frac{l}{l'} = m;$$

bastará unir su extremo L' con P, y marcar el punto de interseccion de esta recta con la dada, para tener el cuarto punto d que se pedia, porque los nuevos triángulos semejantes dan

$$\frac{ad}{bd} = \frac{l'}{bP},$$

y por consiguiente

$$(abcd) = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{l}{bP} : \frac{l'}{bP} = \frac{l}{l'} = m.$$

La construccion que acabamos de dar es general; y aplicable, cualquiera que sea el valor dado m desde $-\infty$ á $+\infty$, si se tiene presente que la magnitud l' habrá de ser tomada *en el mismo sentido ó en sentido inverso que* l, segun que m *sea positiva ó negativa* (*).—Se ve claramente, en la figura, que:

Para los valores de m desde 0 á $-\infty$ (l' variará desde $-\infty$ á 0), el cuarto punto d, ocupará las posiciones que hay desde b á a.

Para los valores de m desde $+\infty$ á 0 (l' variará desde 0 á $+\infty$), se ve el cuarto punto d.

1.° Recorrer todas las posiciones á la izquierda de a y alejarse al infinito, mientras m disminuye desde ∞ hasta $\frac{ac}{bc}$;

(*) Para la relacion armónica ($m = -1$), la construccion se haría tomando aL' *hacia abajo*, igual á aL.

2.° Venir del infinito á la derecha, acercándose al punto c, mientras m disminuye desde $\frac{ac}{bc}$ hasta 1;

3.° Ocupar las posiciones desde c hasta b mientras m disminuye desde 1 hasta 0.

Si se quisiera determinar *el primero, segundo ó tercer punto*, dando la relacion anarmónica $(abcd) = m$, y las posiciones de los otros tres puntos, bastaría reproducir la figura, partiendo de lo conocido hasta llegar al punto desconocido. Así:

Para determinar *el tercer punto c*, después de tomadas las longitudes l y l' sobre la direccion arbitraria que pasa por a, bastará unir el extremo L' con d, trazar la paralela bP y unir L con P, para tener en c el punto pedido.

Para determinar *el segundo punto b*, se unirán los extremos L y L' con el tercero y cuarto punto respectivamente, y por su punto de encuentro P, se trazará la paralela Pb para llegar al punto pedido b.

Para determinar *el primer punto a*, se le trata como si fuera segundo punto de la relacion anarmónica m, lo cual *siempre es posible*, invirtiendo *el orden de las letras en ambos grupos de á dos*. Así se veria

$$m = (abcd) = (badc),$$

y repitiendo la construccion que precede (para determinar el segundo punto), se tomarán *(fig. 70)* sobre la recta indefinida bH que tracemos por b, las longitudes l y l'; se unirá el extremo L con el tercer punto d, y el extremo L' con el cuarto punto c, y por el punto de encuentro P, se trazará la paralela Pa.

Relacion anarmónica de cuatro rectas.

Si se tienen cuatro rectas fijas OA, OB, OC, OD *(fig. 71)*, que estando situadas en un mismo plano, concurran en un

punto O (formando un *haz)*, y se agrupan las rectas, como se hizo con los puntos, y se consideran las dos relaciones

$$\frac{\text{sen AOC}}{\text{sen AOD}} \text{ y } \frac{\text{sen BOC}}{\text{sen BOD}},$$

el cociente ó relacion de estas dos relaciones

$$\frac{\text{sen AOC}}{\text{sen AOD}} : \frac{\text{sen BOC}}{\text{sen BOD}},$$

se llama *relacion anarmónica del haz*, y se representa por (O.ABCD).

Los cuatro términos de esta relacion anarmónica son susceptibles de *signo*, adoptando un sentido para los ángulos *positivos*.

Las relaciones anarmónicas de un haz de cuatro radios *se reducen* inmediatamente á las de un sistema de cuatro puntos en línea recta, si se corta el haz por una transversal cualquiera *abcd*. En efecto, las áreas de los triángulos aOc, aOd, pueden expresarse de dos modos, que dan lugar á las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{aligned} Oa.Oc.\ \text{sen AOC} &= ac \times h \\ Oa.Od.\ \text{sen AOD} &= ad \times h \end{aligned}\right\},$$

de las cuales se deduce

$$\frac{Oc.\ \text{sen AOC}}{Od.\ \text{sen AOD}} = \frac{ac}{ad};$$

análogamente, los triángulos bOc, bOd dan

$$\frac{Oc.\ \text{sen BOC}}{Od.\ \text{sen BOD}} = \frac{bc}{bd};$$

por consiguiente

$$\frac{\text{sen AOC}}{\text{sen AOD}} : \frac{\text{sen BOC}}{\text{sen BOD}} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd};$$

lo cual demuestra que la relacion anarmónica de un haz de cuatro rectas, es igual, en magnitud y en signo, á la de los cuatro puntos de interseccion del haz con una transversal cualquiera.

Las relaciones anarmónicas de dos sistemas de cuatro puntos que hallándose en dos rectas cualesquiera, *pertenecen á un mismo haz*, son iguales entre sí puesto que una y otra son iguales á la relacion anarmónica del haz. Y se ve recíprocamente que, cualesquiera que sean los dos sistemas de cuatro puntos, *si tienen la misma relacion anarmónica, puede hacerse que pertenezcan á un mismo haz*, es decir, que los dos sistemas pueden ser colocados de manera que los puntos correspondientes, determinen, dos á dos, los radios de un haz. Para ello hagamos que los puntos a y a' *(fig. 72)*, coincidan, y vamos á probar que si se une el punto O, de encuentro de bb' y cc', con el punto d', este radio de union habrá de pasar por d; en efecto, si así no fuera, y la recta od' cortara á la $abcd$ en otro punto d_1, se tendria

$$\frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'} = \frac{ac}{ad_1} : \frac{bc}{bd_1},$$

y como por hipótesis

$$\frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd},$$

se llegaria á

$$\frac{ad_1}{bd_1} = \frac{ad}{bd}$$

lo cual es absurdo.—Este teorema podria enunciarse diciendo que: *si dos sistemas de cuatro puntos* a b c d *y* a′ b′ c′ d′ *tienen la misma relacion anarmónica y dos de sus puntos homólogos,* a *y* a′, *coinciden, las rectas de union* b b′, c c′, d d′ *de los otros tres pares de puntos, concurren.*

Para dos haces de cuatro rectas, hay un teorema (correlativo del anterior), que enunciaremos diciendo: *si dos haces de cuatro rectas* O A, O B, O C, O D *y* O′ A′, O′ B′, O′ C′, O′ D′ *(fig. 73)*

tienen la misma relacion anarmónica, y dos de sus radios homólogos O A *y* O' A' *coinciden, los puntos de interseccion* b, c, d *de los otros tres pares de radios, están en línea recta.* Se demuestra (siguiendo una marcha análoga), haciendo ver, que si se unen los puntos de interseccion *b* y *c*, esta recta habrá de pasar por el *d*, porque si así no fuera y cortara á los radios OD y O'D' en dos puntos distintos d_1 y d_1', tendriamos

$$\left.\begin{array}{l}(abcd_1) = (O.ABCD)\\ (abcd_1') = (O'.A'B'C'D')\end{array}\right\}'$$

y como por hipótesis

$$(O.ABCD) = (O'.A'B'C'D')$$

se llegaria á

$$(abcd_1) = (abcd_1')$$

lo cual es absurdo.

Reducida la relacion anarmónica de un haz de cuatro rectas á la de un sistema de cuatro puntos, es innecesario demostrar directamente:

Que un haz solo tiene *seis* relaciones anarmónicas diferentes, de las cuales las tres principales *m*, *n*, *p* (las otras son sus recíprocas), están enlazadas por dos ecuaciones.

Que de las tres principales, hay siempre una negativa y dos positivas.

Que una relacion anarmónica *m* determina el haz.

Que solo podría valer 0, ∞, 1 si el cuarto radio del haz coincidiera con uno de los otros tres.

Método gráfico.—Que para determinar gráficamente el cuarto radio OD, dados los tres primeros OA, OB, OC y la relacion anarmónica *m*, bastaria cortar los tres radios dados por una transversal cualquiera y determinar sobre ella el cuarto punto, el cual, unido con O, dará el radio que se busca.

Se procederia de un modo análogo, si el radio desconocido fuera el primero, segundo ó tercero.

La relacion anarmónica de un sistema de cuatro puntos en

línea recta ó de un haz de cuatro rectas concurrentes, es *proyectiva*. En efecto:

Cuando se trata de un sistema de puntos, y la proyeccion es cónica, el sistema considerado y su proyeccion, pertenecen á un mismo haz y por consiguiente, la relacion anarmónica es la misma. La proyeccion cilíndrica es un caso particular de la cónica, pero se veria inmediatamente, observando que hay proporcionalidad entre los segmentos.

Cuando lo que se proyecta es un haz de cuatro rectas, se ve, desde luego, la transversal que pasa por los puntos en que los radios del haz atraviesan al plano de proyeccion, como una transversal *comun* al haz que se considera y á su proyeccion (cualquiera que sea el sistema de proyeccion), lo cual demuestra que las relaciones anarmónicas son iguales.

Sistemas homográficos.

Si se tiene sobre una recta indefinida un sistema de puntos (en número finito ó infinito), y á cada uno de ellos corresponde otro perfectamente determinado sobre otra recta indefinida, se dice que tales sistemas de puntos son *correspondientes* ó *conjugados*.

Pues bien: *dos sistemas de puntos correspondientes son homográficos cuando la relacion anarmónica de cuatro puntos cualesquiera del uno, es igual á la de sus correspondientes en el otro.*

Es claro que si se da uno de los sistemas S, su homográfico S′ sobre otra recta dada quedará determinado si se conocen *tres puntos* a', b', c' conjugados de otros tres tambien conocidos a, b, c del sistema S, porque en efecto, la condicion de la *homografía*, es decir, de la igualdad de las relaciones anarmónicas *determina* el punto q' del segundo sistema, conjugado de uno cualquiera q que se escoja en el primero, como se vió detalladamente al tratar de las relaciones anarmónicas.

Pero para demostrar la *posibilidad* de los sistemas homográ-

ficos de puntos, hay que hacer ver que si se determinan así los cuatro puntos q', r', s', t', conjugados de cuatro cualesquiera q, r, s, t que se toman en el sistema S, se cumplirá la condicion de la homografía, es decir, que

$$(q'\ r'\ s'\ t') = (q\ r\ s\ t).$$

Y efectivamente: si colocamos las dos rectas de modo que, dos puntos correspondientes a y a' coincidan, se demostró anteriormente que la recta de union qq' concurrirá al punto O en que se corten bb' y cc'; y que igualmente concurrirán á ese punto las rectas de union rr', ss', tt'; por consiguiente, las cuatro rectas

$$qq',\ rr',\ ss',\ tt',$$

formarán un haz, y los dos sistemas de cuatro puntos tendrán la misma relacion anarmónica (*).

Ahora bien: si dados tres puntos a, b, c de un sistema S, y sus tres homólogos conjugados a', b', c' del S', se adopta sobre cada una de las dos rectas indefinidas R y R' un punto fijo como orígen de distancias (ó abscisas) y suponemos que un punto x del primer sistema (cuya distancia al orígen representaremos tambien por x) ocupe todas las posiciones posibles en la primera recta, su conjugado x' ocupará sobre la segunda

---

(*) Un caso sencillo de sistemas homográficos sería el de dos series de puntos que den *segmentos proporcionales*, porque siendo

$$\left.\begin{aligned}\frac{ac}{ad} &= \frac{a'c'}{a'd'}\\ \frac{bc}{bd} &= \frac{b'c'}{b'd'}\end{aligned}\right\}$$

se cumplirá la condicion

$$(a\,b\,c\,d) = (a'\ b'\ c'\ d')$$

cualesquiera que sean los cuatro puntos.

posiciones correspondientes *perfectamente determinadas y únicas*, y se trata de descubrir la ecuacion F $(x, x') = 0$, que enlaza á las variables x y x'. Se la llama *ecuacion de homografía*.

Los datos son a, b, c y a', b', c'.

Para tener la ecuacion, bastará escribir que

$$(abcx) = (a'b'c'x'),$$

ó sea

$$\frac{ac}{ax} : \frac{bc}{bx} = \frac{a'c'}{a'x'} : \frac{b'c'}{b'x'},$$

que en funcion de las abscisas, será

$$\frac{c-a}{x-a} : \frac{c-b}{x-b} = \frac{c'-a'}{x'-a'} : \frac{c'-b'}{x'-b'},$$

ó bien

$$\frac{(c-a)\ (x-b)}{(c-b)\ (x-a)} = \frac{(c'-a')\ (x'-b')}{(c'-b')\ (x'-a')},$$

y quitando denominadores

$$(c-a)(c'-b')\,[(x-b)\,(x'-a')] = (c-b)\,(c'-a')\,[(x-a)\,(x'-b')];$$

que es la ecuacion pedida. Para escribirla brevemente, representemos $(c-a)\ (c'-b')$ por M, y $(c-b)\ (c'-a')$ por N, y la ecuacion

$$\mathrm{M}\,(x-b)\,(x'-a') = \mathrm{N}\,(x-a)\,(x'-b'),$$

ordenada dirá

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{M}ba' - \mathrm{N}ab') \\ &+ (\mathrm{N}b' - \mathrm{M}a')\,x \\ &+ (\mathrm{N}a - \mathrm{M}b)\,x' \\ &+ (\mathrm{M} - \mathrm{N})\,xx' \end{aligned}\right\} = 0:$$

Como se ve, la *ecuacion de homografía* es de la forma

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = 0$$

ó

$$\frac{A}{D} + \frac{B}{D}x + \frac{C}{D}x' + xx' = 0$$

en la cual hay *tres coeficientes.*

Resuelta la ecuacion en x, daria la fórmula

$$x = -\frac{A + Cx'}{B + Dx'} \qquad (1)$$

para señalar puntos en el sistema S, conjugados de otros conocidos en el S'.

Resuelta en x', la fórmula

$$x' = -\frac{A + Bx}{C + Dx} \qquad (2)$$

serviria inversamente para marcar puntos del sistema S' conjugados con los dados en S.

Fácil sería comprobar que así como la homografía de dos sistemas S y S', se expresa en la ecuacion

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = 0;$$

recíprocamente: dos sistemas de puntos conjugados que satisfagan á esta ecuacion, serán homográficos. Para esto bastaria tomar cuatro puntos en uno, en el S' por ejemplo (es decir asignar cuatro valores arbitrarios á x') y calcular por la fórmula (1) los cuatro valores correspondientes de x; y ver finalmente que la relacion anarmónica es la misma.

Aunque conocemos los valores de A, B, C, D en funcion de

los datos a, b, c, a', b', c', tambien se podrian *deducir* los coeficientes

$$\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$$

sujetando los sistemas (que no quedan todavía definidos en la ecuacion general) á pasar por *tres pares de puntos:* así, dados los valores x_1, x_2, x_3, de x, y los x'_1, x'_2, x'_3, de x', las ecuaciones de condicion serán:

$$\left.\begin{aligned} A + Bx_1 + Cx'_1 + Dx_1 x'_1 &= 0 \\ A + Bx_2 + Cx'_2 + Dx_2 x'_2 &= 0 \\ A + Bx_3 + Cx'_3 + Dx_3 x'_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

y las tres incógnitas son: $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$.

Veamos *la significacion de estos tres coeficientes.* Si en la recta R sobre la cual tenemos el sistema S de puntos, buscáramos el punto correspondiente al del sistema S' que se halla en el infinito sobre la recta R', habria que hacer $x' = \infty$ en la fórmula (1)

$$x = -\frac{A + Cx'}{B + Dx'} = -\frac{\frac{A}{x'} + C}{\frac{B}{x'} + D},$$

y tendriamos

$$x_i = -\frac{C}{D} \text{ (*)}$$

lo cual nos dice que: *el coeficiente de* x' *en la ecuacion, cambiado de signo, expresa la distancia* x_i *á que se encuentra (del origen o) el punto del sistema* S *conjugado del infinito.*

(*) Variamos la notacion para mayor claridad.

Si buscáramos inversamente el punto del sistema S' correspondiente al del sistema S que se halla en el infinito, habriamos de emplear la fórmula (2) sacada de la misma ecuacion de homografía

$$x' = -\frac{A + Bx}{C + Dx} = -\frac{\frac{A}{x} + B}{\frac{C}{x} + D},$$

y hacer en ella $x = \infty$, lo cual nos da

$$x' = -\frac{B}{D},$$

y vemos análogamente que: *el coeficiente de* x *en la ecuacion, cambiado de signo, expresa la distancia* x_i *á que se encuentra (del orígen) el punto del sistema* S' *conjugado del infinito.* Se podria ver finalmente lo que expresa el primer coeficiente (que es el término independiente de x y x' en la ecuacion), de uno de estos dos modos:

1.° Buscando en la recta R, el punto conjugado del orígen o'.

2.° Buscando inversamente en la recta R', el punto conjugada del orígen o.

Para el primer procedimiento, hay que emplear la fórmula (1) y hacer en ella $x' = o$; se obtiene así

$$x_o = -\frac{A}{B} \text{ de donde } \frac{A}{D} = -\frac{B}{D} \times x_o = x'_i \times x_o.$$

Para el segundo procedimiento, hay que emplear la fórmula (2) y hacer en ella $x = o$, lo cual conduce á

$$x'_o = -\frac{A}{C} \text{ de donde } \frac{A}{D} = -\frac{C}{D} \times x'_o = x_i \times x'_o.$$

Se podrian enunciar estos dos resultados, pero es más fácil retener de memoria las expresiones $x'_i \times x_o$ y $x_i \times x'_o$ que

deberán ser iguales, lo cual indica proporcionalidad entre las abcisas, á saber:

$$\frac{x_o}{x_i} = \frac{x'_o}{x'_i} \ (*).$$

Métodos gráficos.—Conocidos tres pares de puntos correspondientes, a, a'; b, b'; c, c'; se puede determinar gráficamente el punto d', conjugado de uno cualquiera d (perteneciente al primer sistema), haciendo uso de los teoremas que demostramos al tratar de las relaciones anarmónicas de dos sistemas de cuatro puntos ó de dos haces de cuatro rectas.

Un procedimiento consiste en llevar la recta R' *(fig. 74)*, á tener el punto a' en coincidencia con su homólogo a de la recta R (para lo cual lo más sencillo es correrla paralelamente á sí misma, en la direccion $a'a$, si R y R' no son paralelas). Unanse despues las nuevas posiciones b_1, c_1 de los puntos b', c', con sus homólogos b, c hasta que estas rectas de union se corten en O; trácese despues el radio Od hasta encontrar en d_1 á la recta R_1, y este punto, d_1, será el que se busca. Para tener el punto pedido d', basta ya correr el punto d_1 en la direccion aa', hasta

---

(*) Se puede ver que esta proporcion expresa la igualdad de las relaciones anarmónicas de los dos sistemas de cuatro puntos conjugados.

$$(o\ x_o\ x_i\ \mathrm{I}) \text{ y } (x'_o\ o'\ \mathrm{I}'\ x'_i\ ).$$

La igualdad diria

$$\frac{x_i}{\infty} : \frac{x_i - x_o}{\infty} = \frac{\infty}{x'_i - x'_o} : \frac{\infty}{x'_i}$$

ó bien

$$\frac{x_i}{x_i - x_o} : \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} : \frac{x'_i - x'_o}{x'_i}, \text{ es decir } \frac{x_o}{x_i} = \frac{x'_o}{x'_i}$$

porque las expresiones $\frac{\infty}{\infty}$, valen 1 *en el caso actual.*

situarlo en la recta dada R'. Se ve que los sistemas a, b, c, d y a, b_1, c_1, d_1 son *homográficos* como pertenecientes al haz $O.ab_1c_1d_1$ cortado por dos transversales.

Otro procedimiento, igualmente sencillo, sería formar en dos puntos cualesquiera O y O' *(fig. 75)*, de la recta de union aa', dos haces de cuatro rectas, el uno, $O.abcd$, con sus cuatro radios conocidos; el otro, $O'.a'b'c'd'$, con el radio $O'd'$ desconocido. Para determinarlo, de tal manera que este segundo haz tenga la misma relacion anarmónica del $O.abcd$, basta hacer que tengan una transversal comun, y para ello, unir entre sí los puntos b_1 y c_1 en que se cortan dos á dos los radios Ob, $O'b'$ y Oc, $O'c'$. Si despues unimos el punto d_1, en que esta transversal corta al radio Od con el centro O' del otro haz, obtendremos en $O'd_1$, el punto pedido d'. En este procedimiento se podria adoptar como centro del primer haz, el punto a' *(fig. 76)*, y como centro del segundo haz, el punto homólogo a, lo cual nos ahorraria la recta aa' (dejándola sobreentendida como radio homólogo en coincidencia de los dos haces).

Se puede aplicar uno ú otro de estos procedimientos á la determinacion de los puntos x_i y x'_i conjugados del infinito.

Hemos usado el primer procedimiento en la *fig. 77*, en la cual, despues de hallar el punto O, en que se cortan b_1b y c_1c, hemos trazado la recta OI paralela á R (como radio que va al punto en el infinito sobre R), y el punto h, en que corta á R_1, lo hemos corrido á su posicion x'_i; por otra parte, hemos trazado la recta OI_1 paralela á R_1 (como radio que va al punto en el infinito sobre R_1) y en él se encuentra el punto x_i.

El segundo procedimiento se ve aplicado en la *fig. 78*, en la cual, unido el punto a' con los b y c, así como el a con los b' y c', y trazada la transversal b_1c_1, que une los puntos de interseccion, se ha trazado, en primer lugar, la recta $a'I$ paralela á R (como radio al infinito), y marcado el punto h en que corta á la transversal, se ha trazado el radio ah (del otro haz), en el cual se encuentra el punto x'_i: análogamente hemos trazado aI', paralela á R' (como radio al infinito), y marcado el punto k en que corta

á la transversal y se ha trazado el radio $a' k$ (del otro haz), en el cual se encuentra el punto x_i.

El primer procedimiento no sería aplicable si las rectas R y R' fueran paralelas; pero en cambio el segundo se simplificaria considerablemente, como se ve en la *fig. 79*, en la cual, despues de trazada la transversal $b_1 c_1$, nada queda que hacer mas que señalar los puntos x_i y x'_i.

Divisiones homográficas en una misma recta.

Los dos sistemas S y S' (de puntos) homográficos podrian estar situados en una misma recta indefinida R, en vez de hallarse (como hasta ahora hemos supuesto) sobre dos rectas distintas, R y R'. Entonces, claro es que aunque se podrian adoptar dos orígenes de abscisas no se necesita más que uno solo para definir (por su distancia á él) la posicion que ocupe un punto cualquiera de uno ú otro sistema sobre la recta indefinida. Pero como sobre la misma recta coexisten simultáneamente dos sistemas ó series de puntos; representaremos por x la distancia (variable) á o de un punto del sistema S, y por x' la de un punto del sistema S'.

Conviene desde luego advertir para evitar confusiones, que si consideramos sobre la recta una *posicion dada* de punto, y los sistemas son continuos, debemos ver en esta posicion *dos puntos distintos* que la ocupan: uno del sistema S, cuya distancia al orígen llamaremos por ejemplo, a, y que tendrá su correspondiente ó conjugado á una cierta distancia a' de o; — otro del sistema S' cuya distancia al orígen llamaremos por ejemplo b' (aunque aquí $b' = a$), y que tendrá su correspondiente ó conjugado á una cierta distancia b de o.—Se comprende que en general, las distancias a' y b serán *diferentes*, y por consiguiente, que dos puntos a y b' de distinto sistema, que coinciden, tienen por conjugados respectivamente, dos puntos a' y b que en general no coinciden.

Para estudiar los sistemas homográficos de puntos situados en una misma recta haciendo uso de la ecuacion de homografía

$$\frac{A}{D} + \frac{B}{D} x + \frac{C}{D} x' + x x' = o,$$

empecemos por averiguar si hay *puntos dobles;* es decir, puntos del sistema S que coincidan con sus conjugados del S'. Siendo uno solo el orígen, es evidente que la condicion necesaria y suficiente para la existencia de tales puntos es que $x = x'$. Por consiguiente, los valores de x que se buscan (si los hay), han de satisfacer á la *ecuacion de segundo grado*

$$x^2 + \left(\frac{B}{D} + \frac{C}{D}\right) x + \frac{A}{D} = 0,$$

ó poniendo de manifiesto la significacion de los coeficientes

$$x^2 - (x_i + x'_i)\, x + x'_i \times x_o = 0.$$

Resuelta esta ecuacion, da

$$x = \frac{x_i + x'_i}{2} \pm \sqrt{\frac{(x_i + x'_i)^2}{4} - x'_i \times x_o};$$

lo cual nos enseña que habrá realmente *dos puntos dobles, uno ó ninguno,* segun que

$$(x_i + x'_i)^2 \gtreqless 4 x'_i \times x_o. \quad (*)$$

(*) Cuando existan realmente dos puntos dobles, las raíces nos dicen (por el signo $\pm$), que serán simétricos respecto del punto medio de x_i x'_i , esto es, que los tendremos á distancias iguales de los puntos x_i y x'_i.

Cuando sea uno solo, habrá de coincidir forzosamente con dicho punto medio, puesto que su abscisa será

$$x = \frac{x_i + x'_i}{2}.$$

Si adoptáramos como orígen de abscisas el punto medio de la distancia que separa á los puntos x_i y x'_i, las abscisas x_i y x'_i serian iguales y de signo contrario, y por tanto, $x_i + x'_i = 0$: los puntos dobles estarian dados entonces por la fórmula

$$x = \pm \sqrt{- x'_i \times x_o}.$$

Método gráfico.—Para determinar gráficamente los puntos dobles, habrá que empezar por marcar sobre la recta R los puntos x_i y x'_i de uno y otro sistema conjugados con el infinito, y tambien el punto x_o del sistema S conjugado con el orígen, mirando este punto como del sistema S'.

Los datos son como siempre los tres pares a, a'; b, b'; c, c' de puntos conjugados *(fig. 80)*.

Para hacer las construcciones, hay que empezar por sacar aparte el sistema S', llevándolo á otra recta R': para mayor sencillez lo colocaremos sobre una paralela á R', como se ve en la figura. Ya sabemos cómo se marcan los puntos x_i, x'_i y que la construccion consiste en unir a con b' y c' por una parte; a' con b y c por otra, y trazar la transversal $b_1 c_1$; el punto x'_i que obtengamos en la recta R', debe ser llevado despues á su verdadera posicion en R. Tomemos por orígen el punto medio o de x_i x'_i, y para buscar x_o, empezaremos por llevarlo á R', lo uniremos despues con a, y trazaremos $a'h$ hasta x_o. Se ve desde luego que en el caso de la figura, habrá *dos puntos dobles*, porque siendo x'_i y x_o abscisas *de signo contrario*, las dos raíces

$$x = \pm \sqrt{- x'_i \times x_o}$$

serán *reales*, desiguales (aunque iguales y de signo contrario). Para obtenerlos, se construye la media proporcional, y se lleva

á uno y otro lado de o. Si se determinara el punto x'_o, resultaria el simétrico del x_o *(fig. 81)*, porque segun se sabe

$$x'_o = \frac{x'_i \times x_o}{x_i} = - x_o .$$

Si el punto x_o hubiera coincidido con o, tambien x'_o coincidiria, y la fórmula

$$x = \pm \sqrt{- x'_i \times x_o} = 0.$$

nos hubiera dado *un punto doble único* en o *(fig. 82)*.

Si la abscisa x_o hubiera sido *del mismo signo* que x'_i *(figura 83)*, los puntos dobles hubieran sido *imaginarios*.

Fácil es seguir sobre la recta las variaciones por ley de continuidad de las posiciones relativas de los puntos conjugados. Veamos los puntos x_i, x'_i y el punto medio o de la distancia que los separa; y distingamos los *tres casos*.

Primer caso (fig. 81).—Si los puntos dobles $d - d'$ y $d_1 - d'_1$ son *reales y distintos*, sabemos que estarán equidistantes de o, como asimismo lo estarán los x_o y x'_o.

Imaginemos que el punto x del sistema S ocupe por ley de continuidad todas las posiciones recorriendo la recta de izquierda á derecha: la veremos venir del infinito á la izquierda y pasar sucesivamente por los puntos notables

$$\ldots x_i \ldots d \ldots x_o \ldots o \ldots d_1 \ldots$$

Su conjugado x' se moverá tambien por ley de continuidad y engendrará, por decirlo así, el sistema S'. Le veremos salir de la posicion x'_i moviéndose hácia la derecha, y llegar al infinito (*) cuando el x llega á x_i; venir del infinito á la izquierda,

---

(*) Admitimos estas locuciones viciosas en gracia de su brevedad.

siguiendo los pasos al punto x, y alcanzarlo en $d - d'$ [primer punto de coincidencia ó *doble*]; despues mientras el x va desde d á x_o, el x' (que se adelanta al salir), va desde d' á o; siguiendo, le vemos en x'_o cuando el x llega á o. Pero desde este instante, el punto x' se retarda, por decirlo así, y en $d'_1 - d_1$ [segundo punto *doble*] se deja alcanzar por el x; y ya se queda siempre detrás de este, ocupando sucesivamente las posiciones desde d'_1 hasta x'_i, miéntras el x (que se adelanta desde la salida), se va hasta el infinito.

Segundo caso (fig. 82).—Si el punto doble fuera único, $d - d'$ estará en o, y siendo el *cero* punto *doble*, claro es que x_o y x' coinciden con el mismo o.

Repitiendo la imágen que hemos presentado en el primer caso, veremos el punto x' salir como ántes de la posicion x' moviéndose hácia la derecha y llegar al infinito, cuando el x llega á x_i; al venir del infinito á la izquierda siguiendo al x, no le alcanza hasta llegar á $d - o - d'$ [único punto de coincidencia]; ya se queda siempre rezagado, y no va sino hasta x'_i miéntras el x se va hasta el infinito.

Tercer caso (fig. 83).—Si los puntos *dobles* fueran imaginarios, tendriamos siempre los puntos x_i y x'_i equidistantes de o, y del mismo modo los x_o y x'_o, pero x_o, x'_i quedarian á un lado, y x'_o, x_i al otro lado.

En la imágen anterior, el punto x' no alcanzará nunca á su conjugado x, porque despues de recorrer el segmento indefinido desde x'_i hasta el infinito, y venir por la izquierda, se verá que miéntras el punto x recorre el segmento de x_i hasta o, el x' va detrás y solo llega á x'_o; despues describe el segmento x'_o o cuando su conjugado ocupa las posiciones desde o á x_o; y finalmente recorre el trayecto desde o á x'_i miéntras el punto x desde x_o se aleja al infinito.

Si en vez de un solo orígen de abscisas adoptáramos *dos*,

uno *o* para definir las posiciones de los puntos del sistema S, y otro *o'* para los puntos del S', y estos dos orígenes *o* y *o'* fueran *puntos conjugados*, es evidente que la *ecuacion de homografía* deberia quedar satisfecha por el par de valores $x = 0\ x' = 0$; por consiguiente careceria de término independiente de las variables, y tendria la forma

$$\frac{B}{D} x + \frac{C}{D} x' + xx' = 0,$$

ó bien recordando el significado de los coeficientes

$$x'_i \times x + x_i \times x' = xx'.$$

Esta simplificacion se obtendria tambien con un solo orígen si este fuera un punto doble.

Si adoptáramos como orígen único el punto medio de la distancia que separa á x_i y x'_i, la ecuacion general de homografía

$$x'_i \times x_o - x'_i \times x - x_i \times x' + xx' = 0$$

se podria escribir

$$x'_i \times x_o - x'_i (x - x') + xx' = 0$$

porque $x_i = - x'_i$. En el caso especial de haber un solo punto doble, este sería el punto medio de $x_i\ x'_i$, y adoptado como orígen, se reunirian las dos simplificaciones, viniendo á reducirse en este caso la ecuacion de homografía á la forma

$$x'_i (x - x') = xx'.$$

Haces homográficos.

Si se tiene un haz de rectas concurrentes (en número finito ó infinito), y á cada uno de los radios del haz corresponde otro perfectamente determinado de un segundo haz, se dice que estos dos haces de radios correspondientes ó conjugados son *homográficos*, cuando: *la relacion anarmónica de cuatro radios cualesquiera del uno es igual á la de sus correspondientes en el otro.*

La *posibilidad* de los haces homográficos queda establecida con solo recordar la posibilidad ya demostrada de los sistemas homográficos de puntos, é imaginar que estos sirvan de bases respectivas á dos haces cuyos vértices sean dos puntos cualesquiera V y V'.

Para hallar la ecuacion que expresa la homografía de dos haces, será necesario (análogamente á lo que se hizo con los sistemas de puntos), adoptar como radios de orígen de ángulos en uno y otro haz, dos rectas cualesquiera VO y V'O' que pasen respectivamente por los vértices V y V': llamaremos A, B, C, X, ... y A', B', C', X', ... á los ángulos respectivos, OVA, OVB, ... y O'V'A', O'V'B' ...

Los datos son A, B, C y A', B', C'.

Habrá que escribir

$$\frac{\operatorname{sen}(C-A)}{\operatorname{sen}(X-A)} : \frac{\operatorname{sen}(C-B)}{\operatorname{sen}(X-B)} = \frac{\operatorname{sen}(C'-A')}{\operatorname{sen}(X'-A')} : \frac{\operatorname{sen}(C'-B')}{\operatorname{sen}(X'-B')},$$

ó bien

$$\frac{\operatorname{sen}(C-A)\,.\,\operatorname{sen}(X-B)}{\operatorname{sen}(C-B)\,.\,\operatorname{sen}(X-A)} = \frac{\operatorname{sen}(C'-A')\,.\,\operatorname{sen}(X'-B')}{\operatorname{sen}(C'-B')\,.\,\operatorname{sen}(X'-A')}$$

y quitando denominadores y representando

$$\operatorname{sen}(C-A)\,.\,\operatorname{sen}(C'-B') \quad \text{por} \quad M$$
$$\operatorname{sen}(C-B)\,.\,\operatorname{sen}(C'-A') \quad \text{por} \quad N$$

la ecuacion es

$$M \cdot \operatorname{sen}(X - B) \cdot \operatorname{sen}(X' - A') = N \cdot \operatorname{sen}(X - A) \cdot \operatorname{sen}(X' - B'):$$

dividiendo por cos X . cos X', se tendrá

$$M(\operatorname{tang} X \cos B - \operatorname{sen} B)(\operatorname{tang} X' \cos A' - \operatorname{sen} A') = N(\operatorname{tang} X \cos A - \operatorname{sen} A)(\operatorname{tang} X' \cos B' - \operatorname{sen} B');$$

que ordenada, dice

$$\left.\begin{array}{l} [M \operatorname{sen} B \operatorname{sen} A' - N \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B'] \\ + [N \cos A \operatorname{sen} B' - M \cos B \operatorname{sen} A'] \cdot \operatorname{tang} X \\ + [N \operatorname{sen} A \cos B' - M \operatorname{sen} B \cos A'] \cdot \operatorname{tang} X' \\ + [M \cos B \cos A' - N \cos A \cos B'] \cdot \operatorname{tang} X \operatorname{tang} X' \end{array}\right\} = 0.$$

La *ecuacion de homografía de dos haces* es, pues, de la forma

$$\alpha + \varepsilon \cdot \operatorname{tang} X + \gamma \cdot \operatorname{tang} X' + \delta \cdot \operatorname{tang} X \cdot \operatorname{tang} X' = 0$$

ó

$$\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \operatorname{tang} X + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \operatorname{tang} X' + \operatorname{tang} X \cdot \operatorname{tang} X' = 0.$$

con sus *tres coeficientes* $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$. Se podria resolver con respecto á tang X ó á tang X', etc., etc.

En el caso en que los dos haces en un mismo plano tienen *el vértice* V *comun*, no se necesita más que un radio VO de orígen de ángulos (aunque se podrian adoptar dos), y para averiguar si hay *radios dobles*, es decir, radios que coincidan con sus conjugados, debiendo ser X = X', se tendrá una ecuacion de segundo grado para determinar tang X, y podrá haber *dos, uno ó ninguno*, segun que las raíces sean *reales desiguales, reales iguales* ó *imaginarias*.

Métodos gráficos.—Para determinar gráficamente los radios dobles (cuando existan) bastará cortar los haces por una transversal, buscar en los sistemas de puntos (que tendremos sobre

ella) los *puntos dobles*, por la construccion sabida, y unirlos con el vértice V.

Así se podria tambien determinar gráficamente en un haz, el radio homólogo conjugado de uno dado en el otro, cuando se conocen tres pares de radios, *reduciendo* este problema al de los sistemas de puntos. Tambien se podria trasladar los tres radios conocidos á la posición V'A'B'C' *(fig. 84)* de modo que el V'A' coincida con su homólogo VA; unir entre sí los puntos *b*, *c*, en que se cortan respectivamente VB, V'B' y VC, V'C'; y finalmente unir *d* con V'.

Se podria hacer tambien otra construccion, sin trasladar los radios dados V'A', V'B', V'C': consiste en trazar por el punto *a* (en que se cortan los radios VA y V'A') dos transversales *t* y *t'*; la primera corta á los radios del primer haz en los puntos *b*, *c*, *d*; la segunda corta á V'B' y V'C' en *b'* y *c'*. Si se unen *b'b* y *c'c* hasta que estas rectas de union se corten en O, y despues se traza O*d*, el punto *d'* en que encuentre á la transversal *t'* determina ya el radio pedido V'D', porque debiendo ser homográficos los sistemas de puntos *a*, *b*, *c*, *d* y *a'*, *b'*, *c'*, *d'* y teniendo en coincidencia los puntos homólogos *a*; las rectas de union *bb'*, *cc'*, *dd'* deberán concurrir.

Puesto que la relacion anarmónica de un haz de cuatro rectas es *proyectiva*, se ve que las proyecciones de dos haces homográficos, serán tambien homográficos entre sí, ya se trate de haces situados en un plano y con el mismo ó distinto vértice, ya se trate de haces situados de cualquier modo.

Relacion armónica.—Haz armónico.

Se dice que cuatro puntos *a*, *b*, *c*, *d* en línea recta *(fig. 86)* forman un *sistema armónico* cuando la relacion anarmónica (*abcd*) de estos cuatro puntos es igual á —1: así

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = -1.$$

En este caso la relacion anarmónica recibe el nombre de *armónica*, y como no se trata más que de un caso particular de la teoría general de las relaciones anarmónicas, todo lo dicho allí será aplicable aquí.

Si la relacion que vale -1 es la $(abcd)$ *(fig. 86)*, que denominamos m, es claro que las otras dos relaciones anarmónicas *principales* n y p valdrán

$$n = \frac{1}{1-m} = \frac{1}{2}, \quad p = 1 - \frac{1}{m} = 2.$$

La relacion armónica indica que

$$\frac{ac}{ad} = -\frac{bc}{bd},$$

lo cual expresa que si se considera la recta cd, los puntos a y b la dividen en segmentos de magnitudes proporcionales, es decir, que la relacion entre ac y ad es *numéricamente* igual á la que hay entre bc y bd aunque sean evidentemente *de signos contrarios*. Se dice que *los puntos* a *y* b *dividen armónicamente á la recta* cd, ó bien que *los puntos* a *y* b *son conjugados armónicos respecto de* c *y* d. Y como la relacion anarmónica no altera si se cambian de lugar los grupos de dos letras, se tiene

$$(cdab) = \frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = -1,$$

de donde

$$\frac{ca}{cb} = -\frac{da}{db},$$

lo cual hace ver que *los puntos* c *y* d *dividen tambien armónicamente á la recta* ab ó que c *y* d *son conjugados armónicos respecto* de a *y* b.

Para escribir la ecuacion que liga las distancias de los cuatro puntos de una division armónica á un quinto punto o situado en la misma recta (y tomado como orígen de distancias) lla-

memos c, d á las abscisas de los puntos c, d, y x, x' á las abscisas de los puntos a, b: la ecuacion

$$(abcd) = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = -1 \text{ será } \frac{c-x}{d-x} : \frac{c-x'}{d-x'} = -1$$

ó bien

$$(c-x)(d-x') + (d-x)(c-x') = 0;$$

que reducida es

$$2xx' - (c+d)(x+x') + 2cd = 0;$$

ecuacion de forma simétrica y sencilla, pero que se simplificaria extraordinariamente adoptando como orígen el punto medio o' de la recta cd, puesto que entónces $d = -c$, y por tanto $c + d = o$, con lo cual la ecuacion se reduce á

$$xx' = c^2.$$

Nada más fácil que seguir por medio de esta ecuacion la variedad de posiciones relativas que pueden ocupar sobre la recta indefinida los puntos conjugados armónicos a y b.

Imaginemos el punto a recorriendo la recta por ley de continuidad de izquierda á derecha, y pasando sucesivamente por los puntos notables

$$\ldots c \ldots o' \ldots d \ldots:$$

veremos su conjugado armónico b salir de o' (para $x = \infty$; $x' = o$) y moviéndose hacia la izquierda recorrer el trayecto $o'c$ llegando á c en el instante mismo en que a ocupa esta posicion (para $x = -c$; $x' = -c$); seguir despues su camino siempre hácia la izquierda, y llegar al infinito cuando a pasa por o' (para $x = 0$; $x' = \infty$): venir del infinito á la derecha y recorrer de derecha á izquierda el segmento indefinido que hay á la derecha del punto d, miéntras el a describe el segmento $o'd$ encontrándole de nuevo en la posicion d (para $x = c$; $x' = c$); y finalmente ocupar todas las posiciones entre d y o' cuando

el a está ya á la derecha de d, y volver al punto o' de que partió en el instante en que a llega al infinito.

Se ve, por consiguiente, que dos puntos conjugados armónicos están siempre *á un mismo lado de* o', *uno dentro de* cd *y otro fuera:* que coinciden en c y en d, cada uno de los cuales es, por tanto, conjugado de sí mismo: y que el punto o' no tiene conjugado, ó (como suele decirse) su conjugado está en el infinito.

Métodos gráficos.—Para determinar el punto desconocido a, conjugado armónico del b, con respecto á cd, pueden seguirse varios procedimientos.

Primeramente recordemos que dada una relacion anarmónica m y tres de los puntos, se determinaba el cuarto por una construccion que, segun dijimos, era aplicable al caso $m = -1$.

Como construccion *especial* para la relacion *armónica* digamos ahora que la fórmula

$$x = \frac{c^2}{x'}$$

en la cual c representa la longitud dada $o'd$ (mitad de cd) y x' la longitud conocida $o'b$, nos conduce á emplear cualquiera de los procedimientos para construir una tercera proporcional.

Podriamos tambien hacer uso de la propiedad de las diagonales de un cuadrilátero completo: para ello, trazariamos, arbitrariamente, los dos lados co y do *(fig. 87)* y la diagonal brt (si b es el punto dado), con lo cual podriamos formar ya el cuadrilátero cuyos lados cr y dt, al cortarse en s, nos darian el cuarto vértice y nos permitirian trazar la otra diagonal os que va al punto pedido a. Si el punto desconocido fuera el b, despues de trazar los lados co y do, uniendo a con o tendriamos una diagonal; despues trazariamos, arbitrariamente, uno de los lados, cr por ejemplo, que al cortar á la diagonal ao en s determinaria el cuarto lado dst, del cuadrilátero, cuya diagonal tr, prolongada, nos daria el punto pedido b. En uno y otro caso la recta dada cx desempeña el papel de diagonal del cuadrilátero.

Haz armónico.—Un haz O.ABCD *(fig. 88)*, de cuatro rectas

concurrentes cuya relacion anarmónica sea — 1, es un *haz armónico*, y una transversal cualquiera dará, en los cuatro puntos de interseccion *a, b, c, d*, un sistema armónico. Se dirá que el radio O A del haz, es *conjugado armónico* del O B con respecto al ángulo C O D, y tambien que los radios O C y O D son *conjugados armónicos* respecto del ángulo A O B. Es evidente que todo lo dicho de la relacion anarmónica de un haz de cuatro rectas, es aplicable al haz armónico, puesto que no se trata mas que de un caso particular. Así se ve que la relacion armónica de un haz (como la de un sistema de cuatro puntos), es *proyectiva*.

Las posiciones relativas que pueden ocupar dos radios conjugados armónicos O A y O B, con respecto á un ángulo C O D, se ven inmediatamente recordando lo dicho para los dos puntos conjugados armónicos *a* y *b* respecto de *c d*.

Para determinar gráficamente uno de los radios O A ú O B, dado el otro, basta cortar por una transversal y resolver el problema con respecto á los puntos. El procedimiento del cuadrilátero completo, es aquí el más indicado por la misma figura, en vista de que los radios *c* O y *d* O *(fig. 88)*, sirven como lados del cuadrilátero.

Puntos en involucion.—Haces en involucion.

Al tratar de las divisiones homográficas en una misma recta, advertimos, como se recordará, que si los sistemas de puntos son continuos, y á un punto *a* del S corresponde el *a'* del S' *(fig. 89)*, el punto *b'* de este segundo sistema que coincide con el *a* del primero, tiene un conjugado *b* que, en general no coincide con *a'*; ó dicho de otro modo: que si el conjugado de *a* está en *a'*, el conjugado de este (mirado como del primer sistema) no coincide con *a*.

Pero se concibe que entre las infinitas especies de divisiones homográficas posibles sobre una misma recta, las haya de tal suerte que aquella *coincidencia* de puntos tenga lugar *(figu-*

ra 90); entónces se diria que los sistemas homográficos de puntos conjugados están *en involucion.*

Para ver si el caso particular que concebimos puede realizarse, y descubrir las condiciones que para ello se requieren, recordemos que (adoptando un orígen) la *ecuacion de homografía* era

$$\frac{A}{D} + \frac{B}{D}x + \frac{C}{D}x' + xx' = 0,$$

pudiendo recibir los coeficientes valores cualesquiera, segun las posiciones que ocupen los *tres pares de puntos* por los cuales se quiera hacer pasar á los sistemas conjugados S y S'. Pues bien, si un primer par de puntos es a, a', se tendrá la primera ecuacion de condicion

$$\frac{A}{D} + \frac{B}{D}a + \frac{C}{D}a' + aa' = 0;$$

pero como queremos que los sistemas estén *en involucion,* un *segundo par de puntos* habrá de ser *ya necesariamente* $x = a'$, $x' = a$, puesto que los puntos han de ser *conjugados recíprocos;* y por consiguiente habrá de verificarse ya que

$$\frac{A}{D} + \frac{B}{D}a' + \frac{C}{D}a + aa' = 0:$$

y debiendo satisfacer los coeficientes á una y otra condicion, se deberá tener

$$\frac{B}{D}(a' - a) - \frac{C}{D}(a' - a) = 0 \quad \text{ó} \left(\frac{B}{D} - \frac{C}{D}\right)(a' - a) = 0;$$

pero como $(a' - a)$ no es cero, habrá de verificarse

$$\frac{B}{D} = \frac{C}{D},$$

lo cual nos enseña que los coeficientes de x y de x' (de la ecuacion general de homografía) *deben ser iguales para que haya involucion.* Pero digo que esta condicion es ya *suficiente para*

que los sistemas estén en involucion, porque siendo ya la ecuacion particular de homografía

$$\frac{A}{D} + \frac{B}{D}(x + x') + xx' = 0,$$

simétrica respecto á x y x', es claro que si el par de valores $x = h$, $x' = h'$ satisface á la ecuacion, esta quedará satisfecha tambien por el par $x = h'$, $x' = h$; y esto cualquiera que sea el valor h que escojamos, lo cual prueba que los sistemas de puntos correspondientes á la ecuacion que precede *están en involucion*.

Es claro que como los coeficientes no son más que dos en la ecuacion de involucion, bastarian *dos pares distintos de puntos conjugados* a, a'; b, b' para determinarlos: las ecuaciones de condicion serian

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{D} + \frac{B}{D}(a + a') + aa' = 0 \\ \frac{A}{D} + \frac{B}{D}(b + b') + bb' = 0 \end{aligned}\right\},$$

que obligarian, por decirlo así, á la involucion *á pasar por los dos pares distintos de puntos conjugados recíprocos*.

La *significacion de los coeficientes* es la que ya conocemos en la ecuacion de homografía; pero, siendo ahora iguales entre sí $\frac{B}{D}$ y $\frac{C}{D}$, los puntos x'_i y x_i *conjugados del infinito* (que eran en los sistemas homográficos en general dos puntos distintos) *coinciden* ahora en una posicion (*) que se halla á la distancia del orígen

$$x'_i = x_i = -\frac{B}{D}.$$

(*) Esto debía preverse, puesto que coincidiendo en el infinito dos puntos, uno del sistema S y otro del S', sus conjugados habrian de coincidir tambien por la definicion de involucion.

Análogamente los puntos x'_0 y x_0 conjugados del punto *cero* (orígen) en el cual coinciden dos puntos uno de cada sistema, habrán de coincidir tambien, y por tanto $x'_0 = x_0$.

Este punto se llama *centro de involucion.*—El término independiente de x y x' en la ecuacion, es ahora

$$\frac{A}{D} = x_i \times x_o.$$

En vista de esta significacion de los coeficientes, la ecuacion de la involucion podria escribirse así:

$$x_i \times x_o - x_i (x + x') + xx' = 0.$$

Un par de puntos, muy cómodo siempre, será el centro de involucion conjugado con el infinito *(figuras 91 y 92).* Cuando se nos dé el otro par de puntos conjugados que hace falta para determinar una involucion, somos dueños de adoptar uno de ellos *o* como orígen; entónces el otro será x_o: podremos medir las distancias x_i y x_o, sustituirlas en la ecuacion anterior y tendremos la ecuacion de la *involucion dada,* referida al punto *o* como orígen.

Para tener una involucion podriamos tomar dos sistemas homográficos de puntos, S y S', en dos rectas distintas R y R', marcar en uno y otro sistema los puntos x'_i y x_i; y llevar uno de ellos (el S' por ejemplo) á estar en la misma recta R que el otro, pero colocándolo de modo que el punto x'_i esté en coincidencia con el x_i. En efecto, los dos puntos infinitos coinciden siempre; luego debemos considerar que el par de puntos conjugados ∞, x'_i está en coincidencia con el par de puntos conjugados ∞, x_i. De la infinita variedad de sistemas homográficos posibles, se sacarian las infinitas involuciones posibles en una misma recta y con un mismo centro.

Así se ve la involucion como caso particular de dos sistemas homográficos en una misma recta; pero se comprende que considerada en sí misma la involucion, no debe mirarse *en realidad* sino como *un solo sistema de puntos,* en que cada punto es conjugado de otro, y que goza (el sistema) de la propiedad de que

la relacion anarmónica de cuatro puntos cualesquiera es igual á la de sus conjugados.

Para hacer el estudio de la involucion, sería convenientísimo adoptar como orígen el centro mismo I de involucion: si en la ecuacion

$$x_i \times x_o - x_i (x + x') + xx' = 0$$

hiciéramos $x_i = 0$, tendriamos que hacer tambien $x_o = \infty$, porque como el orígen es el punto I, su conjugado x_o estaria en el infinito, y al escribir la ecuacion, el término independiente $x_i \times x_o$ diria $o \times \infty$. Y es lo que debia aparecer, porque habria verdadera *indeterminacion*, dado que solo se habria marcado un punto (I — o) como conjugado del infinito, y no podia quedar definida la involucion. Pero si dejamos (además del punto I) los dos puntos conjugados o y x_o, y medimos las distancias de todos los puntos al punto I, representándolas por x_1 y x'_1 las fórmulas de transformacion serán

$$\left.\begin{aligned} x &= x_i + x_1 \\ x' &= x_i + x'_1 \end{aligned}\right\},$$

que sustituidas en la ecuacion de involucion que teniamos, darán

$$x_i \times x_o - x_i (2x_i + x_1 + x'_1) + (x_i + x_1)(x_i + x'_1) = 0;$$

y reduciendo

$$x_i \times x_o - x_i^2 + x_1 x'_1 = 0$$

ó bien

$$x_1 x'_1 = x_i^2 - x_i \times x_o = x_i (x_i - x_o)$$

ecuacion sencilla, cuyo segundo miembro es un número cono-

cido: llamándolo m y quitando los sub-índices á las variables, *la ecuacion de involucion referida á su centro* toma la forma

$$xx' = m,$$

la cual nos muestra *la ley* de la involucion, ó sea su propiedad característica, á saber: *que el producto de las distancias al centro de cada dos puntos conjugados recíprocos, es constante.* El producto $m = x_i\ (x_i - x_o)$ es el que corresponde á los dos puntos o y x_o, dados para definir (en union del punto I), la involucion.

El signo de la cantidad m depende de las posiciones relativas de los dos puntos conjugados, recíprocos, o y x_o con respecto al centro I; se ve que cuando se dan á un mismo lado de I *(figura 91)*, m es *positiva* y la involucion se llama *de primer género;* y cuando se dan á diferente lado *(fig. 92)*, m es *negativa* y la involucion se dice *de segundo género.* No es admisible el supuesto de ser $m = 0$, porque teniendo que ser los puntos o y x_o distintos del I, no puede ser cero x_i ni tampoco $(x_i - x_o)$. Por lo demás, una involucion en que m fuera cero, no es nada, porque cualquier punto que escogiéramos en la recta (para cualquier valor de x), la ecuacion $xx' = 0$, conduciria á $x' = 0$ y por consiguiente, el punto I vendria á ser conjugado *de todos* los puntos de la recta y por tanto *de ninguno.*

Veamos si puede haber en una involucion algun *punto doble,* es decir, que *coincida* con su conjugado. Partiendo de la ecuacion general

$$x_i \times x_o - x_i\,(x + x') + xx' = 0$$

y haciendo en ella $x' = x$, habrá que resolver la ecuacion de segundo grado

$$x^2 - 2x_i \times x + x_i \times x_o = 0$$

cuyas raíces

$$x = x_i \pm \sqrt{x_i^2 - x_i \times x_o} = x_i \pm \sqrt{m}$$

nos darán *dos puntos dobles* ó *ninguno,* segun sean *reales des-*

iguales ó *imaginarios*, es decir, segun que $m > o$ [involucion de primer género *(fig. 91)*] ó $m < o$ [involucion de segundo género *(fig. 92)*]: en el primer caso, se ve por el signo $\pm$ que los dos puntos dobles d y d_1 que existen *realmente*, están á uno y otro lado del centro I, y á igual distancia de él. En este caso se ve tambien que cada dos puntos conjugados recíprocos como h y h' *(fig. 91)* son *conjugados armónicos respecto á los puntos dobles* d *y* d_1, porque se tiene

$$Ih \cdot Ih' = m = \overline{Id}^2$$

que era la propiedad característica de la relacion armónica.

En la ecuacion $xx' = m$, podemos seguir con suma facilidad las posiciones relativas (respecto á I) de los puntos conjugados de una involucion:

Primer caso (fig. 93).—En la involucion *de primer género* si imaginamos que un punto h recorra por ley de continuidad la recta indefinida de izquierda á derecha, pasando sucesivamente por los puntos

$$\ldots d_1 \ldots I \ldots d \ldots;$$

veremos á su conjugado h' salir del punto I moviéndose hácia la izquierda, cruzarse con h en el punto doble d_1, seguir su camino y llegar al infinito cuando el h llegue á I; venir despues del infinito á la derecha moviéndose de derecha á izquierda, cruzarse nuevamente con el h en el otro punto doble d y llegar finalmente á su punto de partida I, cuando h llegue al infinito. Como vemos, no es más que la imágen conocida de los conjugados armónicos respecto de los puntos fijos d y d_1, como habiamos hecho notar ya. Es conveniente observar que dos segmentos son *exteriores* (como hh' y kk'), ó *interior uno á otro* (como hh' y tt').

Segundo caso (fig. 94).—En la involucion *de segundo género*, imaginando lo mismo que ántes el movimiento del punto h, veremos á su conjugado h' salir del punto I, moviéndose hácia la

derecha y describir el segmento indefinido, llegando al infinito cuando el h llegue á I, y despues venir del infinito de la izquierda, describiendo el otro segmento indefinido, hasta I, mientras el h recorre el de la derecha hasta el infinito. Observemos que aquí dos segmentos hh' y kk', están siempre, *en parte superpuestos.*

Es evidente que la proyeccion de un sistema de puntos en involucion, es otro sistema de puntos en involucion, puesto que se trata de un caso particular de los sistemas homográficos, y estos son *proyectivos.* Pero debe notarse que, aunque siempre las proyecciones de dos puntos conjugados, son dos puntos conjugados de la proyeccion, y por consiguiente, las proyecciones de los puntos dobles son los puntos dobles de la proyeccion, la proyeccion del centro no es el centro de la proyeccion sino cuando es cilíndrica, porque en la cónica la proyeccion del centro es conjugado con un punto que no está en el infinito.

Métodos gráficos.—Hagamos primeramente una *observacion general:*

Si consideramos el conjunto de circunferencias que tengan la cuerda comun AB *(fig. 95),* y trazamos rectas cualesquiera R, R', R'', R''',... que las corten y no sean paralelas á la cuerda comun, los puntos de interseccion de una cualquiera de dichas rectas con las circunferencias están *en involucion,* cuyo centro será siempre el punto de encuentro de las rectas con la secante comun SS'. En efecto:

1.° Si la recta corta á SS' en un punto I, fuera del segmento AB (como la R, por ejemplo), este punto será exterior á todas las circunferencias; y si

$$h, h'; k, k'; \ldots$$

son los pares de puntos de interseccion con ellas (que estarán dos á dos á un mismo lado de I) se tiene

$$Ih \cdot Ih' = IA \cdot IB = Ik \cdot Ik' = \ldots.$$

lo cual prueba que dichos puntos están en *involucion de primer*

género, cuyo centro es I. Habrá dos circunferencias límites BAd y BAd_1 que serán las tangentes á la recta R (*), y si d y d_1 son los puntos de contacto de una y otra se tiene

$$IA \cdot IB = \overline{Id}^2 = \overline{Id_1}^2 = m$$

y los *puntos dobles* están en d y d_1.

2.° Si la recta corta á SS' en un punto dentro del segmento AB (como la R' ó la R'') el punto I ú O será interior á todas las circunferencias; y así

$$h, h'; k, k'; \ldots.$$

son los pares de puntos de interseccion con ellas (que estarán dos á dos á diferente lado de I), se tiene

$$Ih \cdot Ih' = IA \cdot IB = Ik \cdot Ik' = \ldots$$

lo cual prueba que dichos puntos están en *involucion de segundo género cuyo centro es* I (**). Siendo de signo contrario los segmentos Ih é Ih', m es *negativo* y *los puntos dobles son imaginarios:* en la figura se ve que

$$IA \cdot IB = -\overline{IM}^2 = m.$$

3.° Si la recta corta á SS' en el mismo punto A ó B (como la R''') no hay nada. Ser el punto I conjugado de todos los puntos de la recta, equivale á no serlo de ninguno: ya habiamos notado este caso de excepcion en el cual $m = 0$.

Examinados ya los casos que pueden presentarse en la *fig. 95* resolvamos *gráficamente* algunos problemas sencillos. No es necesario hacer nuevas figuras.

(*) Las circunferencias que teniendo su centro encima de O son menores que BAd no cortan ya á la recta R: tampoco la cortan las menores que BAd_1, que tienen su centro debajo de O.

(**) En la recta R'' la involucion podría mirarse como obtenida por los puntos en que descansan los lados de un ángulo recto hAh' que girase alrededor del vértice A.

PROBLEMA.

Dados dos pares de puntos conjugados h, h'; k, k' (fig. 95) en una recta determinar:

1.° *El centro de involucion.*

2.° *El conjugado de un punto cualquiera conocido.*

3.° *Los puntos dobles si los hay.*

Cuando los segmentos hh' y kk' son exteriores, ó interior uno á otro (como se ve en la recta R), la involucion dada es de primer género; y si los segmentos hh' y kk' están en parte superpuestos (como en la recta R'), la involucion dada es de segundo género. Pero el método gráfico para resolver el problema propuesto es siempre el mismo, y consiste en lo siguiente:

1.° Trazar dos circunferencias que se corten, una que pase por h y h', otra que pase por k y k'; hallar sus puntos de interseccion A y B, y el punto I en que la cuerda comun AB (prolongada ó no) corte á R ó á R' será *el centro pedido*, porque

$$\left.\begin{aligned} Ih \,.\, Ih' &= IA \,.\, IB \\ Ik \,.\, Ik' &= IA \,.\, IB \end{aligned}\right\} \text{de donde } Ih \,.\, Ih' = Ik \,.\, Ik'. \quad (*)$$

2.° Si el punto conocido es el p, por ejemplo, se traza una circunferencia por los tres puntos p, A, B y el segundo punto p' de interseccion con R ó R' será el *conjugado de p*, porque

$$Ip \,.\, Ip' = IA \,.\, IB.$$

3.° En la involución de la recta R', en que los segmentos hh', kk' están superpuestos, los puntos dobles son *imaginarios:* si se levantara la perpendicular IM á AB hasta cortar en M á la circunferencia cuyo diámetro es AB, se tendria

$$\overline{IM}^2 = IA \,.\, IB = Ih \,.\, Ih' = Ik \,.\, Ik'$$

(*) Cuando se dé un segmento interior á otro, podria suceder que resultara *la cuerda comun* AB *paralela á* R (lo cual ocurriria si los puntos h y h' equidistaran de k y k'), y entonces el centro de involucion estaria en el infinito, y no habria involucion propiamente dicha sino simplemente simetría con respecto al punto medio de hh'.

pero estos productos son *negativos* y por tanto IM es *imaginario*. En la involucion de la recta R, en que los segmentos son exteriores ó interior uno á otro, se traza la tangente I*t* á una cualquiera de las circunferencias, y llevándola á I*d* é Id_1, se tendrán *los dos puntos dobles:* ó se trazan las dos circunferencias que pasando por A y B sean tangentes á R, porque

$$\overline{Id}^2 = Ih \,.\, Ih' = IA \,.\, IB.$$

PROBLEMA.

Dado el centro de involucion I, *y un par h, h' de puntos conjugados, determinar:*

1.° *Otro par de puntos conjugados.*

2.° *Los puntos dobles si los hay.*

Tambien el método gráfico es el mismo, ya sea la involucion de primer género, ya de segundo, y consiste:

1.° En trazar una circunferencia cualquiera que pase por *h* y *h'*; despues trazar por el centro I una secante cualquiera IAB (ó una cuerda cualquiera AIB), y finalmente trazar por los puntos A y B otra circunferencia cualquiera AB*kk'* que dará en *k* y *k'* el otro *par de puntos conjugados*. Es claro que si se diera el *k* para buscar su conjugado *k'*, la circunferencia última estaria determinada por los tres puntos A, B, *k*.

2.° Solo hay puntos *dobles* cuando los del par dado están á un mismo lado del centro, y en este caso trazada la circunferencia cualquiera que pasa por *h* y *h'*, se construye la tangente I*t*, y se lleva á I*d* é Id_1.

Haces en involucion.

Considerando dos haces concurrentes en el mismo vértice, que sean *homográficos*, y en los cuales ocurra que si el conjugado de un radio A es A', el de este (mirado como del primer sistema) coincida con A, esos dos haces homográficos se dice

que están *en involucion;* y podrán considerarse *como un solo y único haz de radios conjugados recíprocos.* Al cortar un haz en involucion por una transversal cualquiera se tendrá evidentemente un sistema de puntos en involucion; por consiguiente, todas las propiedades de estos sistemas, que hemos estudiado para involuciones de primero y segundo género, son aplicables á los haces.

En la ecuacion general de homografía de dos haces que era

$$\frac{\alpha}{\delta'} + \frac{\epsilon}{\delta'} \text{tang } X + \frac{\gamma}{\delta} \text{tang } X' + \text{tang } X \,.\, \text{tang } X' = 0$$

los coeficientes $\frac{\epsilon}{\delta'}$ y $\frac{\gamma}{\delta}$ habrán de ser iguales cuando haya involucion y la *ecuacion general de involucion de haces* será

$$\frac{\alpha}{\delta'} + \frac{\epsilon}{\delta'} (\text{tang } X + \text{tang } X') + \text{tang } X \,.\, \text{tang } X' = 0.$$

No entraremos en más detalles, porque sería preciso hacer un estudio más detenido, si quisiéramos ver aquí *lo análogo* al centro de involucion.

PROBLEMAS SOBRE ÁREAS.

1.° *Construir un triángulo equivalente á un polígono dado (fig. 96).*

Quedaria resuelto el problema si se supiera construir un polígono equivalente al dado, y cuyo número de lados fuera menor en una unidad. Esto se consigue trazando una primera diagonal AC, por el vértice intermedio B la paralela á ella BM hasta cortar el lado DC (prolongado si fuera necesario), y uniendo A con M: se ve que los triángulos ACB y ACM son equivalentes, y que por tanto el polígono AMDE cumple con las condiciones dichas respecto del dado ABCDE. Si la primera diagonal que se trazara fuera exterior como la AD, la construccion no se modificaria.

2.° *Dividir una recta en dos segmentos que guarden entre sí la relacion de las áreas de dos polígonos dados (fig. 97).*

Conviene empezar por reducir los dos polígonos dados á cuadrados equivalentes; sean m^2 y n^2. Para tener dos rectas que guarden entre sí la relacion de las áreas m^2 y n^2, basta formar un ángulo recto A, llevar sobre sus lados las longitudes AM y AN respectivamente iguales á m y n, y bajar sobre la hipotenusa MN la perpendicular AP; porque se sabe que

$$\frac{PM}{PN} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

El problema queda ya reducido á dividir la recta dada en dos segmentos proporcionales á PM y PN, y esto puede hacerse por cualquiera de los métodos conocidos.

3.° *Sobre una recta dada como lado construir un rectángulo equivalente á un polígono dado (fig. 98).*

Empezaremos por reducir el polígono dado á un cuadrado equivalente; sea m^2. Si a es el lado conocido del rectángulo, debiendo ser

$$a \cdot x = m^2, \quad \text{será} \quad x = \frac{m^2}{a};$$

es decir, que la altura x del rectángulo será la tercera proporcional á a y m.

4.° *Construir un rectángulo de perímetro dado y cuya área sea equivalente á la de un polígono (fig. 99).*

Convertido el polígono dado en el cuadrado equivalente m^2, y tomada la mitad p del perímetro, se ve que el problema queda reducido á dividir este semi-perímetro en dos segmentos x é y tales que

$$x \cdot y = m^2$$

y esos segmentos serán las dimensiones del rectángulo. La construccion es sencilla: sobre p como diámetro constrúyase una semi-circunferencia, y trácese una paralela al diámetro que se halle de él á la distancia m. Si esta paralela corta á la circunferencia, bájese desde el punto de intersección la perpendicular al diámetro que la dividirá en los dos segmentos x é y.

La figura indica que si $m = \frac{p}{2}$ el rectángulo á que se llega es el cuadrado mismo m^2; y que si $m > \frac{p}{2}$ el problema no admite solucion.

5.° *Construir un polígono semejante á otro dado, conocida la relacion de las dos áreas (fig. 100).*

Si representamos por P el polígono dado y por X el que se busca, y se preparan dos rectas m y n que guarden entre sí la relacion conocida, se quiere que

$$\frac{X}{P} = \frac{m}{n};$$

y si representamos por x el lado del polígono X, homólogo de $AB = a$, se tiene

$$\frac{X}{P} = \frac{x^2}{a^2};$$

luego el lado x que se necesita para construir el polígono pedido debe satisfacer á la condicion

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}.$$

El teorema de la proporcionalidad entre los cuadrados de las cuerdas y sus proyecciones sobre el diámetro, permite determinar fácilmente el lado x. En la *fig. 100*, en que hemos supuesto la relacion $\frac{m}{n} < 1$, hemos empezado por determinar el punto H, de modo que

$$\frac{AH}{AB} = \frac{m}{n},$$

y la cuerda x, que tiene por proyeccion sobre el diámetro AB, es el lado que se busca. En la *fig. 100 bis*, en que la relacion $\frac{m}{n} > 1$, hemos empezado por determinar el punto B', tal que

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{m}{n},$$

y la cuerda x que tiene AB por proyeccion sobre el diámetro AB', es el lado que se busca, porque

$$\frac{x^2}{\overline{AB'}^2} = \frac{AB}{AB'} = \frac{n}{m},$$

y como

$$\frac{\overline{AB'}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{m^2}{n^2},$$

se deduce

$$\frac{x^2}{\overline{AB}^2} = \frac{m}{n}.$$

6.° *Dados dos polígonos, construir otro semejante al primero y cuya área esté con la del segundo en una relacion dada (fig. 101).*

Si llamamos P al primer polígono y Q al segundo; p^2 y q^2 á los cuadrados equivalentes á uno y otro respectivamente, y representamos por $\frac{m}{n}$ la relacion dada, se ve, en primer lugar, que el área del polígono pedido debe ser

$$X = \frac{m}{n} q^2;$$

luego la relacion de esta área y la del primer polígono deberá ser:

$$\frac{X}{P} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q^2}{p^2}.$$

En vista de esto, el lado x (homólogo de a), que se necesita para construir el polígono pedido como semejante al P, debe satisfacer *(problema 5.°)*, á la condicion

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q^2}{p^2}.$$

La construccion gráfica quedaria reducida á la de una cuarta proporcional

$$x_1 = \frac{a.q}{p}$$

si la relacion $\frac{m}{n}$ fuera 1, es decir si el polígono se quisiera *equivalente al* Q. En el caso general que hemos considerado, la determinacion del lado

$$x = \frac{aq}{p} \cdot \sqrt{\frac{m}{n}} = x_1 \cdot \sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{x_1 \times \frac{x_1 . m}{n}},$$

requiere:

1.° Una cuarta proporcional entre p, a, q para tener x_1;

2.° Otra cuarta proporcional entre n, m, x_1;

3.° Una media proporcional entre ellas.

El lector puede ejercitarse en hacer la figura.

7.° *Dado un polígono, construir otros en número determinado que le sean semejantes, cuyas áreas guarden entre sí la relacion de magnitudes conocidas, y cuya suma sea igual al área del polígono dado (fig. 101).*

Sea P el polígono dado, y q, r, s tres magnitudes conocidas: si a es un lado cualquiera del polígono P, sus homólogos x_1, x_2, x_3 en los polígonos X_1, X_2, X_3 que se quieren construir deberán cumplir con las condiciones siguientes:

$$\frac{X_1}{x_1^2} = \frac{X_2}{x_2^2} = \frac{X_3}{x_3^2} = \frac{P}{a^2};$$

de donde

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{P}{a^2}; \text{ y por tanto } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2.$$

Pero como segun la otra condicion del enunciado, debe tenerse

$$\frac{X_1}{q} = \frac{X_2}{r} = \frac{X_3}{s},$$

se deduce que

$$\frac{x_1^2}{q} = \frac{x_2^2}{r} = \frac{x_3^2}{s}.$$

En vista de esto, los lados x_1, x_2, x_3 que se buscan, pueden ser mirados como cuerdas en una semi-circunferencia que tenga por diámetro a, y cuyas proyecciones sobre este diámetro sean proporcionales á q, r, s. La construccion es la siguiente:

1.° Dividir el lado a en tres partes q', r', s' proporcionales á q, r, s;

2.° Llevar estos tres segmentos q', r', s' á partir de uno de los extremos A;

3.° Describir sobre a como diámetro una semi-circunferencia;

4.° Trazar las cuerdas x_1, x_2, x_3 que tienen por proyecciones respectivas q', r', s' á partir de A. Porque se ve en efecto, que

$$\frac{x_1^2}{q'} = \frac{x_2^2}{r'} = \frac{x_3^2}{s'} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{a} = a$$

y como

$$\frac{X_1}{x_1^2} = \frac{X_2}{x_2^2} = \frac{X_3}{x_3^2} = \frac{P}{a^2},$$

se tendrá

$$\frac{X_1}{q'} = \frac{X_2}{r'} = \frac{X_3}{s'} = \frac{P}{a} \text{ de donde } X_1 + X_2 + X_3 = P.$$

Además

$$\frac{q'}{q} = \frac{r'}{r} = \frac{s'}{s},$$

luego

$$\frac{X_1}{q} = \frac{X_2}{r} = \frac{X_3}{s}.$$

8.° *Transformar un triángulo en otro que tenga dos vértices en puntos dados y el tercero en una línea determinada.*

Este problema se resuelve empezando por construir una cuarta proporcional á la distancia que hay entre los dos vértices dados y á la base y altura del triángulo conocido. Si despues se traza una paralela á la recta que une los dos vértices cuya distancia á esta sea dicha cuarta proporcional, el tercer vértice del triángulo pedido estará en el punto de interseccion de esa paralela con la línea dada.

9.° *Dividir un triángulo en partes proporcionales á números ó líneas dadas por medio de rectas que partan de los vértices y converjan en un punto interior.*

La incógnita del problema es el punto interior que llamaremos O: sus distancias α, ε, γ á los tres lados a, b, c del trián-

gulo serán las alturas de los tres triángulos interiores; y por consiguiente, si los tres números ó líneas dadas son m, n, p, la condicion del enunciado se escribe así:

$$\frac{a \,.\, \alpha}{m} = \frac{b \,.\, \mathfrak{E}}{n} = \frac{c \,.\, \gamma}{p}.$$

Pero estas relaciones son tambien iguales á

$$\frac{a \,.\, \alpha + b \,.\, \mathfrak{E} + c \,.\, \gamma}{m + n + p} \text{ ó } \frac{a \,.\, h}{m + n + p} = \frac{b \,.\, k}{m + n + p}$$

llamando h y k respectivamente á las alturas del triángulo dado sobre a ó b como bases. Por consiguiente

$$\frac{a \,.\, \alpha}{m} = \frac{a \,.\, h}{m + n + p}, \text{ de donde } \alpha = \frac{m \,.\, h}{m + n + p};$$

$$\frac{b \,.\, \mathfrak{E}}{n} = \frac{b \,.\, k}{m + n + p}, \text{ de donde } \mathfrak{E} = \frac{n \,.\, k}{m + n + p};$$

y el punto O se encontrará en la interseccion de dos paralelas á los lados a y b á las distancias respectivas α y $\mathfrak{E}$, que se determinan por cuartas proporcionales.

10.° *Dividir un triángulo en partes proporcionales á líneas dadas por rectas trazadas desde un mismo vértice, ó por paralelas á sus lados.*

Para lo primero, basta evidentemente con dividir el lado opuesto al vértice que se considera, en partes proporcionales á las líneas dadas, y unir los puntos de division con dicho vértice.

Para lo segundo, conviene observar que si se trata de dividir el triángulo en cuatro partes, por ejemplo, proporcionales á m, n, p, q por paralelas al lado a, se pueden considerar tres triángulos semejantes al dado y con el vértice comun A, y que las relaciones de sus áreas con la del triángulo dado, deberán ser respectivamente

$$\frac{m}{m + n + p + q}, \quad \frac{m + n}{m + n + p + q}, \quad \frac{m + n + p}{m + n + p + q}.$$

Estamos, pues, en el problema 5.º—En la *fig. 102* están hechas las construcciones.

11.º *Dividir un trapecio en partes proporcionales á líneas ó números dados por rectas paralelas á las bases (fig. 103).*

Es evidente que sabremos resolver el problema si llegamos á conocer el modo de trazar una paralela á las bases, tal que uno de los trapecios parciales guarde con el total dado una relacion conocida. Fijémonos, pues, en esto: sean a, b las bases del trapecio dado; x la longitud de la paralela MN que buscamos; t y T respectivamente las áreas de los trapecios parcial y total ABMN y ABCD. Prolongando los lados no paralelos del trapecio hasta su encuentro en O, se ve que

$$\frac{OAB}{OCD} = \frac{a^2}{b^2},$$

de donde

$$\frac{OAB - OCD}{OAB} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad \text{ó bien} \quad \frac{T}{OAB} = \frac{a^2 - b^2}{a^2};$$

análogamente se ve que

$$\frac{OAB}{OMN} = \frac{a^2}{x^2},$$

de donde

$$\frac{OAB - OMN}{OAB} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}, \quad \text{ó bien} \quad \frac{t}{OAB} = \frac{a^2 - x^2}{a^2};$$

Dividiendo miembro á miembro se tiene

$$\frac{T}{t} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - x^2}.$$

Si la relacion conocida (que se quiere que exista) es

$$\frac{T}{t} = \frac{m + n}{m},$$

llegamos á

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - x^2} = \frac{m + n}{m}.$$

Pero $(a^2 - b^2)$ es el cuadrado de un cateto, que en la figura es BE, y que hemos obtenido llevando la CD paralelamente á sí misma hasta AB, y describiendo un arco de círculo desde A como centro: si imagináramos la misma construccion hecha con la paralela $MN = x$ que buscamos, concebiriamos otra cuerda BF tal que $\overline{BF}^2 = a^2 - x^2$, y entónces se deberia tener

$$\frac{\overline{BE}^2}{\overline{BF}^2} = \frac{m + n}{m}.$$

Pero proyectando las cuerdas BE y BF sobre el diámetro AB en BE′ y BF′, se tendria

$$\frac{\overline{BE}^2}{\overline{BF}^2} = \frac{BE'}{BF'};$$

por consiguiente

$$\frac{m + n}{m} = \frac{BE'}{BF'};$$

y vemos, en conclusion: que BF′ (de quien depende en definitiva la paralela que buscamos) es una *cuarta proporcional*.

La construccion es, pues:

1.° Llevar CD á la posicion de cuerda AE;
2.° Proyectar el punto E en E′;
3.° Construir la cuarta proporcional BF′,
4.° Levantar la proyectante F′F;
5.° Llevar la cuerda AF á su posicion de paralela MN á las bases del trapecio.

12.° *Conocida el área de un triángulo, y la relacion que guardan entre sí los tres lados, encontrar estos.*

Si los lados desconocidos a, b, c han de ser proporcionales á los tres números ó á las tres líneas m, n, q, se tiene

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{q}=\frac{2p}{m+n+q}=\frac{2(p-a)}{n+q-m}=$$
$$=\frac{2(p-b)}{m+q-n}=\frac{2(p-c)}{m+n-q};$$

y si para abreviar representamos por $2p'$ el número ó la línea conocida $(m+n+q)$, tendremos

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{q}=\frac{2p}{2p'}=\frac{2(p-a)}{2(p'-m)}=\frac{2(p-b)}{2(p'-n)}=\frac{2(p-c)}{2(p'-q)};$$

de donde

$$\frac{a^4}{m^4}=\frac{b^4}{n^4}=\frac{c^4}{q^4}=\frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p'\,(p'-m)\,(p'-n)\,(p'-q)}=$$
$$=\frac{d^4}{p'\,(p'-m)\,(p'-n)\,(p'-q)},$$

representando por d^2 el cuadrado equivalente al triángulo que se busca. De aquí es fácil sacar uno cualquiera de los tres lados: así, por ejemplo,

$$a=\frac{m.d}{\sqrt{\sqrt{p'(p'-m)}\times\sqrt{(p'-n)(p'-q)}}}=\frac{m.d}{\sqrt{h\times k}}=\frac{m.d}{r}.$$

Si m, n, q fueran líneas dadas, lo mismo que d, la construcción sería:

1.° Una media proporcional h entre p' y $(p'-m)$;

2.° Otra media proporcional k entre $(p'-n)$ y $(p'-q)$;

3.° Otra media proporcional r entre las dos anteriores;

4.° Una cuarta proporcional entre r, d, m nos daria a; hallándola entre r, d, n tendriamos b; y entre r, d, q sería c.

13.° *Dados varios polígonos semejantes, construir otro semejante y equivalente á su suma ó diferencia.*

Si representamos por P, P_1, P_2, P_3, P_4,... los polígonos semejantes dados, y por a, a_1, a_2, a_3, a_4,... lados homólogos de estos

polígonos, se ve fácilmente que si el polígono X que se quiere construir, ha de equivaler á

$$P + P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \ldots$$

su lado x, homólogo de a, a_1,..., habrá de determinarse por la condicion

$$x^2 = a^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \ldots =$$
$$(a^2 + a_1^2 + a_3^2 + \ldots) - (a_2^2 + a_4^2) + \ldots$$

Y las construcciones serán las siguientes:

1.° Construir un triángulo rectángulo sobre a y a_1 como catetos; otro sobre la hipotenusa hallada y a_3 como catetos, y así sucesivamente;

2.° Construir análogamente otra sucesion de triángulos rectángulos con a_2, a_4,...;

3.° Construir un triángulo rectángulo que tenga por hipotenusa la recta á que se llegue por la primera construccion y por cateto la recta obtenida por la segunda; el cateto de dicho triángulo es x.

14.° *Por un punto dado sobre el perímetro de un polígono trazar una recta que separe una parte equivalente á un polígono dado (fig. 104).*

Si O es el punto dado en el perímetro del polígono P, y el otro polígono dado lo hemos convertido en el triángulo MNP; empezaremos por ver la altura h á que se encuentra el punto O sobre el lado AB, y transformaremos el triángulo MNP en otro NO'Q, cuya altura sea igual á h. Hecho esto, bastaria llevar la base NQ de este triángulo á partir de A sobre AB, y unir O con el extremo G, si este extremo cayera dentro del lado AB. Si esto no sucede, sepárese la parte OBA y trazando por G la paralela GK á OB, tendriamos en OK la recta pedida, si el extremo K cayese dentro del lado BC. Si todavía no ocurre esto, sepárese la parte OCB y trácese por K la paralela KL á OC. Vemos ya en la figura el punto L caer dentro del lado CD, por lo cual la recta OL resuelve el problema. La demostracion es sencilla.

15.° *Describir un círculo cuya área esté con la de un círculo dado en una relacion conocida.*

Como este problema es en el fondo el mismo que el problema **5.°**, basta indicar aquí que el radio desconocido x habrá de satisfacer á la condicion

$$\frac{x^2}{r^2} = \frac{m}{n}.$$

Las construcciones de las *figuras 100* y *100 bis* (segun que $\frac{m}{n}$ sea menor ó mayor que 1) son aplicables; suponiendo que A B fuera el radio r.

16.° *Describir un círculo cuya área sea equivalente á la suma ó á la diferencia de las de dos círculos dados.*

Este problema es idéntico al problema **13.°**

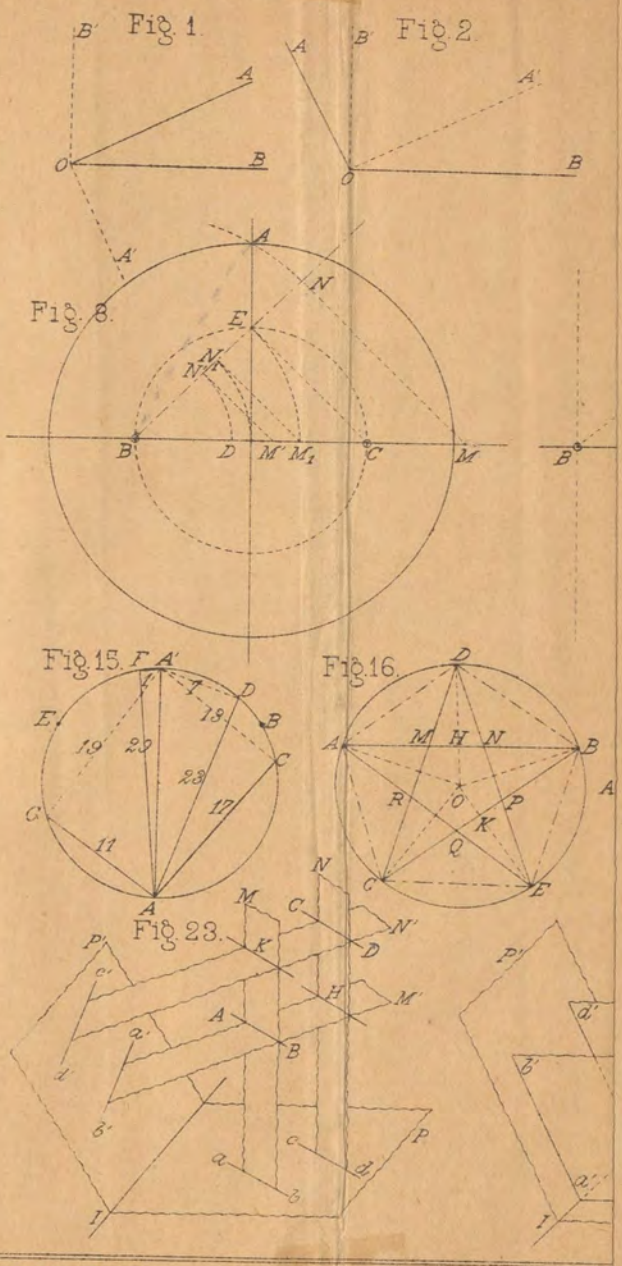
17.° *Dividir un círculo en partes proporcionales á líneas dadas por medio de radios ó de circunferencias concéntricas.*

Para lo primero, basta dividir la circunferencia en arcos proporcionales á las líneas dadas, lo cual puede hacerse gráficamente rectificando la circunferencia, dividiendo la recta obtenida en partes proporcionales á las líneas dadas, y colocando despues sobre la circunferencia los puntos de division; ó bien numéricamente dividiendo 360° en las partes proporcionales á las líneas dadas (que mediriamos con una escala), y haciendo luego uso del transportador para transportar á la circunferencia los números de grados obtenidos.

Para lo segundo, conviene observar (como en el problema **10.°**) que las áreas de los círculos concéntricos con el dado guardarán con el área de éste ciertas relaciones. Sean cuatro las partes; y m, n, p, q las líneas dadas: las relaciones de los círculos sucesivos con el dado serán respectivamente

$$\frac{m}{m+n+p+q}, \quad \frac{m+n}{m+n+p+q}, \quad \frac{m+n+p}{m+n+p+q}.$$

Y estamos en el mismo caso de la *fig. 102*, en la cual A fuera el centro de la circunferencia dada y AB su radio: las tres cuerdas que parten del centro A en esta figura, serian los radios de las tres circunferencias pedidas.



Lit. de M. Fernandez

Fig. 1

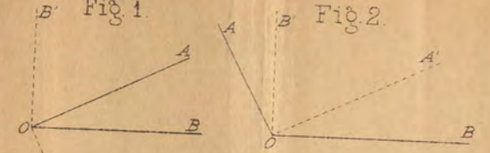


Fig. 2

Fig. 3

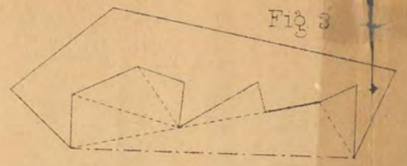


Fig. 4

Fig. 5.

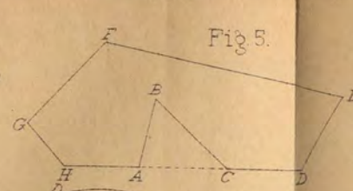


Fig. 6

Fig. 7.

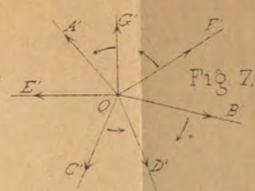


Fig. 8.

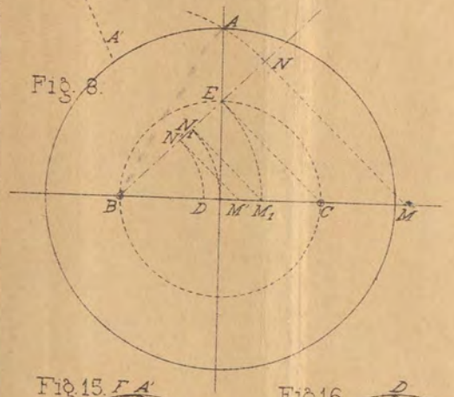


Fig. 9.

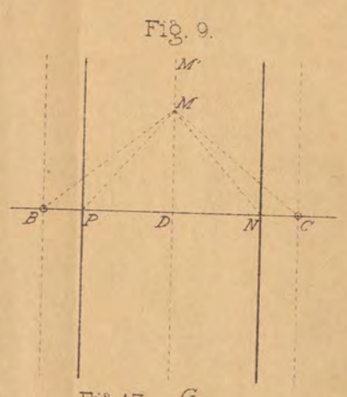


Fig. 10.

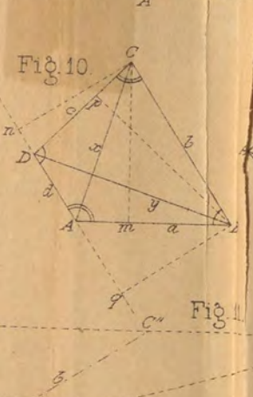


Fig. 12.

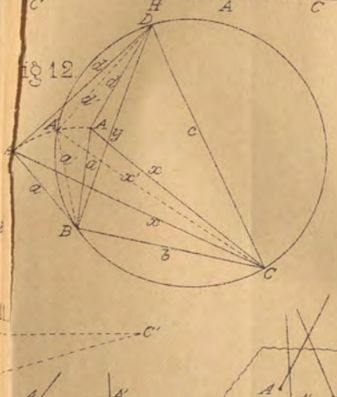


Fig. 13.

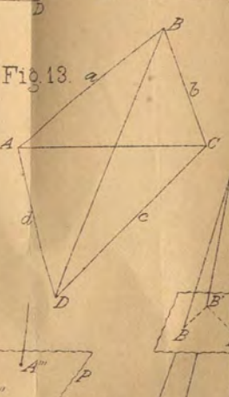


Fig. 14.

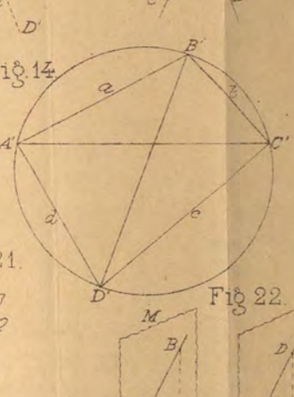


Fig. 11.

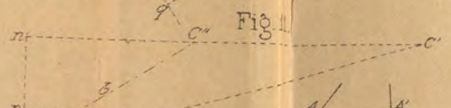


Fig. 15.

Fig. 16.

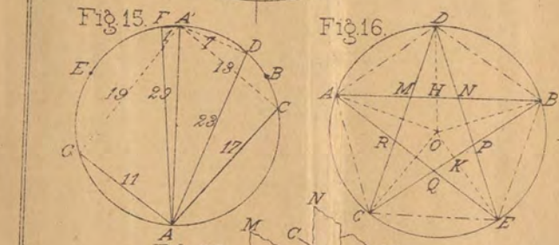


Fig. 17.

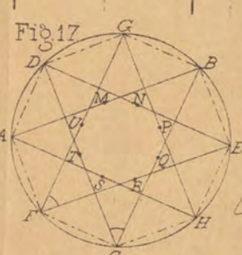


Fig. 18.

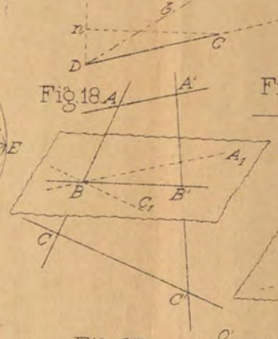


Fig. 19.

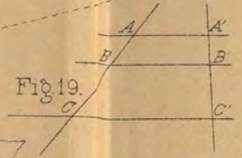


Fig. 20.

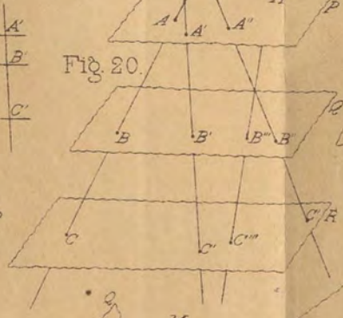


Fig. 21.

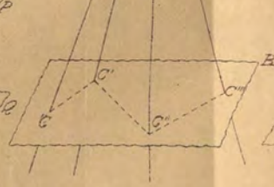


Fig. 22.

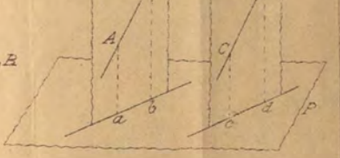


Fig. 23.

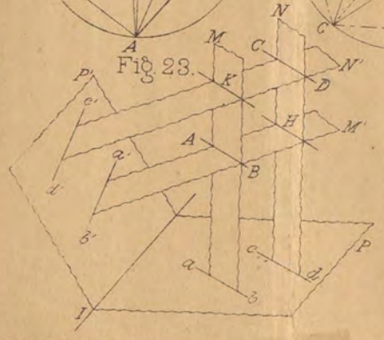


Fig. 24.

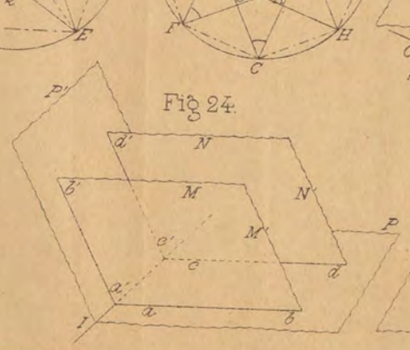


Fig. 25.

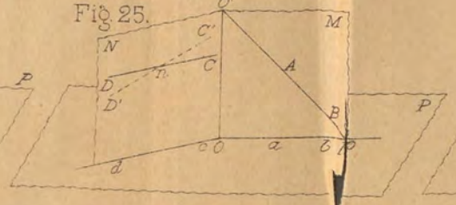


Fig. 26.

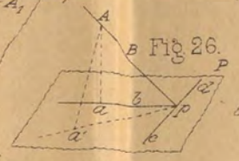


Fig. 27.

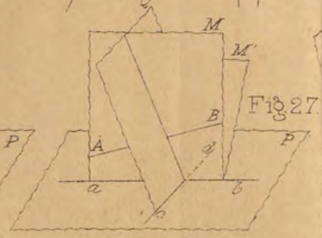


Fig. 28

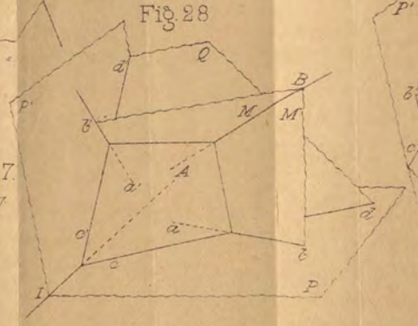
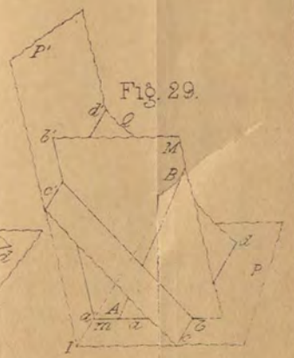


Fig. 29.



Lit. de M. Fernandez

J. Mendez. C.

Fig. 75.

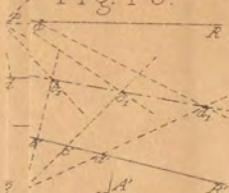


Fig. 76.

Fig. 77.

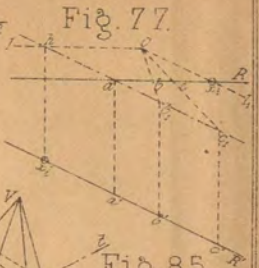


Fig. 84.

Fig. 85.

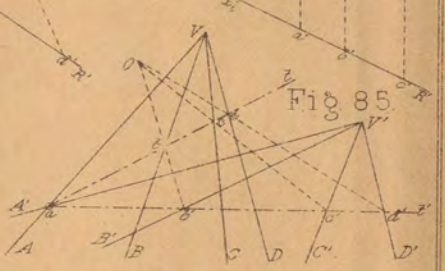


Fig. 100.

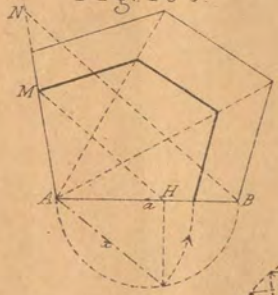


Fig. 100 (bis)

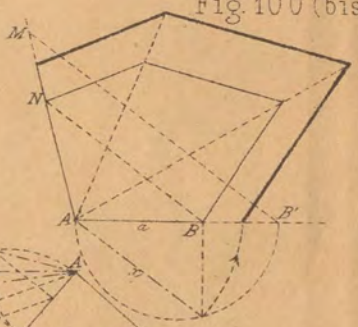


Fig. 102.

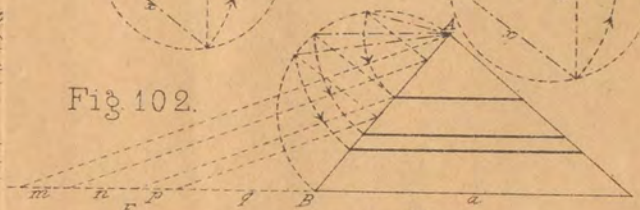


Fig. 104.

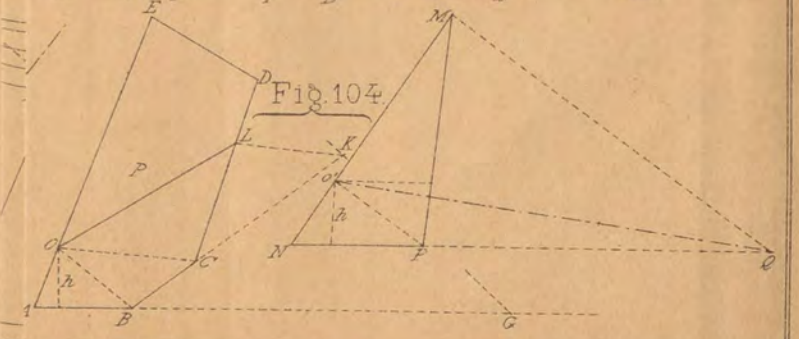


Fig. 68.

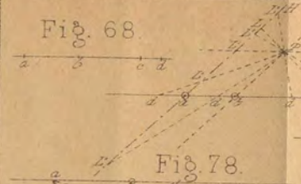


Fig. 69.

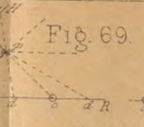


Fig. 70.

Fig. 71.

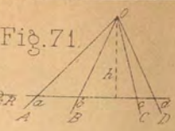


Fig. 72.

Fig. 73.

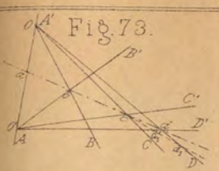


Fig. 74.

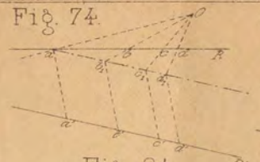


Fig. 75.

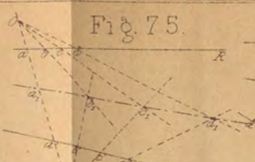


Fig. 76.

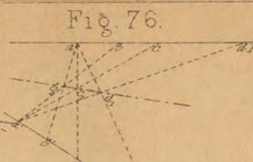


Fig. 77.

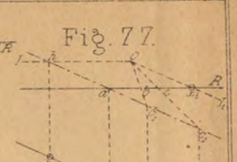


Fig. 78.

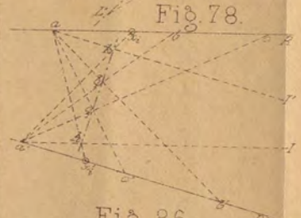


Fig. 79.

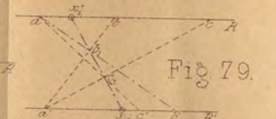


Fig. 80.

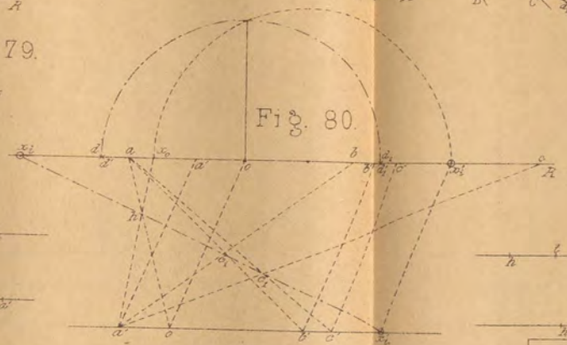


Fig. 81.

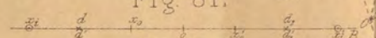


Fig. 82.

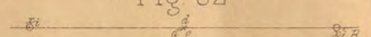


Fig. 83.

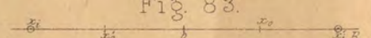


Fig. 84.

Fig. 85.

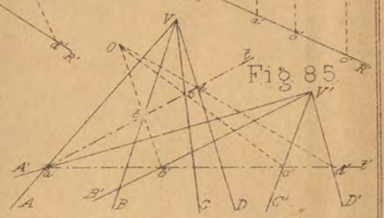


Fig. 86.

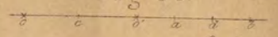


Fig. 87.

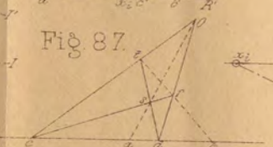


Fig. 88.

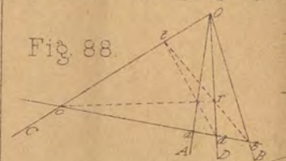


Fig. 89.

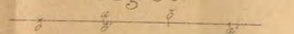


Fig. 90.

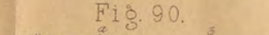


Fig. 91.

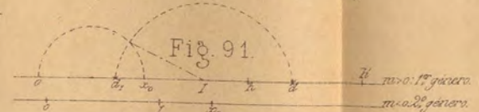


Fig. 93.

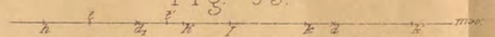


Fig. 94.

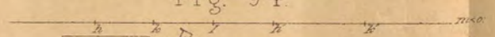


Fig. 95.

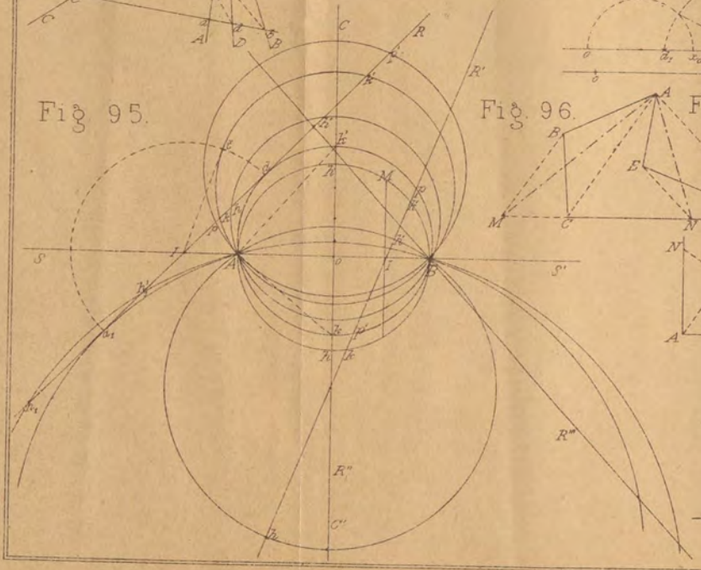


Fig. 96.

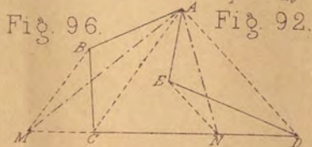


Fig. 92.

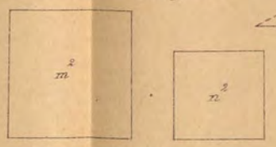


Fig. 97.

Fig. 98.

Fig. 99.

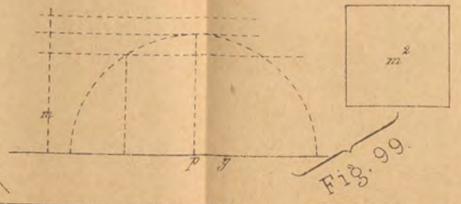


Fig. 101.

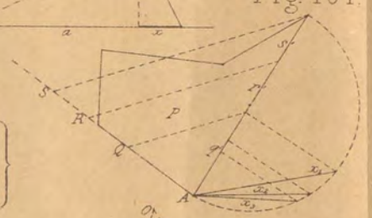


Fig. 103.

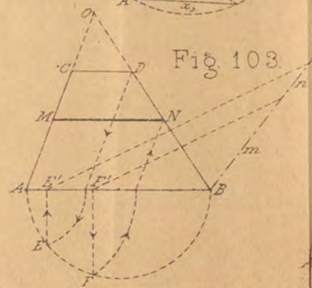


Fig. 100.

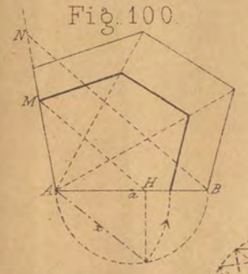


Fig. 100 (bis)

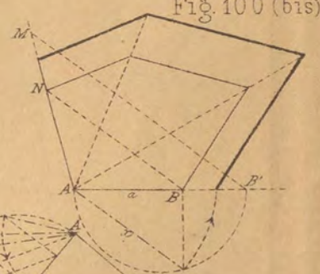


Fig. 102.

Fig. 104.

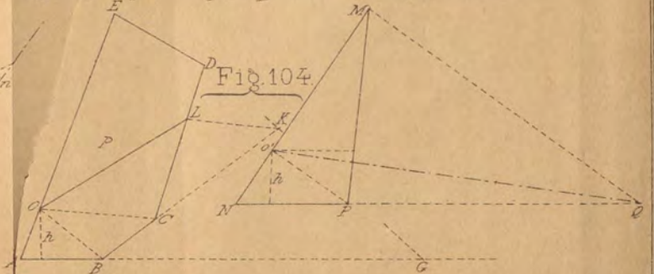


Fig. 30.

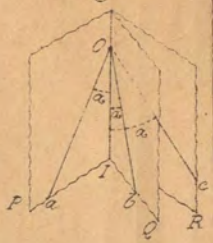


Fig. 36.

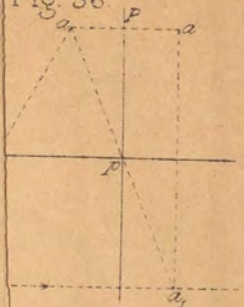


Fig. 37.

Fig. 46

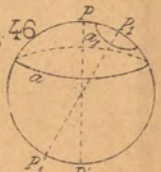


Fig. 47.

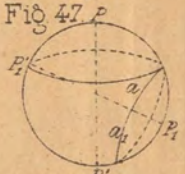


Fig. 57.

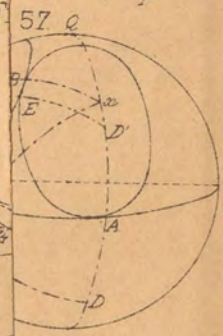


Fig. 48.

Fig. 58.

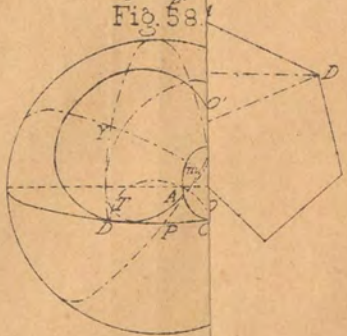


Fig. 30.

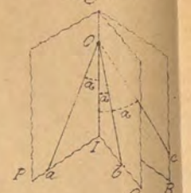


Fig. 31.

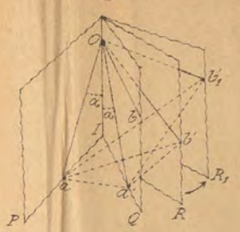


Fig. 32.

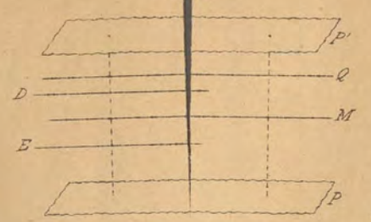


Fig. 33.

Fig. 34.

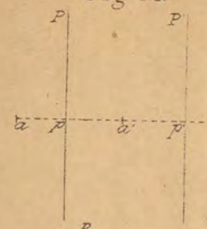


Fig. 35.

Fig. 36.

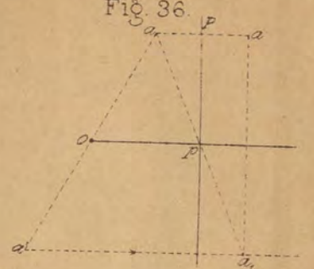


Fig. 37.

Fig. 38.

Fig. 39.

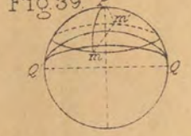


Fig. 40.

Fig. 41.

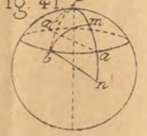


Fig. 42.

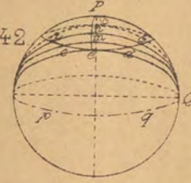


Fig. 43.

Fig. 44.

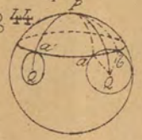


Fig. 45.

Fig. 46.

Fig. 47.

Fig. 49.

Fig. 50.

Fig. 51.

Fig. 52.

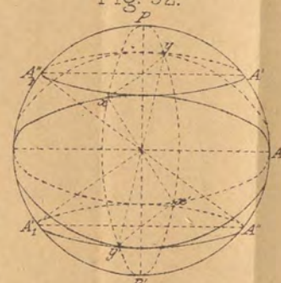


Fig. 53.

Fig. 54.

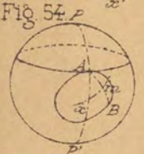


Fig. 55.

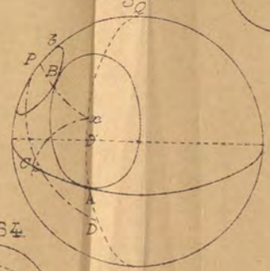


Fig. 56.

Fig. 57.

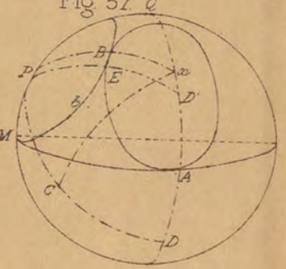


Fig. 48.

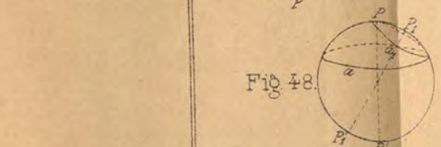


Fig. 58.

Fig. 59.

Fig. 60.

Fig. 61.

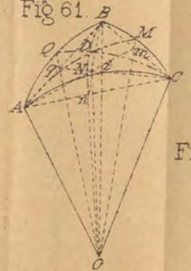


Fig. 62.

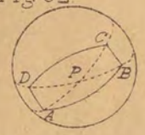


Fig. 63.

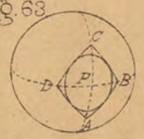


Fig. 64.

Fig. 65.

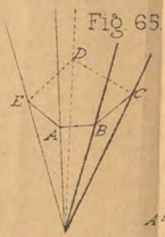


Fig. 66.

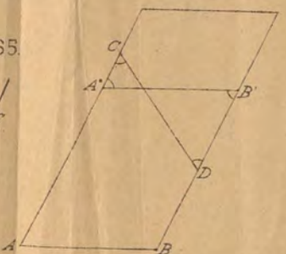


Fig. 67.