TOPOGRAFÍA

TEXTO



J B

RAFÍA

TO

1887 - ? APU

1859

# Escuela especial de Ingenieros

de

# Caminos, Canales y Puertos

## Apuntes de Topografía

Curso de 1886 - 87.

# Nociones generales.

El objeto de la Topografía es la representacion sobre un plano de una parte limitada de la superficie terrestre.

La forma de la tierra es aproximadamente la de una elipsoide de revolucion cuyo eje menor fuera la línea de los polos, que es al mismo tiempo el de rotacion. En Topografía se puede considerar á la tierra como una esfera cuyo circulo maximo tiene de circunferencia 40.000 Kilómetros ó sean 6.366.000 metros de rádio.

La superficie terrestre presenta multitud de líneas que dividiremos en naturales y artificiales; ó sean los rios, costas, thalwegs &ª por una parte, y por otra los caminos, canales, lindes, cercas &ª

La representacion sobre un plano de estas líneas y de las curvas de nivel, de que nos ocuparemos más adelante, constituye el plano topográfico del terreno.

Si se considera los accidentes que presenta la tierra en su superficie son muy pequeños con relacion á la magnitud del radio terres.

Como ya se sabe por Geologia la mayor altura de las montañas es de 9 kilómetros (Himalaya) cantidad despreciable frente de los 6.366.000 ~~kiló~~metros de rádio que mide la tierra.

Pero si se trata de una pequeña estension es preciso tener en cuenta las diferencias entre las alturas de sus diferentes puntos; de aquí nace la division de la Topografia en Planimetria y Altimetria ó espresion del relieve del terreno.

Se llaman superficies de nivel aquellas por las que se puede pasar de uno á otros de sus puntos sin subir ni bajar. Estas superficies son normales á un sistema de verticales y por lo tanto en Topografia se consideran como esféricas.

Desde luego se comprende que no siendo la superficie del terreno ni plana ni desarrollable, no puede representarse en su verdadera magnitud sobre un plano. Proy.

terrestre sobre una superficie de nivel próxima al terreno, y vamos á demostrar que esta proyeccion puede considerarse como hecha sobre un plano siempre que no se trate de extensiones muy considerables.

Si desde dos puntos de la superficie terrestre distantes entre sí 1° centesimal, se consideran dos verticales bajadas sobre dicha superficie de nivel, la proyeccion de la linea recta que une aquellos dos puntos puede considerarse como una linea recta. En efecto, sean dos puntos A y B (fig. 1.) situados en la superficie terrestre y proyectados en a y b por medio de las verticales Oa y Ob, sobre la superficie de nivel ab, que supondremos esférica. Por hipotesis el angulo AOB tiene por valor 1° centesimal. Vamos á demostrar que la cantidad cd es muy pequeña en relacion á la ab, es decir que la flecha cd del arco acb es sumamente pequeña con relacion á la longitud de la cuerda del mismo.

Tenemos que

$$cd = Ob \text{ sen. verso } dOb$$

y llamando R al radio Ob y reemplazando el valor númerico del angulo DOb será

$$cd = R \text{ sen. verso } 50'$$

Efectuando las operaciones tendremos

$$cd = 196.^{m}0728 \quad (1)$$

Para calcular ab observaremos que es el doble del seno del mismo arco, es decir

$$ab = 2R \text{ sen } 50'$$

que hechos los calculos vale

$$ab = 99.995.^{m}8548 \quad (2)$$

Dividiendo los valores (1) y (2) resulta

$$\frac{cd}{ab} = \frac{196.0728}{99.995.8548} = 0,0019.$$

lo que nos dice que cuando dos puntos A y B estan separados de tal modo que el arco ab que abrazan sus verticales es de 1º centesimal, este arco difiere muy poco de su cuerda y puede considerarse como una linea recta, siendo muy pequeño el error que se comete en esta sustitucion, con relacion á la magnitud del arco.

La diferencia entre la tangente y el arco que consideramos es además muy pequeña.

En efecto, la magnitud del arco de 50' centesimales en la esfera terrestre vale 50 Kilometros, luego tendremos

$ad = R$ arco $50' = 50.000$ metros.

$dm = R \operatorname{tg} 50' = 50.001,01$ metros

de donde $dm - ad = 1^m,01$ y por consiguiente la diferencia total entre $mn$ y $adb$ seria 2 metros aproximadamente.

Esto en cuanto se refiere á la Topografia que en Geodesia donde se consideran grandes estensiones de la superficie terrestre, veremos que no se puede aceptar esta aproximacion.

Si imaginamos una serie de puntos del terreno A, B, C, D.... (fig.ª 2.ª) situados de modo que los angulos AOB, BOC, COD.... sean menores que 1° centesimal, las proyecciones ab, bc, cd.... sobre la superficie de nivel cuyo centro es O, seran proximamente rectas y siendo los ángulos que tienen por aristas BO, CO.... iguales á los abc, bcd... resulta que podriemos considerar la linea abcd... como proyeccion sobre un plano de la ABCD....

No siendo conveniente representar una parte de la superficie terrestre en su tamaño natural hay que reducir todas las magnitudes en una relacion que se llama escala, de suerte que conservando los ángulos el mismo valor y reduciendo las distancias en una relacion dada, igual para todas, las figuras que obtengamos serán semejantes á las que se quiere representar.

Las magnitudes de las líneas del terreno se llaman _distancias naturales_ y las reducidas á escala se denominan _distancias gráficas_.

Llamemos L la distancia natural y l la gráfica correspondiente; la relacion $\frac{l}{L} = \frac{1}{M}$ es lo que determina la escala. De suerte que conocida la escala y dada una cualquiera de las líneas natural ó gráfica, podemos venir en conocimiento de la otra, como se vé facilmente

$$l = \frac{L}{M}; \quad L = l \cdot M.$$

No debe tomarse por escala un quebrado cualquiera, porque complicaria y alargaria las operaciones. Con objeto de facilitarlas se elige siempre un quebrado cuyo numerador es la unidad y el denominador un número digito seguido de ceros.

Las escalas se marcan en los planos topográficos de dos maneras. O bien escribiendo al pié del plano el quebrado que dá la relacion entre las magnitudes naturales y las gráficas, ó bien tomando sobre una linea recta magnitudes acotadas, que nos determinen desde luego las magnitudes gráficas correspondientes.

Las primeras reciben el nombre de <u>escalas numericas</u> y las otras se llaman <u>escalas gráficas</u>

Las escalas varian segun la extension del terreno que se quiere representar y el mayor ó menor detalle con que se construye el plano, como se puede ver en la siguiente relacion de las escalas empleadas en la redaccion de los proyectos de Obras públicas de España

## Proyectos de carreteras.

Plano general ------------------ $\frac{1}{50.000}$
Id de los trozos ---------------- $\frac{1}{5.000}$
Id de los id dificiles ---- $\frac{1}{2.500}$ ó $\frac{1}{500}$
Id de las travesias de pueblos --- $\frac{1}{1.000}$

## Proyectos de caminos de hierro.

Plano general ............ $\frac{1}{500.000}$ á $\frac{1}{100.000}$
Id de las secciones ............ $\frac{1}{10.000}$
Id de los pasos dificiles ............ $\frac{1}{5.000}$

## Proyectos de puentes.

Plano del rio ............ $\frac{1}{2.000}$

Siendo las desigualdades del terreno generalmente muy pequeñas comparadas con la estension horizontal, el mismo su representacion en un plano vertical como se hace en Geometria descriptiva resultaria muy confusa. Por esta razon se representa el relieve del terreno por medio de curvas de nivel ó secciones horizontales, las cuales tienen por otra parte la ventaja de dar á simple vista idea de la forma del terreno, y de su pendiente en cualquier sentido, suministrando un medio facil de determinar la cota de un punto situado fuera de ellas, y evitan la confusion que resultaria de escribir en el plano un gran número de cotas, puesto que una sola cota escrita en cada una de las curvas basta para indicar la altura de todos los puntos de la misma.

Las curvas de nivel deben estar bastante próximas para acusar todas las ondulaciones del terreno; pero su equidistancia no ha de ser tan pequeña, que resulte confusion en aquellos puntos del plano en que la pendiente sea considerable y los detall. planimétricos numerosos. Generalmente las mayores pendientes que hay que considerar en la práctica son las de 45° sexagesimales, y como para que dos curvas de nivel consecutivas se distingan bien en el plano una de otra, deben estar separadas por lo menos una cuarta parte de milímetro, ó sea $0^m{,}00025$; se suele adoptar esta dimension para límite inferior de la equidistancia gráfica en la representacion de terrenos muy accidentados y por consiguiente las equidistancias naturales que se expresan á continuacion

| | | |
|---|---|---|
| En la escala de | $\frac{1}{5.000}$ | $1^m{,}25$ |
| | $\frac{1}{10.000}$ | 2,50 |
| | $\frac{1}{20.000}$ | 5,00 |
| | $\frac{1}{40000}$ | 10.00 |

Cuando el terreno no es muy accidentado y se trata de representar en relieve con gran detalle, se adopta una equidistancia grafica inferior á $0,^m 00025$. — La equidistancia depende de las escalas del plano: con una equidistancia de $5,^m 00$ por ejemplo, conveniente para representar un terreno medianamente accidentado, en la escala de $\frac{1}{20000}$, resultarian las curvas de nivel demasiado proximas, si representara el mismo terreno en la escala de $\frac{1}{40.000}$.

# Planimetria

## Trazado y medicion de alineaciones.

Conocido el objeto de la Topografia, vamos á ver los procedimientos que se siguen para determinar las proyecciones horizontales de los puntos del terreno.

Cuando los puntos C, D . . . del terreno (fig 3ª) que se trata de proyectar, estan en un plano vertical AB, cuya traza ab es conocida en el plano de proyeccion bas-

la medir las distancias B C, B D...
&c.ª de las verticales C, D á la de B para
poder marcar en dicho plano las proyeccio-
nes c, d; &c.ª de aquellos puntos. Si los pun-
tos del terreno C, D... estan fuera de este
plano vertical A B (fig.ª 4.ª) se pueden
hallar las proyecciones horizontales c. d...
1.º Haciendo pasar por C, D... planos ver-
ticales perpendiculares al A B, hallando las
de este y aquellos planos y midiendo las distancias
intersecciones M y N á la de B, la de C á
de los verticales
M y la de D á N y con estos datos se pue-
den determinar en el plano horizontal las
proyecciones c y d de C y D. 2.º Haciendo
pasar planos verticales por los puntos A y C,
A y D... del terreno (fig.ª 5.ª) y midiendo
los angulos α y β que estos planos forman con el
AB y las distancia de la
~~con la~~ vertical del punto A á las de los
puntos C y D, con cuyos datos se pueden
marcar en el plano horizontal las pro-
yecciones c, d, &c.ª ó bien haciendo pasar
un plano vertical A C (fig.ª 6.ª) midiendo
el angulo α que forma con el A B y la distancia
de las verticales A y C; haciendo pasar otro plano tam-
bien vertical por C y D y midiendo el angulo β que
forma con el A C y la distancia entre las verticales

de C y D y así sucesivamente, con cuyos datos puede trazarse en el plano horizontal de proyección la figura a, b, c, d, e, ..que dá las proyecciónes. a, b, c, d, ... de los puntos del terreno B, C, D ... y 3º Midiendo la distancia de las verticales de los puntos A y B del terreno (figª 7ª); haciendo pasar un plano por las de C y A otro por las de C y B y midiendo los angulos $\alpha$ y $\alpha'$ de dichos planos con el vertical A B, y construyendo con estos datos en el plano horizontal de proyección el triangulo a, c, b, se tendrá el punto c proyección del punto C del terreno. Del mismo modo pueden obtenerse las proyecciónes horizontales d, e ... de los puntos D E ... Los angulos pueden trazarse en el plano por medio de un transportactor y las distancias se toman por medio de la escala.

Cuando se da un punto R y una dirección fija HH', E (figª 8ª) se hace pasar por H y R el plano vertical H R y se mide el angulo $\alpha$ y la distancia H R. Si hay puntos muy distantes del primero (figª 9ª) se repite la operación para S desde R, por medio de los planos R H'' y R S, hallando el ángulo $\alpha$ y la distancia entre las verticales de R y S.

Vemos pues que para efectuar todas estas operaciónes topograficas es necesario 1º Hacer pasar

planos verticales por los puntos del terreno.
2°. Medir distancias.
Y 3°. Medir ángulos.

## Trazado de alineaciones.

Se llama alineacion el plano vertical que pasa por dos puntos del terreno. Este plano vertical corta el terreno segun una curva. Conviene no confundir las palabras alineacion y linea recta, pues que los puntos del terreno situados en una misma alineacion pertenecen en general á una curva plana.

El medio mas sencillo de marcar la alineacion determinada por dos puntos del terreno, es colocar en ellos jalones ó banderolas. Un jalon es un cilindro de madera de unos dos metros de altura y tres ó cuatro centímetros de diámetro; en la parte inferior tienen un regaton de hierro para clavarlos ó apoyarlos en el terreno. Los jalones no llevan nada en su parte superior, y las banderolas tienen un trapo ó bayeta de color fuerte, generalmente rojo, para que se distingan en el campo.

Se ofrece algunas veces la necesidad de determinar puntos intermedios en una alineacion; para conseguirlo no hay mas que hacer colocar un jalon en un punto tal como m (fig.ª 10) intermedio entre a y b, y un observador colocado detras del jalon a, a', y mirando segun la direccion a', b', hace que el peon obedeciendo á sus indicaciónes, coloque despues de varios tanteos el jalon en c, de manera que quede oculto por el a,.

Si se quisiera determinar un punto situado en la alineación, pero fuera de los puntos a, y b. (fig.ª 11), es decir, si se quisiera prolongar la alineación se haría exactamente lo mismo, observando desde a, si el jalon m, en las diversas posiciónes que le colocase el peon, queda ó no oculto por el jalon a, al mirar en direccion al b.

Lo espuesto es lo que se hace cuando se ven los dos puntos extremos a y b, de la alineacion, pero puede tambien darse el caso de que esto no suceda, y entonces hay que seguir otro procedimiento. Sean a-a' y b-b' (fig.ª 12) los dos jalones de los puntos estremos de la alineacion a b, y supongamos que una eminencia del terreno impide ver simultáneamente estos jalones. Se colocan los peones en m y n de tal manera que cada uno de ellos vea los dos jalones a y b; el observador que está en a, y que verá como acabamos de decir los dos jalones m y n, hace que el m venga á estar en la alineacion a n en el punto m, por ejemplo. Despues desde b otro observador hace que el peon que está en n, coloque el jalon que lleva en n en la direccion b m. Se hace así por varios tanteos alineando alternativamente desde a y desde b, hasta que esten colocados los jalones en los dos puntos c y d tales que uno de ellos, el c por ejemplo esté en la alineacion a d al mismo tiempo que d se halle en la b c. Conseguido se está ya en los casos anteriores y se pueden hallar puntos intermedios ó prolongar la alineacion.

Para hallar la interseccion de dos alineaciones a b y c d (fig.ª 13) se coloca un jalon en una de ellas, por ejemplo en f, como ya hemos dicho y se la hace mover despues hasta que esté en la alineacion c d sin salir de la a b.

Este sistema tan sencillo está expuesto á herrores porque si suponemos que sea o el punto de vista hay muchas posiciones (f.ª 14) todas las comprendidas en el angulo m o n en que el jalon a, cubre el jalon intermedio y esta sin embargo no está en la alineación. Por esto conviene colocar el punto de vista en uno de los planos a b tangentes á la vertical exteriormente á los dos jalones ó banderolas.

## Medición de distancias.

Los instrumentos que sirven para medir distancias se llaman diastímetros; unos las miden directamente y otros las dan sin recorrerlas. Estudiaremos ahora los primeros que son: la cadena, la cinta y las reglas, y mas adelante los segundos.

Cadena - Este diastímetro (fig.ª 15) está formado por varillas ó eslabones de hierro iguales, cuyas extremidades se unen por anillas redondas. ~~Conse~~ La distancia entre los centros de dos anillas consecutivas es generalmente 2 decímetros y la longitud total de la cadena varía de 10 á 20 metros.

Las anillas 1, 2, 3 &.ª esto es, las que marcan metros son de latón y cada cinco metros hay medallas del mismo metal con los números 5, 10, 15 que indican el número de metros desde el 0. El último eslabón es mas corto y lleva una argolla para conducir la cadena.

Al instrumento que describimos se agrega un juego de 10 agujas también de hierro (figura 16)

Cada aguja tiene de longitud unos 3 decímetros, termina en punta por uno de sus extremos y por el otro en una pequeña anilla redonda. Cuando se trabaja en un prado ó tierras cultivadas en que las plantas no dejan ver con claridad las agujas, llevan estas atado á la anilla un trozo de bayeta de color fuerte para que se puedan distinguir bien.

Antes de emplear la cadena es necesario comprobar si tiene la longitud exacta. Para hacerlo, en el zócalo de un edificio ó algun otro sitio análogo se traza una recta y con un metro se marcan los 10, 15 ó 20 metros que tenga la cadena la cual se compara con dicha distancia. Generalmente suele resultar mas larga y esto es natural, por que por efecto de las tensiónes que sufre los anillos se abren; para rectificarla se cierran estos por medio de un martillo. Algunas veces resulta mas corta y es porque alguno de los eslabones está doblado, lo que se remedia del mismo modo.

En la medicion con la cadena pueden suceder dos casos, segun que el terreno tenga poca pendiente y sea casi horizontal ó que sea muy inclinado; la medicion en estos dos casos se hace de distinta manera, como vamos á ver.

1º. Terreno poco inclinado ó casi horizontal

Sean a y b (Figª. 17) los dos puntos extremos de una alineacion y nos proponemos medir la ~~mayor~~ distancia entre las verticales de estos dos puntos; sea a 1 la longitud de la cadena. El peon que está en a y lleva un extremo de la cadena cuida siempre de poner esta en la alineacion, para lo cual el peon que está en 1 con el otro extremo levanta un poco la cadena y la mueve á un lado y á otro hasta que el a vea que está en la alineacion; entonces hace seña al 1 que la baja, la estira y ~~clava~~ clava la aguja en su extremo. Se repite la operacion en los puntos 1 y 2 clavando las agujas el que vá delante y quitandolas el que vá detras; asi se continua hasta que se llega á la banderola b. Entonces se cuenta el número de agujas, se vé la medalla proxima á b (del lado de a) y se cuentan las anillas de laton comprendidas entre esta medalla y la banderola b, y los eslabones que hay entre la ultima anilla dorada y dicha banderola. Supongamos por ejemplo, que en la medicion a b hemos encontrado 3 agujas, la n-edad aproxima 5 metros, despues 3 anillas de laton, 2 eslabones desde la última y $\frac{3}{4}$ de un eslabon; la longitud medida será (suponiendo que la cadena tenga 20 metros)

$3 \times 20^m + 5^m + 3 \times 1^m + 2 \times 0^m,2 + 0^m,15 = 68^m,55.$

El cero debe llevarlo siempre el peon que vá detrás, para evitar una resta al medir la última fraccion de cadena.

Para medir con la cadena es necesario que se halle siempre en la misma alineacion, y por eso conviene que esta esté siempre bien marcada por jalones. Por esta misma razon cuando haya que medir la distancia entre dos puntos muy distantes, hay que marcar puntos intermedios.

## 2.º Terreno inclinado.

Supongamos que la distancia que se quiere hallar es la de las verticales A y b esto es la longitud a c (fig.ª 18). Si la inclinacion no es muy grande y tal que estando la cadena horizontal en A 1 no llega ni con mucho el extremo 1 á la altura de un hombre colocado en 1, entonces lo que se hace es lo siguiente; el peon que está en A alinea la cadena y cuida de ponerla horizontal en vez de dejarla caer sobre el terreno, por que asi resultaria con la inclinacion de este. Se repite esta operacion en los puntos 1 y 2 ... &c. clavando agujas como en el caso anterior, y con los mismos cuidados en cuanto á la medicion. Sumando al final los segmentos medidos a 1', 1.2', 2.3', 3.b' se tiene la longitud pedida.

Pero hay casos en que el terreno tiene mucha inclinacion, y no es posible hacer esto. Podria verificarse analogamente tomando mitades ó tercios de cadena, pero esto da lugar á muchos errores, sobre todo al tener que ponerla orizontal; y estos errores aumentan si las operaciones son numerosas, pudiendo hacerse considerables. En este caso se prefiere medir sobre el terreno la distancia inclinada D (fig.ª 19) y la horizontal $ca = d_h$ queda determinada cuando se conozca el angulo $\alpha$ por la espresion,

$$d_h = D \cos. \alpha$$

esto es lo que se llama reducir la distancia al horizonte ó hacer la reduccion al horizonte de la distancia D.

Pero sucede algunas veces que el angulo $\alpha$ toma valores muy pequeños y entonces es mas exacto calcular la diferencia $D - d_h$ del modo siguiente:

$$D - d_h = D - D \cos\alpha = D(1 - \cos.\alpha)$$

$$D-d_h = 2\ D\ \text{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha$$

Todo lo que antecede tiene aplicacion en el caso de que el terreno sea llano, pero cuando es accidentado en terminos que una sola recta a b (fig.ª 20) no se confunde ó no se aproxima al terreno, es necesario sustituirla por un número mayor de rectas como las a c, c d y d b. Estas distancias reducidas al horizonte y sumadas dan la misma distancia entre las verticales a y b.

Cintas.— Las cintas que se usan para medir distancias varian en sus dimensiones segun su naturaleza y el objeto á que se las destina: Iremos describiendolas sucesivamente.

Cintas de hierro.— Estas cintas suelen tener el mismo largo que las cadenas, su ancho es de unos dos centimetros. En el punto medio dela longitud dela cinta hay un rombo m de laton (fig.ª 21) y cuyas diagonales marcan por su encuentro dicho punto medio. Cada cinco metros tiene un circulo grande de laton, como el a y los metros estan marcados por otros mas pequeños como el b. Cada dos decimetros hay un pequeño taladro como los indicados con la letra c.

Las asas tienen tornillos t que sirven para hacer las correcciones de la longitud, y acanaladuras d para apoyarlas en las agujas.

Estas cintas se arrollan á uno, sobre lo que las hace muy cómodas para su trasporte.

Las cintas de hierro tienen sobre la cadena las ventajas de que no aumenta su longitud por la tension y de que la medicion horizontal se hace con mas exactitud colocandolas de canto pero ofrecen el inconveniente de romperse con facilidad al menor esfuerzo de tension.

El uso de las cintas de hierro en las mediciones es idéntico al de la cadena. Las demás cintas que vamos á describir se emplean generalmente para distancias pequeñas.

Cintas de acero ó de bolsillo. Son de un ancho de 5 á 10 milímetros, de muy poco espesor. Tienen marcada toda su longitud en centímetros y el primer decámetro próximo al 0 está dividido en milímetros.

Cintas de alambre. Estan formadas por un tegido especial; los hilos longitudinales son de alambre y la trama de hilo, por medio del aceite se hace inalterable á la humedad: Está dividida en centímetros y se arrolla en un rodete.

Cintas de hilo. Son como la anterior sin mas diferencia que todo el tegido está formado de hilo.

Reglas. Las que se usan en los trabajos topográficos son generalmente de pino de fibra recta, que es la madera mas invariable en sentido de su longitud y mas ligera. Estas reglas son de forma prismática terminando en sus estremos por casquillos de hierro; tienen de longitud 4 ó 5 metros y están divididas en metros y decímetros.

Para medir una alineacion son necesarias dos reglas, si se quiere hacer con mas rapidez y deben ir acompañadas de su correspondiente plomada. Sea la distancia de las verticales a y b la que queremos medir (fig.ª 22) El cero de una de las reglas en a se pone horizontal en la posicion a 1' y del estremo 1' se suspende la plomada 1'1. Entonces se coloca en 1 la otra regla, en la posicion 1.2' y se hace lo mismo que antes. Se continua así hasta b' donde se aprecia la distancia 4 b' que se agrega al número dado por la suma de las longitudes medida por un número exacto de reglas.

En lugar de plomadas se emplea tambien otra regla que se coloca verticalmente en los puntos 1' 2' &. Si las alturas 1.1', 2.2', &ª resultan mayores de dos metros, se podria hacer lo mismo, pero tomando una parte alicuota dela regla horizontal.

Escuadra de agrimensor. - Este instrumento es un cilindro de base circular ó un prisma recto octogonal sostenido por un baston. En dicho cilindro ó prisma hay dos alidadas, cada una de las cuales consiste en una abertura rectangular con una cerda en sentido delas generatrices ó aristas y otra abertura muy estrecha diametralmente opuesta á cada cerda. Cuando al mirar por una de estas aberturas se vé un punto del terreno ó de una banderola &c. oculto por la cerda opuesta este punto se halla situado en el plano determinado por dicha cerda y abertura, y si estas son verticales el punto se halla en el plano vertical determinado por ellas y por consiguiente el plano que pasa por el punto indicado y por la vertical del punto del terreno en que se apoya el baston es vertical. Las dos alidadas de que se acaba de tratar estan en la parte superior del cilindro ó prisma. En la parte inferior hay otras dos alidadas; pero dispuestas de modo que las cerdas de estas estan en prolongacion de las aberturas estrechas de las dela parte superior y sus aberturas estrechas en

prolongacion, tambien delas cerdas superiores.
De este modo las alidadas superiores é inferiores determinan dos planos, que deben ser perpendiculares entre sí.

Para asegurarse de que así sucede, se establece la escuadra en un punto m (fig.ª 24) de modo que el baston sea vertical y se hace colocar una banderola en cada uno delos puntos a b c determinados por las alidadas.

Si los angulos c m a y c m b son rectos, cuando se haga girar la escuadra hasta que la cerda que ocultaba c oculte á b la que ocultaba á a ocultará á c. Si así no sucediese, habria que hacer uso dela escuadra del modo que despues se esplicará.

Supongamos primeramente que los angulos a m b y c m b son rectos, como generalmente sucede, y pasemos á resolver algunos problemas con la escuadra.

Por un punto dado m en una alineacion a b trazar un plano normal á esta (fig.ª 24).

Lo primero que se hace es poner la escuadra en el punto m de tal modo que una de sus alidadas se confunda con la al[illegible]eacion a b y despues por medio de las otras pínulas se hace colocar un jalon en c, por ejemplo, al cabo de varios tanteos hasta que quede oculto por la cerda. La alineacion m c quedará determinada por los dos jalones m y c.

Por un punto c esterior á una alineacion a b trazar un plano perpendicular á esta (fig.ª 25) Se coloca un jalon en c, se pone la escuadra en un punto m de la alineacion con la cual se habrá hecho confundir una de las alidadas. Se mira por la otra y se vé si el jalon queda oculto y esto se repite variando la posicion de la escuadra hasta tanto que se consiga esta ocultacion. Se coloca entonces un jalon en d, que junto con c determinará la alineacion pedida.

Con una escuadra oblicua pueden resolverse problemas análogos á los anteriores, como por ejemplo: trazar por un punto dado una alineacion que forme con otra dada el mismo angulo, que los planos diametrales de las pínulas de la escuadra. Es preciso tener cuidado de mirar siempre por un mismo ocular ó abertura estrecha, para que los angulos formados sean iguales á los que luego se forman en el plano. Para hacer esto hay que conocer el ángulo que forman entre si las dos alidadas; esto se consigue fijando la escuadra en un punto O (fig.ª 26) y colocando dos jalones a y b en la direccion de sus dos alidadas. Se toma despues sobre la alineacion O a una cierta magnitud, 15 metros por ejemplo, que estará representada por O m y lo mismo se hace en la O b; se mide la distancia m n y el problema está reducido á construir gráficamente ó resolver el triángulo m o n; así conoceremos el angulo x.

Con los instrumentos que hemos estudiado hay ya medio de levantar un plano de pequeñas dimensiones. Pueden presentarse los dos casos siguientes

1.er caso.= Supongamos que se trate de un terreno cuyo interior es accesible, por ejemplo una calle irregular, cuyo eje ó alineacion a b esté determinado y fijado por medio de los jalones a y b (fig.ª 27.) Por cada uno de los puntos m, n, p, q &.ª vertices de las plantas de los edificios se trazan alineaciones perpendiculares á a b, por medio de la escuadra. Se determina el punto $m_e$ pié de la perpendicular y se miden $a\,m_e$ y $m\,m_e$ por medio de la cadena ó la cinta. Se apuntan las magnitudes en un croquis, acotando todas las longitudes medidas al lado de las líneas que las representan, como se ve en la fig.ª 28. Las distancias de los puntos $m_c$, $p_e$, &. es preferible tomarlas siempre desde el origen, porque de este modo si hay algún error en la medición de una distancia sólo influye en el trozo correspondiente, mientras que si el medir $p_e$, $r_c$, por ejemplo se hiciera mal resultarían mal situados también los demás puntos de la derecha.

Del croquis se deduce desde luego el plano la escala de este depende de la magnitud gráfica con que deban aparecer los detalles.

Siguiendo este método vemos que es necesario trazar todas las perpendiculares con la escuadra. Esto invierte bastante tiempo, por los tanteos que exige, y no muy exacto, por lo cual se ha introducido la siguiente simplificación.

Supongamos una alineación a b (f.ª 29) y que se quiere determinar la posición de un punto c que dista de ella menos de 1e metros. Se tiende sobre a b la cadena con el 0 en a; en c se pone el 0 de una cinta, que se coloca á ojo perpendicular á a b y sin variar en ella la distancia c d y en la cadena la a d. Como la distancia es pequeña el error nunca es considerable.

Vamos a hacer una aplicacion de esta simplificacion al ejemplo anterior (fig.ª 27). Se establece la alineacion central a b y despues se trazan dos alineaciones auxiliares c d y ef que le sean paralelas; para lo cual se trazarán dos alineaciones perpendiculares c e y d f sobre las cuales se llevarán las distancias a c = b d y a c = b f; se usara para esto la escuadra si son mayores de 25 metros.

Despues con la cinta se van dirigiendo perpendiculares sobre la cadena tendida á lo largo de la alineacion auxiliar correspondiente, se mide para cada punto, si por ejemplo, la perpendicular r h y la distancia h c al origen. Se hace el croquis del mismo modo que antes empezando por dibujar las alineaciones auxiliares y acotar sus distancias a la principal.

Vemos pues que en lugar de hacer todos los tanteos con la escuadra, se suprimen muchos de ellos, y no se usa mas que en todo caso para establecer las alineaciones auxiliares.

2.º Caso.- Sea ahora una figura cuyo

interior sea inaccesible en la cual no se puede tomar la alineación principal interiormente, por ejemplo una laguna (fig.ª 30). Se toman dos alineaciónes perpendiculares OX y OY, y se eligen varios puntos sobre la curva; la escuadra se trasporta sin salir de las alineaciónes escogidas y los diferentes puntos a, b, c, &.ª se determinan de varias maneras. Se coloca la escuadra sobre OY, ~~[illegible]~~ se dispone una alidada en la misma alineación y por medio de tanteos se coloca en $a_y$ viendose a por la otra alidada; Se miden $Oa_y$ y $a\,a_y$ y se conoce la posición del punto a. Lo mismo se haria para los puntos m y n; pero los b, c, d &.ª situados a la derecha de a ~~tales como b, c, d, &.ª~~ como las perpendiculares $bb_y$ &.ª caerian en la zona inaccesible, se refieren al otro eje OX ~~y se hacen en ellos las mismas operaciónes~~ de modo que quedan definidos por sus coordenadas $Ob_x$ y $b_xb$, $Oc_x$ y $c_xc$ &.ª. Vemos que de todos modos es necesario medir para cada eje las abscisas y las ordenadas de todos los puntos, y como por otra parte hay punto para los cuales es imposible tomar ni el un eje ni el otro como los puntos p y q es preferible emplear otro método.

Consiste en medir todas las distancias sobre los ejes, es decir que se toman las coordenadas sin necesidad de sacar fuera de las alineaciones la cadena ó el diastímetro que se emplee. Para esto no hay mas que ir colocando por tanteos la escuadra en los puntos $n_x$, $m_x$, $a_x$... sobre el eje de la $x$ y ~~[illegible]~~ las distancias al origen $On_x$ $Om_x$, $Oa_x$... de cada uno de estos puntos; se repite lo mismo para el eje $OY$ y tendremos que en el plano cada punto estará determinado para sus dos coordenadas contadas segun los ejes.

Se puede levantar el plano de que se trataba con mas expediciones ~~[illegible]~~ rodeando el contorno por medio de alineaciones muy próximas á él y que formen entre si angulos diedros de 45°, 90°, y 135°... lo cual es posible cuando la escuadra tiene cuatro pínulas como las representadas en la fig.ª 31.

Las alineaciones deben satisfacer á la condicion de que se puedan trazar las alineaciones perpendiculares desde el mayor número de puntos del contorno sin el auxilio de la escuadra.

Sean 1+2, 2+3, 3+4... (Fig.ª 32) ~~las~~ dichas alineaciones ~~[illegible] por medio de la escuadra~~. Se mide su longitud con la cadena; despues se refieren á ellas los puntos a, b, c,... por perpendiculares trazadas y medidas con la cinta y cuando esto no se pueda ausiliandose de la escuadra y la cinta. Terminadas las operaciones se tendrán todos los datos necesarios para dibujar primeramente la proyeccion del ~~el~~ polígono ~~proyeccion~~ 1-2-3-4... y despues la ~~proyeccion~~ del contorno a, b, c, d,...

## Goniometros y Niveles.

Antes de proceder al estudio detallado de estos instrumentos, conviene estudiar separadamente las partes que le son comunes.

De estas ~~diversas partes comunes~~, hay varias cuyo objeto y disposicion se comprende inmediatamente á la vista de los instrumentos; tales son los trípodes, articulaciones mecanismos para fijar los instrumentos á los trípodes, los tornillos de presion ~~precision~~ y los de coincidencia. No es pues necesario que extienda aquí en su estudio, toda vez que como se acaba de decir, es mucho mas facil y breve hacerlo teniendo á la vista los instrumentos. Hay en cambio otras partes comunes cuyo estudio es muy importante; que son los anteojos considerados como instrumento de dirigir visuales, el nivel de aire y los nonius; de los cuales pasamos á ocuparnos.

## Anteojos.

Los que se emplean en topografia son de los llamados astronómicos y constan reducidos á su mayor sencillez de dos lentes biconvexas. La primera (figª. 33) ó sea el objetivo produce la imagen real é invertida a b del objeto observado A B, imagen que se forma entre la segunda lente ó sea la ocular, y su foco, resultando una imagen virtual a' b' amplificada y ademas de otra parte esencial, que es el retículo, que está colocado entre el objetivo y el ocular de modo que en definitiva constan de tres partes: el objetivo, el retículo y el ocular, las cuales pasamos á describir sucesivamente.

El objetivo es una lente biconvexa (convergente, por lo tanto) y acromática; su objeto es, como hemos visto, representar en el interior del instrumento las imagenes de los objetos que se miren, para lo cual va siempre situado en un estremo del anteojo.

El retículo consiste en un anillo metálico al cual van fijos uno ó mas hilos. Ordinariamente no hay mas que dos, los cuales se cortan generalmente en angulo recto, aunque pueden formar un angulo cualquiera. Visto de frente el retículo consta de un anillo a con un reborde b, el circulo esterior de este anillo (figura 34) tiene un diametro menor que el del tubo c del anteojo; con el obgeto de que el anillo a pueda tener movimiento de traslacion en el plano de la seccion trasversal del tubo c. Para hacer variar la posicion del reticulo y fijarlo, una vez obtenida la que se desee hay 4 tornillos t colocados en las estremidades de los diámetros perpendiculares, ó bien se pueda adoptar otra disposicion que consiste en colocar en el estremo de cada diámetro un tornillo y un resorte en el opuesto; los tornillos deben tener sus tuercas practicadas en el reborde b y conviene que sus cabezas tengan forma poligonal y se muevan por medio de una llave, para evitar que se confundan con otros lo que podria dar lugar á error.

Generalmente los hilos del reticulo son de araña y tienen el inconveniente de romperse por efecto de la dilatacion del anillo ó de un choque brusco del anteojo. Para evitar este inconveniente, se usan en algunos instrumentos reticulos formados por una lamina de cristal en la que se marcan dos trazos perpendiculares entre si. Se suelen emplear tambien alambres de platino sumamente delgados; pero nunca son tan finos como los de araña.

El Ocular tiene por obgeto amplificar la imagen producida por el obgetivo, es decir, que es un verdadero microscopio. Está formado generalmente de dos lentes convergentes y terminado por un diafragma que tiene un pequeño orificio circular; cuyo centro se encuentra situado en el eje óptico de las lentes.

Los oculares son de dos clases; se llaman positivos aquellos en que la imágen $a''b''$ producida por ellos está fuera de las dos lentes (fig.ª 34); la lente $L$ dá la imagen virtual $a'b'$ de $ab$, que es a su vez amplificada por $L'$ en $a''b''$. Los oculares reciben el nombre de negativos ~~cuando~~ cuando la imagen $a''b''$ (fig.ª 36) está entre las dos lentes; pero estos son poco usados porque resulta mas complicada la disposicion del retículo que en los positivos. Los anteojos son de objetivo fijo ó de objetivo movible.

## Anteojos de obgetivo fijo.

El obgetivo esta situado en un estremo del tubo principal $T$ del anteojo (fig.ª 37) y en el otro estremo hay un tubo $T'$ que entra á enchufe dentro del mismo y que lleva en su interior el retículo $R$ con sus correspondientes tornillos. Por medio de este enchufe se puede alejar ó acercar el retículo al obgetivo, lo que se consigue bien á mano ó mas generalmente por una barra dentada y un piñon. A continuacion del retículo viene el ocular que está situado en otro tubo mas pequeño $t$ que entra tambien á enchufe en $T'$ lo que permite variar la distancia del ocular al obgetivo movimiento que se hace generalmente con la mano.

Vemos, en resumen, que en esta clase de anteojos se puede hacer variar la distancia del retículo al obgetivo y la del ocular al retículo.

## Anteojos de obgetivo movible.

Tienen la disposicion siguiente: ~~A~~ El obgetivo esta unido al estremo de un tubo T' (fig.ª 38) que enchufa con el principal, T del anteojos que es el que lleva el retículo. En este mismo tubo principal entra á enchufe otro t en el cual vá el ocular con la misma disposicion que anteriormente. En esta clase de anteojos el retículo es fijo y se pueden hacer variar las distancias de este al obgetivo y al ocular; la primera por medio de una barra dentada y la segunda á mano. De modo que cuando el obgetivo es fijo el retículo es movible y recíprocamente.

Descritos los anteojos pasemos á ver lo que se entiende por visual. Empezaremos por ocuparnos de los de obgetivo fijo y prescindiremos del ocular, que como ya hemos dicho no es mas que un microscopio destinado á amplificar la imagen real producida por el obgetivo.

## Anteojos de obgetivo fijo.

Se dice que se ha dirigido la visual á un punto, cuando la imagen de este punto aparece oculta por la interseccion de los hilos del retículo. Pero el retículo en los anteojos de que nos estamos ocupando tiene un movimiento de traslacion paralelo á las generatrices del cilindro interior del tubo, de modo que uno de los puntos, el de interseccion i de los hilos por ejemplo, describiera una recta m n (fig.ª 39) paralela á dichas generatrices.

Sea e e' el eje secundario paralelo á la recta m n y f el foco principal de este eje. Suponiendo fijo el anteojo, los puntos del espacio que quedarán ocultos por el punto i serán los de la recta $p\,a$ rayo refractado del incidente $m\,n$, y pueden ser sustituidos por $i$. En efecto, la imagen de cualquier punto $b$ situado fuera de $p\,a$, estará en una linea $p'\,b'$ paralela al eje secundario $b\,b'$ y no podrá quedar oculto por $i$ que está sugeto á la condicion de recorrer la linea $m\,n$ paralela á $p'\,b'$. La linea $p\,a$ se llama **visual** del anteojo. Todo punto cuya imagen aparece oculta por la interseccion de los hilos del retículo está situado en la visual del anteojo.

Veamos como se dirigen visuales por medio de los anteojos. Estos se hallan dispuestos en algunos instrumentos de topografía de modo que pueden girar al rededor de un eje vertical y tambien de otro horizontal. Por medio de estos movimientos se puede dirigir la visual á un jalon ó banderola vertical, una arista tambien vertical, de un edificio que es lo que generalmente se hace; esto se consigue con el giro horizontal al rededor del eje vertical, hasta tanto que uno de sus puntos quede oculto por la interseccion de los hilos. Cuando la visual se ha de dirigir á un punto determinado, por ejemplo, al pie del jalon, banderola ó arista de que se trata, y es perpendicular al eje horizontal, no hay mas que despues del primer movimiento, hacer girar el anteojo al rededor de dicho eje, hasta tanto que el punto se confunda con la interseccion de los hilos.

En otros instrumentos no estan tan libres los movimientos del anteojo que solo tiene un movimiento de rotacion horizontal; para dirigir visuales con ellos no se hace mas que la primera rotacion que hemos dicho.

La visual de un anteojo se puede colocar perpendicularmente à los ejes del instrumento. Supongamos que el eje es vertical y se proyecta (fig.ª 40) en E E'; sea i la interseccion de los hilos del reticulo; la visual será Rf. Ahora bien el reticulo, segun anteriormente se ha dicho, puede tener un movimiento de traslacion en su plano por medio de los tornillos correctivos. De modo que por medio de los tornillos t y t' podremos trasladar el punto i à i', con lo que se obtendrá otra visual R'f, correspondiente à esta nueva posicion. Observaremos que la inclinacion ha disminuido, aumentando el angulo agudo R m E' que forma con la vertical, que se habrá transformado en ~~R'm'~~ R'm' E' mayor que R m E', puesto que m'd es menor que m d y f d es constante. Continuando el movimiento el angulo R'm' E' podrá llegar à ser recto. La visual ha quedado perpendicular al eje vertical de modo que cuando gire al rededor de él describirá un plano horizontal. Dispuesta la visual de este modo, cuando veamos que un punto de un jalon del terreno está cubierto por la interseccion de los hilos del reticulo, podremos decir que dicho punto se halla en el plano horizontal descrito por la visual del anteojo.

Lo mismo se puede hacer con respecto à un eje horizontal H H' (fig.ª 41) moviendo los otros dos tornillos correctivos. Para demostrarlo basta hacer identicas reflexiones tomando la proyeccion horizontal del anteojo, como aparece en la figura.

Al hacer la visual perpendicular al eje de giro horizontal habremos realizado un plano vertical movil, puesto que seguirá siendo vertical al girar al rededor del ege vertical de rotacion.

Tambien se podrá colocar la visual de manera que sea paralela á un plano dado fijo de posicion, disponiendola de modo que sea perpendicular á una recta normal á dicho plano.

Vamos ahora á ver cual es el lugar geométrico de los puntos ocultos por una cerda. Se obtendrá trazando por los puntos de la cerda los rayos luminosos é incidentes (fig.ª 42). Siendo todos los rayos refractados m n, p q, r s ... paralelos entre si y partiendo todos de una linea recta, estan todos ellos contenidos en un plano y sus estremos n q s ... estarán tambien en linea recta. Para obtener los rayos incidentes habrá que unir el foco con estos últimos puntos y por lo tanto todos ellos vendran á estar sobre un mismo plano. Luego el lugar geométrico que buscamos es un plano definido por la cerda y el foco del obgetivo.

Hasta aqui hemos prescindido del ocular, cuyo obgeto es amplificar las imágenes producidas por el obgetivo segun hemos dicho. Para dirigir una visual á un punto hemos de mover el retículo hasta que la interseccion de sus hilos coincida con la imagen real del punto. Pero para que esto se pueda hacer es preciso que veamos con la mayor claridad, por medio del ocular, la imagen virtual del retículo y la del punto á que se dirige la visual, lo cual exige que los dos se hallen á la distancia de la vision distinta. Habrá pues que mover el ocular dentro del tubo del retículo hasta que la imagen virtual de los hilos se vea con entera claridad y despues mover retículo y ocular unidos hasta que veamos tambien la imagen virtual del punto con toda claridad; pero como hay una zona en que todos los objetos nos parecen tener la misma claridad, la igualdad de esta no es indicio seguro de la coincidencia de las imágenes. Por consiguiente para tener seguridad de que la interseccion i de los hilos del retículo coincide con la imagen real de un punto, hay que mover el ojo por los bordes del diafragma que lleva el ocular y ver si en todas las posiciones coinciden las imágenes virtuales de la interseccion de los hilos y del punto á que se dirige la visual. Prescindamos por un momento del ocular: si la imágen real del punto coincidiera con la interseccion i de los hilos del retículo (fig.ª 44) cualquiera que fuese la posicion del observador veria siempre la coincidencia; pero si la imagen estubiera en un punto a diferente de i habria una posicion O del observador para lo cual seria aparente la coincidencia de i con a; pero al desviarse de ella y colocarse en una cualquiera de las demás posiciones como O', por ejemplo, se veria que no coinciden los puntos á é i. Cuando esto sucede se dice que hay <u>paralage</u> y es necesario corregirle, lo que se consigue moviendo retículo y ocular unidos hasta que se vea que en todas las posiciones del ojo i coincida con a. Facilmente se vé que si a é i coinciden lo mismo sucederá á sus imágenes virtuales cuando se restablezca el ocular, y que por tanto cualquiera que sea la posicion del observador respecto al diafragma las verá en coincidencia.

El modo de manejar el ocular y el retículo para dirigir una visual con los anteojos de objetivo fijo es, en resumen el siguiente. Primero se mueve el ocular hasta tanto que los hilos se vean con claridad completa. Despues se mueven el retículo y el ocular juntos hasta que se vea tambien claramente la imagen del objeto, se observará si hay paralaje y caso de haberle se corrige por el movimiento del ocular.

Pasemos ahora á hacer un estudio análogo en los anteojos de objetivo movible. Sea un anteojo de esta clase reducido al objetivo y retículo (fig. 44); tracemos el eje secundario e e' paralelo á las generatrices del tubo; la visual del anteojo para la posicion l l' del objetivo será la línea m v. Si ahora hacemos mover el objetivo sin variar la posicion de los hilos del retículo, hasta que venga á l l', la visual será m' v'. Pero observemos que m' v' es paralela á m v, puesto que siendo el movimiento del objetivo un movimiento de traslacion f f' = m m', y lo mismo se habria verificado en todas las diferentes posiciones del objetivo. De aquí se deduce que en estos anteojos el lugar geométrico de los puntos del espacio que pueden ser ocultados por la interseccion de los hilos del retículo es una zona plana limitada por las dos visuales correspondientes á las dos posiciones estremas del movimiento del objetivo. Esto es lo que les diferencia de los anteriores en los cuales la visual es siempre una línea fija y constante cuando se mueve el retículo paralelamente al tubo.

Como las visuales correspondientes à las diferentes posiciones del objetivo son paralelas entre sí, colocada una de ellas perpendicularmente à uno de los ejes de rotacion del anteojo todas las demás serán perpendiculares à dicho eje. Asi cuando este sea el vertical todas serán horizontales; pero podrán no estar en un mismo plano horizontal. Generalmente en los anteojos el ángulo m f c es sumamente pequeño y por tanto la zona m m' v' v muy estrecha, de donde resultan inapreciables los errores de haber mas de una visual horizontal. Lo mismo puede decirse respecto del eje vertical. Bajo el punto de vista de que se trata son preferibles los anteojos de objetivo fijo.

Por análogas consideraciones à las expuestas al tratar de los anteojos de objetivo fijo y teniendo presente que en los de objetivo movil el retículo está invariablemente unido al tubo del del anteojo, se infiere, que para dirigir una visual à un punto habrá que colocar el ocular à la distancia conveniente del retículo para que la imagen virtual de este aparezca con la mayor claridad posible. Enseguida mover el objetivo hasta que se vea la imagen del punto tambien con su claridad maxima y examinar si hay paralage. Si lo hubiese se corregirá moviendo el objetivo.

# Nivel del aire

El nivel de aire es un tubo lleno de un liquido, pero dejando un pequeño espacio que vienen á ocuparle los vapores del liquido contenido y el aire.

La forma del tuvo es cilindrica en su parte esterior y ~~[illegible]~~ toral en la ~~interior~~ interior

Esta última se obtiene frotandole por medio de una barilla de acero con esmeril.

El liquido que se emplea no es el agua, por el inconveniente de que esta ~~liquido~~ al congelarse produciria la ruptura del tubo; asi suele ser el alcohol ó el eter. En la parte central del tubo hay varias señales, que constituyen el indice del nivel. El tubo del nivel está generalmente colocado dentro de ~~en~~ otro tubo metálico que le sirve de estuche y que en sus estremos tiene dos tornillos como A (figª. 46) o bien un tornillo A y una charneta B.

El objeto de los tornillos y la tuerca y de otros mecanismos análogos y fáciles de comprender á la vista de los instrumentos, es colocar el nivel en posiciones determinadas respecto á ejes ó planos como se verá despues. Se suelen designar con el nombre de niveles volantes, los que no estan unidos á los instrumentos y solo se colocan en ellos para practicar operaciones determinadas. Generalmente se usan para colocar horizontalmente los ejes de rotacion y entonces tienen en sus estremos dos ganchos ~~[illegible]~~ D(figª. 46) ó dos horquillas

B, según que se hayan de colocar debajo o encima de dichos ejes; ó bien se hallan dispuestos de una manera muy análoga.

Hemos dicho que el tubo contiene dos fluidos de distinta densidad, el de menor irá á ocupar la parte superior, y como la seccion longitudinal interior del tubo es circular, se detendrá en el punto en que la tangente á dicha seccion sea horizontal.

Para estudiar el nivel de aire supondremos: 1º. que el tubo se ha reducido á su seccion longitudinal interior; 2º. que la burbuja del nivel es un punto; y 3º. que el índice es otro punto situado en la misma seccion longitudinal del nivel.

Supongamos el nivel sobre una línea inclinada (figª. 47). Sea i el índice, la burbuja ocupará el punto mas alto b: quedará pues entre el índice i y la burbuja b un cierto arco, que se podrá hacer variar de magnitud, puesto que si se hace girar el tornillo de modo que el extremo del nivel contiguo a b baje, b dejará de ser el punto mas alto del tubo y lo será otro, que estará mas cerca de i, y recíprocamente. El mismo resultado obtenido por el giro del tornillo, se puede obtener por el movimiento de la regla.

Este arco i b es la medida del angulo formado por la tangente en el índice con la horizontal. En efecto este angulo es el m o b igual al que forman los radios de los puntos i y b el cual tiene por medida el arco <u>ib</u>

Se podrá pues aumentar ó disminuir el angulo <u>m o b</u>, que forma la tangente <u>m i</u> en el índice con la horizontal au-

aumentando ó disminuyendo el arco que le mide; así para que dicho ángulo se reduzca á la mitad, se moverá el tornillo ó tornillos del nivel hasta que la burbuja se coloque en el punto $b'$, equidistante de $i$ y $b$. Por el mismo procedimiento se podrá reducir el angulo $m\,o\,b$ á 0, en cuyo caso la tangente en el índice $i$ será horizontal.

Tambien se podrá resolver el problema de hacer que la tangente en el índice forme un ángulo de $n$ grados con la horizontal, para lo cual bastaria calcular el arco que mide este ángulo en la circunferencia cuyo radio sea igual al de curvatura del nivel y hacer que la distancia que separa á los puntos $b$ é $i$ sea igual á dicha magnitud.

Fundandonos en las consideraciones anteriores vamos á resolver ahora el problema que constituye la utilidad practica del nivel; que es hacer que la tangente en el indice sea paralela á una recta dada.

Si conocieramos el ángulo $\alpha$ que la recta (fig.ª 48) forma con la horizontal, el problema estaría reducido á colocar, por el procedimiento anterior, la tangente en el indice de modo que forme con la horizontal dicho ángulo $\alpha$. El valor de $\alpha$ se puede determinar por medio del nivel, sin necesidad de un goniómetro.

Para esto coloquemos el nivel sobre la recta (fig.ª 48), y hagamos girar á esta al rededor del eje $A$ hasta que la tangente en el indice sea horizontal, esto es, hasta que la burbuja y el indice coincidan como sucede en **N**. Hecho esto, demos al nivel una posicion **N'** simétrica de la primera, y resultará que la tangente i' seguirá formando con la recta $ad$ el mismo ángulo $\alpha$ que formaba en su primera posicion, puesto que el movimiento ha sido solo un giro; pero la burbuja se habrá separado de i' y habra ido à ocupar una posicion b' que será el punto de tangencia horizontal y la tangente b' n formará con $ad$ tambien el ángulo $\alpha$. Entre las dos tangentes y la recta se ha formado el triangulo $oc'n$, con los ángulos en c' y n iguales à $\alpha$, luego el angulo estremo $mon$ será igual à $2\alpha$, claro es que si reducimos esto ángulo à la mitad se habrá hecho igual à $\alpha$ es decir, la tangente en el indice será paralela à la recta, pero el ángulo $2\alpha$ se à medido por la magnitud i'b', luego para reducirlo à la mitad bastará que esta distancia se reduzca à la mitad, lo cual se efectua actuando sobre el tornillo del nivel.

En general no basta egecutar estas operaciones una sola vez para colocar la tangente paralela à la recta, y hay que repetirlas.

Una vez obtenido dicho resultado, se deja el nivel unido à la recta y cuando en lo sucesivo sea necesario colocarla horizontalmente, no habrá mas que hacerla girar hasta que la burbuja aparezca en el indice del nivel.

Para que pueda colocarse la tangente en el indice de un nivel paralelamente à una recta horizontal, es necesario que pueda variarse el angulo que la primera forma con la segunda y la inclinacion de esta.

Observaré que las operaciones necesarias para colocar la tangente en el indice del nivel paralelamente á la recta serian las mismas, si en lugar de estar dicha tangente en el plano vertical de la recta, estubiese en otro plano vertical paralelo á la misma recta.

Cuando el nivel está colgado ó es volante se consigue que su tangente sea paralela al eje, por el procedimiento antes indicado para una recta sobre la que puede colocarse el nivel.

Puede suceder, que practicadas las operaciones necesarias para que la tangente en el indice y el eje, sean paralelos horizontales, no queden dichas rectas en esta posicion si no en dos planos horizontales. Es facil en la practica distinguir estos dos casos, cuando el nivel puede girar al rededor del eje. En efecto, si este y la tangente de aquel son paralelos, la segunda no dejará de ser horizontal cuando se de un pequeño giro al nivel al rededor del eje, y por lo tanto la burbuja, durante este giro, permanecerá en el indice. Pero en otro caso, como la tangente describirá un hiperboloide de revolucion de una hoja, que solo tendrá en los limites del movimiento una generatriz horizontal, la burbuja se separará del indice. Cuando esto suceda habrá que colocar la tangente paralelamente al eje, y por esto algunos niveles tienen tornillos perpendiculares á los correctivos que movidos en sentido conveniente dan por resultado la constante coincidencia de la burbuja y el índice durante el giro ó sea el paralelismo de la tangente y el eje. Como por el movimiento de estos pueden alterarse algo los correctivos convendrá volver á comprobar si la burbuja y el índice coinciden en las dos posiciones simétricas del nivel.

Hecho esto se hace girar este al rededor del eje para ver si la burbuja permanece fija en el índice durante el giro, y así sucesivamente hasta que la burbuja no se separe del índice ni cuando se coloca el nivel en dos posiciones simétricas ni cuando se le hace girar al rededor del ege.

Para facilidad del estudio hemos supuesto la burbuja reducida á un punto. Además de la imposibilidad de conseguirlo, hay varias razones, por las cuales, no es conveniente que la burbuja sea escesivamente pequeña; como son: 1º. Que cualquiera desigualdad del tubo bastaría para detenerla ~~con~~ en su movimiento: 2º. Que la masa del tubo sería muy grande con respecto á la burbuja, y ejercería sobre esta una atraccion sensible; y 3º. Que cuando el líquido esperimentase una gran dilatacion podría estallar el tubo. Por todas estas razones se da á la burbuja una cierta estension en cuyo caso se dice que está en el índice, cuando con el coincide su punto medio. Para conocer si la burbuja ocupa esta posicion ó cuanto se separa de ella, van marcados en los tubos de los niveles por medio de tiaros, puntos equidistantes del indice el cual no aparece señalado en este caso.

Hemos visto ya como por medio del nivel se coloca una recta horizontalmente, vamos ahora á ver como se puede colocar tambien verticalmente una recta, que supondremos sea el eje de rotacion de un instrumento.

Describiremos primero las disposiciones en que generalmente se encuentran los ejes y los niveles en los instrumentos. El eje de rotacion vá unido á una articulacion que puede ser de tres ó de cuatro tornillos. La articulacion de cuatro tornillos consiste en un platillo horizontal que tiene tornillos en las extremidades de dos diámetros perpendiculares (figª. 49). Estos tornillos tienen su tuerca en dicho platillo é insisten sus extremos en otro inferior. Los dos platillos van unidos por medio de una articulacion que impide separarlos, es decir que hace invariable la distancia O'O" de los centros.

Si movemos un tornillo por ejemplo el T T' y en sentido contrario el que con él se corresponde $T_,T_,'$, el eje de rotacion E E' vá tomando inclinaciones diferentes; lo mismo sucederá con los otros dos tornillos t-t' y $t_,$-$t'_,$. Su objeto es pues, hacer que el eje tome diversas inclinaciones con relacion á la vertical, teniendo siempre un punto fijo O-O".

El otro mecanismo consiste en tres barras unidas al eje, y formando generalmente entre si un angulo de 120°. (figª. 50). En el extremo de cada barra hay un tornillo que tiene su tuerca en la misma barra y cuya estremidad insiste sobre un plano, que suele ser la meseta del tripode. A diferencia del caso anterior, hay un resorte en élice debajo de dicha meseta, que mantiene la punta de los tres tornillos constantemente sobre ella. Sucederá por lo tanto, que moviendo dichos tornillos irá variando de posicion el eje de rotacion respecto á la vertical.

Hay otras articulaciones que tienen mas ó menos analogia con las anteriores, y cuyo uso se comprende facilmente á la vista de los instrumentos, sabiendo que su objeto es hacer variable el ángulo que el eje forma con la vertical.

El nivel vá unido al eje de rotacion, no invariablemente si no que por medio de tornillos correctivos se puede hacer variar el ángulo que forman entre sí el eje y la tangente en el indice.

Sean OE y O'E' (figª 41) las proyecciones de un eje de rotacion sobre un plano horizontal, que podrá ser el platillo, inferior de la articulacion, y sobre un plano vertical paralelo al determinado por los puntos de apoyo de los tornillos TT, en dicho platillo; y supongamos que se ha hecho girar el nivel al rededor de OE, O'E' hasta que la tangente en el indice ha tomado la posicion pq - p'q' paralela al plano vertical de proyeccion. Si por un punto cualquiera a a' del eje OE-O'E' imaginamos una recta perpendicular á este eje paralela al plano vertical TT, su proyeccion horizontal mn será paralela á la linea de tierra y su proyeccion vertical m'n' perpendicular á O'E'. Como la tangente en el indice del nivel

$pq$, $p'q'$ se hallará en un plano vertical paralelo á la recta $mn$, $m'n'$; y como ademas se puede no solo hacer variar el ángulo de ambas rectas por medio de los tornillos correctivos del nivel, ~~y~~ ~~situar~~ ~~tomar~~ sino tambien situar la $mn$, $m'n'$ con diversas inclinaciones sobre el horizonte haciendo uso de los tornillos $TT$, de la articulacion; se podrá colocar la tangente $pq$, $p'q'$ paralelamente á la recta $mn$, $m'n'$ por el procedimiento anterior esplicado. Cuando $pq$, $p'q'$ tenga esta posicion, será perpendicular al eje $OE$, $O'E'$.

Por consiguiente, para colocar la tangente en el indice de un nivel perpendicularmente á un eje de rotacion $OE$, $O'E'$ se hará girar el nivel al rededor de dicho eje hasta que ~~á simple vista~~ sea paralelo al plano vertical determinado por los pies de los tornillos $TT$, de la articulacion, se llevará la burbuja del nivel al indice, haciendo uso de estos tornillos, se hará girar el nivel 180° al rededor del eje, y se reducirá la desviacion de la burbuja á la mitad por el movimiento de los tornillos correctivos del nivel. Despues se deberá comprobar la perpendicularidad de la tangente y el eje, para lo cual, haciendo otra vez uso de los mismos tornillos $TT$, de la articulacion se hará que la burbuja vuelva al indice y se dará al nivel un nuevo giro de 180°. Si hecho esto, la burbuja permanece en el indice, la tangente del nivel y será horizontal perpendicular al eje de rotacion. En el caso contrario habrá que reducir la desviacion de la burbuja á la mitad, por medio de los tornillos correctivos del nivel, y se continuará del mismo modo hasta que en dos posiciones inversas del nivel la burbuja permanezca en el indice. Entonces la tangente en este punto será perpendicular al eje, sus proyecciones seran $p, q, ' p', q'$; y dicho eje se hallará en un plano perpendicular á la tangente siendo sus proyecciones $OE_1, O'E'_1$. La proyeccion del mismo eje sobre un plano vertical y paralelo á $OE_1, O'E'_1$ será la recta $O''E''$ y la de la tangente en el indice $i''$.

Moviendo los tornillos $t\,t_1$ en el sentido conveniente se puede hacer que el eje de rotacion pase de la posicion $OE_1, O''E''$ á la vertical sin salir del plano vertical **M N**, que contiene los piés de dichos tornillos $t\,t_1$. Para conocer cuando llega el mencionado eje á su posicion vertical se coloca previamente la tangente en el indice del nivel en el plano **M N**, haciendole girar 90°. al rededor $OE\;O''E''$. Sus proyecciones despues de este giro seran $o\,i_1\;p''q''$ y la burbuja no coincidirá ya con el indice. Pero si se mueven el eje de rotacion y el nivel simultaneamente por medio de los tornillos $t\,t_1$ de la articulacion, cuando la burbuja coincida con el indice la tangente del nivel se hallará en la posicion $p''_1 q''_1$, $o\,i_1$ y será horizontal, y el eje tendrá por proyecciones $O\;O''E''_1$ y será vertical; porque se hallará en el plano vertical **M N** y en direccion perpendicular ha la tangente horizontal $o\,i_1\;p''_1 q''_1$.

De lo espuesto se deduce que para poder colocar verticalmente un eje por medio de un nivel, es necesario que la tangente en el indice de este sea perpendicular á dicho eje.

Obtenido este resultado y dejándo unido el nivel al eje, se consigue que este último sea vertical en cualquier otro punto á que se traslade el eje: colocando el nivel paralelamente al plano vertical determinado por los pies de los tornillos de la articulacion y moviendo esta hasta que la burbuja esté en el indice, situando el nivel enseguida paralelamente al plano que pasa por los estremos inferiores de los otros dos tornillos, y haciendo girar estos hasta que la burbuja vuelva nuevamente al indice.

Tambien se infiere de lo espuesto anteriormente, que para que pueda colocarse verticalmente un eje de rotacion por medio de un nivel de aire es necesario que sea variable por medio de tornillos correctivos el ángulo del eje y del nivel, que este pueda girar al rededor del eje y que tambien sea variable el ángulo que este último forma con la vertical.

En las consideraciones que preceden se supone que la tangente del nivel corta al eje, pero se vé facilmente que las operaciones necesarias para colocar dicha tangente perpendicularmente al eje son las mismas, aun cuando no se corten dichas rectas, puesto que las indicadas consideraciones son independientes de la distancia que media entre aquellas.

Para colocar verticalmente el eje cuando la articulacion tiene tres tornillos, se situan primeramente el nivel paralelamente al plano vertical de dos de ellos, y por su medio se lleva la burbuja del nivel al indice, se dá un giro de 90° al nivel y se vuelve á llevar en el indice la burbuja por medio del tercer tornillo de la articulacion.

## Sensibilidad de los niveles.

Supongamos varios niveles situados sobre un plano en una misma direccion. Si los niveles tienen diferente radio, al dar una pequeña inclinacion al plano por medio de un giro al rededor de una recta perpendicular á su comun direccion, las burbujas se desviarán de las posiciones que ocupaban arcos distintos en todos ellos. Se dice que es mas sensible aquel nivel en que la desviacion de la burbuja es mayor.

La sensibilidad de un nivel está indicada por la desviacion de la burbuja correspondiente á una inclinacion determinada y por consiguiente es tanto mayor cuanto mayor es su radio.

De aqui se deduce que el nivel mas sensible de todos es el cilindrico, puesto que siendo su radio infinito tambien lo seria la desviacion; pero se comprende que por pequeña que sea la inclinacion que se le dé al nivel, la burbuja se marchará al estremo del tubo. Un nivel cilindrico no puede dar las inclinaciones que dan los ordinarios y por lo tanto no sirve para colocar rectas horizontal ó verticalmente.

Sea (fig.ª 52) un nivel de radio R al cual se le ha dado una inclinacion $\alpha$ y llamemos $d$ á la desviacion i b de la burbuja, tendremos:

$$\frac{d}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360°}, \quad R = \frac{360°}{2\pi}\,\frac{d}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{360°}{2\pi}\,\frac{d}{R}$$

y haciendo la constante $\frac{360°}{2\pi} = c$ $\quad R = c\,\frac{d}{\alpha}\,(1) \quad \alpha = c\,\frac{d}{R}\,(2)$

Se puede dar idea de la sensibilidad del nivel por el radio R. Para determinar R no habrá mas que inclinar el nivel un angulo conocido $\alpha$ y medir la desviacion de la burbuja por medio de una escala ó de las mismas divisiones marcadas en el tubo.

Para esto se puede hacer uso del comprobador de niveles que se compone de una regla O M (fig.ª 53) la cual gira al rededor de un eje proyectado en O, y de otra regla ó circulo con la graduacion necesaria para medir $\alpha$. El nivel se coloca en la regla O M y despues se hace girar dicha regla hasta que tenga otra posicion tal como O M', en la cual se mide la desviacion de la burbuja y el angulo $\alpha$. Por la formula (1) se obtendrá R.

Generalmente se expresa la sensibilidad de los niveles por el valor del angulo $\alpha$ correspondiente á una desviacion de la burbuja igual á una division del tubo, ó en general á una desviacion determinada. El valor de $\alpha$ se halla por medio del comprobador, colocando el nivel sobre la regla, haciendo girar esta hasta que la burbuja recorra la desviacion dada y apreciando el angulo en la regla ó circulo. Supongamos que para una desviacion de 0.ᵐ 002 el valor $\alpha$

haya resultado ser 30", se dirá que la sensibilidad del nivel es de 30" por $0^m,003$.

## Nonius.

Tiene por objeto apreciar fracciones de la menor division de un limbo circular ó de una regla cualquiera.

Los nonius se dividen en **aditivos** y **sustractivos**; pero solo estudiaremos los primeros que son los exclusivamente usados en los aparatos modernos.

Supongamos una regla (fig.ª 54) dividida en un cierto número de partes iguales y que aprecia longitudes con un error menor que una de estas partes. Para llevar mas allá la operacion, se le adapta un nonius, el cual es otra regla de longitud igual á un número entero de divisiones de la primera dividida á su vez en un número de partes tambien iguales é igual á de divisiones de la regla que comprende mas una; de modo que si la longitud del nonius es n divisiones de la regla estará dividido en (n+1) partes.

Esto supuesto veamos como se aprecia por medio del nonius una fraccion de unidad de la regla. Sea esta A B (fig.ª 54) tomemos un cierto número de partes para longitud de la reglilla, 8 por ejemplo, y dividamosla en 9 partes iguales

Supongamos que se ha movido la reglilla hasta que su cero venga á parar en a (fig.ª 55); la distancia A a es igual á A b + b a. A b es un número entero de divisiones de la regla que —

podemos leer directamente. Para evaluar la fraccion $ba$, observemos cual de las divisiones del nonius coincide con otra de la regla, que en la fig.ª 54 es la 6.ª; y puesto que las divisiones de este son mas pequeñas que las de la regla, la division 5 del nonius estará á una distancia de la 9 de la regla igual á la diferencia $D-d$ entre una division $D$ de ésta y una del nonius $d$; la separacion entre la 4 y la 8 del nonius y regla respectivamente será igual á la diferencia entre dos divisiones de la regla y dos del nonius, es decir, $2D-2d=2(D-d)$. De la misma manera la separacion entre 3 y 7 es $3(D-d)$ y finalmente la separacion entre 0 y 4 ó sea $ab=6(D-d)$: por consiguiente para evaluar la longitud $ba$ es preciso ver la division del nonius que coincide con la de la regla y multiplicar el número de aquella division por la diferencia $D-d$ entre una division de la regla y otra del nonius.

Esta diferencia $D-d$ es lo que aprecia el nonius y viene dada por la fraccion $\frac{D}{n}$; en la cual $D$ representa el valor de la menor division del limbo y $n$ el número de divisiones del nonius. En efecto, segun la definicion del nonius

$$nd=(n-1)D=nD-D$$

de donde

$$n(d-D)=-D$$

$$D-d=\frac{D}{n}$$

Parece que puesto que la apreciacion del nonius está dada por la fraccion $\frac{D}{n}$ podrá llevarse esta hasta donde se quiera, sea por la disminucion de $D$ sea por el aumento de $n$; pero esto no es así por que pasado un cierto grado de pequeñez de las divisiones del limbo ó regla y del nonius, aparecen coincidiendo varias divisiones y no se distingue cual de las del limbo ó regla está en prolongacion de una de las del nonius.

En este caso hay que considerar como coincidentes las divisiones que ocupan la posicion media entre las que aparentemente coinciden, lo cual produce indecision. Las consideraciones anteriores son aplicables á los arcos circulares divididos en partes iguales, ó sea á los limbos de los Goniómetros. Por consiguiente para apreciar fracciones de la menor division $D$ de un limbo, se construirá un arco concéntrico, y tomando sobre este una longitud igual á $(n-1)D$ se dividirá en $n$ partes iguales $d$. Con este nonius se podrán apreciar fracciones de $D$ iguales á $\frac{D}{n}$. Conocida previamente esta fraccion, para evaluar un arco, se añadirá al número entero de divisiones que preceda al cero del nonius el producto $\frac{D}{n}$ por el número de orden de la division del nonius que coincida con una de las divisiones del limbo.

Sea un limbo dividido en grados sexagesimales con un nonius que tenga 30 partes iguales. La fraccion de grado que se podrá apreciar con este nonius será:

$$\frac{D}{n} = \frac{60'}{30} = 2'$$

Supongamos que el cero del nonius esté colocado entre las divisiones 71 y 72 del limbo, y que coincida con una division de este la undécima del nonius; el número de grados del arco comprendido entre el cero del limbo y el del nonius será

$$71^{\circ} + 2' \times 11 = 71^{\circ} + 22'$$

# Nonius simétrico.

Sea el limbo de un Goniómetro (figª 47): supongamos que el nonius 08 se ha construido tomando siete divisiones del limbo y dividiendolas en 8 partes iguales. Agreguemos ~~añadiremos~~ a este nonius por la izquierda otro 04 igual à su mitad comprendida entre las lineas de division 4 y 8 de la derecha.

Segun lo anteriormente espuesto, despues de verificada la lectura que corresponde à las divisiones enteras, hay que evaluar la fraccion de division dada por el nonius, para lo cual es preciso buscar cual es la division de nonius y limbo que coinciden. Supongamos que aqui sea la 6ª; como por construccion entre las dos lineas número 4 hay 7 divisiones del limbo, y lo mismo entre las 5 y 5, 6 y 6... resulta que cuando la linea 6 à la derecha del limbo coincida con una division de este tambien coincidirá la 6 de la izquierda con otra division, de modo que por el nonius comprendido entre 0 y 8 el valor del ángulo indicado en la figª 47 resulta ser

$$11\,D + 6\,\frac{D}{8}$$

y el mismo valor se deduce por medio del nonius limitado por las lineas de division 4 y 4. Lo mismo sucede en las demás divisiones. De aquí que en algunos instrumentos el nonius tenga la forma 4-4, aunque mas generalmente se presenta en la 0 8.

# Descripcion de Goniómetros y Niveles.

## Goniómetros.

Los Goniómetros son instrumentos destinados á medir angulos formados por dos alineaciones.

Se reducen á un plano movil que gira al rededor de un eje perpendicular á un limbo graduado y que pasa por su centro. Al plano movil acompaña un nonius.

Para medir el angulo de dos alineaciones se hace coincidir el eje perpendicular al limbo en su centro con la vertical a (fig.ª 48) interseccion de las dos alineaciones, se mueve el plano movil hasta que coincida con una cualquiera de las alineaciones a b, despues se le hace coincidir con la a c, en cada coincidencia se efectuan las lecturas de los angulos en el limbo valiendose del nonius y la diferencia dará el angulo buscado.

El limbo perpendicular al eje se llama ~~azi~~ azimutal; algunos goniómetros llevan otro limbo perpendicular al azimutal: este se llama limbo zenital y sirve para medir ángulos verticales.

Los goniómetros se reducen á dos clases: los Teodolitos y las Brújulas. Todos los demas puede decirse que son Teodolitos más ó menos incompletos.

Las dos partes principales de los teodolitos son: el aparato óptico, que se reduce á un anteojo y los limbos graduados.

Estudiaremos dos tipos; los Teodolitos de semicírculo zenital y los de limbo zenital completo.

1.er Tipo.— En estos teodolitos el limbo azimutal está sostenido por un cilindro (Fig.ª 49) unido á una plataforma que se apoya en la meseta del trípode por el intermedio de 3 ó 4 tornillos.

El limbo puede girar al rededor del eje vertical del Teodolito. Encima del limbo vá situado otro platillo que lleva los nonius y se llama por esta razon <u>platillo de los nonius</u>, el cual gira tambien al rededor del eje vertical independientemente ó junto con el limbo como veremos luego. Las graduaciones están marcadas en la circunferencia del platillo inferior y para facilitar la lectura á cada nonius suele acompañar un microscopio. Sobre el platillo de los nonius van dos niveles perpendiculares entre sí que sirven para conocer si el eje del goniómetro es vertical y como por construccion es perpendicular al limbo, saber si este es horizontal, que es lo que conviene para obtener los ángulos reducidos al horizonte

Sobre el platillo de los nonius van dos montantes que terminan en la parte superior en dos coginetes en los cuales se apoya un eje que sostiene una regla perpendicular á su direccion, y que lleva en sus extremos dos collares n. En estos se introduce un anteojo que lleva un nivel en la parte superior ó colgado en la inferior con sus tornillos correctivos. De la regla parte hacia abajo un semicírculo vertical graduado, y sobre el platillo de los nonius hay uno de estos para leer en el limbo zenital. Este nonius está sujeto por medio de dos tornillos, de tal manera que puede tener un pequeño movimiento lateral.

El instrumento se fija al trípode por medio de una de las articulaciones que conocemos.

Los movimientos principales de este instrumento son:

Un movimiento de rotacion general al rededor del eje perpendicular al limbo azimutal en su centro. Este movimiento puede ser rápido ó lento, por medio de tornillos de ~~presion~~ presion y de coincidencia.

Apretando los de presion y moviendo los de coincidencia se consigue el lento y aflojando los tornillos de presion se imprime el movimiento rápido con la mano.

La parte superior al platillo del limbo puede girar independientemente de la inferior al rededor del eje perpendicular al limbo azimutal con un movimiento que puede ser rápido ó lento. El primero se consigue fijando la parte inferior, apretando el tornillo de presion que sirve para unir el platillo de los nonius al del limbo, é impriuniendo el movimiento con la mano. El segundo apretando el tornillo de presion que fija la parte inferior, apretando tambien el que une los dos platillos y moviendo el de coincidencia de ambos.

El anteojo, con la regla y el limbo zenital, puede girar al rededor del eje paralelo al limbo azimutal que apoya en los coginetes, con movimiento rápido ó lento, valiéndose de los tornillos de presion y coincidencia que permiten fijar el limbo à uno de los montantes, ó hacerle independiente de él, apretando ó aflojando el tornillo de presion

Tiene por último el anteojo un movimiento de giro determinado por dos collares que lleva cerca del objetivo y del ocular, los cuales se apoyan en las dos horquillas situadas en los estremos de la regla; y además se le puede invertir colocando el objetivo donde estaba el ocular y reciprocamente.

Algunos teodolitos llevan además en la parte inferior un anteojo, que sirve para comprobar si durante la operacion se ha movido dicha parte del instrumento, como veremos mas adelante, al tratar de medir un ángulo.

2.º Tipo.—A este segundo tipo hemos dicho que pertenecen los teodolitos de limbo zenital completo. Difieren de los anteriores en la parte superior al platillo de los limbos (Fig.ª 61).—Los montantes son mas altos para que el anteojo pueda describir 360° al rededor del eje horizontal, al cual vá unido un limbo vertical. Como se puede ver en la figura el eje que se apoya en los cojinetes vá unido directamente el anteojo. El nivel que acompaña al anteojo está situado en la parte superior, y los que van en el platillo de los nonius estan colocados de manera que no impiden el movimiento del anteojo. Difiere tambien este teodolito del anterior en la colocacion de los nonius del limbo zenital, que son dos, estan situados en los estremos de un diámetro horizontal, y tienen un pequeño movimiento correctivo, por medio de los tornillos t.

## Medicion de un ángulo con un Teodolito.

Sean a b y a c (fig.ª 48) dos alineaciones que formen el ángulo b a c. Se empieza por estacionar en a que estará marcado en el terreno con un piquete ú otra señal. Para esto suele llevar la meseta del trípode en su parte inferior un gancho del cual se cuelga una plomada y se procura que el estremo inferior de dicha plomada coincida con el centro de la señal marcada en el terreno, lo que se consigue por tanteos moviendo el trípode en uno ú otro sentido. Hecho esto se habrá conseguido que uno de los puntos del eje del instrumento esté en la vertical del punto de estacion y no habrá mas que colocar dicho eje verticalmente, por medio de los tornillos de la articulacion, para que coincida con la vertical de aquel punto.

Se hace coincidir luego el cero del limbo con el del nonius valiendose de los tornillos de presion y coincidencia; para esto aflojando el de presion que fija ambos platillos se dá el movimiento rapido con la mano hasta que proximamente coincidan los ceros, y luego apretando dicho tornillo de presion se mueve el de coincidencia hasta que esta se verifique. Una vez hecho esto por el movimiento total del teodolito, se dirige la primera visual al punto b de la izquierda, si la graduacion va de izquierda á derecha, como generalmente sucede; se fija la parte inferior del teodolito, y se dirige, con el anteojo que lleva en la parte superior, una visual á un punto lejano y bien determinado. Se afloja luego el tornillo que une los dos platillos entre si, se hace girar la parte superior hasta que el plano de colimacion del anteojo coincida con la alineacion a c y se efectua la lectura que nos dará el angulo formado por las dos alineaciones a b y a c (Figª. 48). Cuando la graduacion del limbo crece de derecha á izquierda, se dirige primero la visual al punto de la derecha.

Algunos goniómetros tienen dos nonius diametralmente opuestos, y en este caso se puede comprobar con uno de ellos la lectura hecha ~~con uno de ellos~~ con el otro, pues se vé desde luego que la diferencia de las lecturas de ambos nonius debe ser 180°. Pero esto supone que el eje de rotacion del platillo o alidada en que van dichos nonius coincide con el centro del limbo. Cuando no sucede asi (Figª. 229) sean c el centro del limbo, o el eje de rotacion del platillo ó alidada de los nonius, o e la distancia entre estos dos puntos, generalmente muy pequeña, A el cero del limbo, A B y A' B' las direcciones de la alidada cuando principia y termina la ~~direccion~~ medicion del angulo. Como la alidada vá unida al plano de colimacion del anteojo, el ángulo recorrido por dicho plano al pasar de la primera alineacion à la segunda es igual al A O A' mientras que la lectura hecha en el limbo es el arco A A' de diferente numero de grados que el A O A'.

Llamando l' la graduacion leida con el nonius B cuando el plano de colimacion del anteojo coincide con la primera alineacion, l'' l''' las graduaciones leidas con los nonius A' y B' cuando el mismo plano coincide con la segunda alineacion; se vé inmedatamente que

$$A\,O\,A' = \frac{AA' + BB'}{2} = \frac{l'' + (l''' - l')}{2}$$

ecuacion que dá el valor del angulo que se trata de medir, no obstante la escentricidad del platillo ó alidada de los nonius.

Terminada la medicion del ángulo se vuelve à mirar por el anteojo inferior para ver si se ha movido la parte inferior del goniometro. Si efectivamente se hubiera movido lo mas conveniente es volver à empezar la medicion.

Es conveniente dirigir la visual al pié del jalon, haciendo coincidir la interseccion de los hilos del reticulo con los puntos a y b (fig.ª 62). De no ser así como los jalones no se colocan nunca perfectamente verticales, en vez de medir el angulo a o b mediria-mos el c o d.

Hasta aqui hemos supuesto que el plano de colimacion del anteojo contiene la perpendicular levantada al limbo azimutal en su centro. Cuando asi no sucede si se efectuan las operaciones antes esplicadas para medir un ángulo, tal como el S C D (fig.ª 228) el nonius, al pasar el plano de colimacion del anteojo de la posicion O S á la O D, no describirá un angulo igual al S C D, y por consiguiente su lectura en el limbo a' d' e' b' no dará dicho angulo sino el S O D; pero puede deducirse el angulo S C D por medio de observaciones conjugadas.

Se llaman asi las operaciones goniométricas ~~geometricas~~ que se practican colocando sucesivamente el anteojo á la derecha y á la izquierda del observador. Esto supuesto para determinar el angulo S C D despues de colocar el anteojo á la derecha en b, y de hacer coincidir el cero del nonius con el cero del limbo, se dirigen las visuales OS y OD y se lee el angulo marcado por el nonius, que será igual al S O D = b' c e' = O: despues por el ~~movimiento~~ total del teodolito, se pasa el anteojo á la izquierda en a, se vuelve á hacer la coincidencia de los ceros del limbo y del nonius, se dirigen las visuales O'S y O'D y se lee en el limbo el ángulo que será igual á S O'D = d' c a' = O'. Medidos de este modo O y O', para determinar el SCD no hay mas que observar que en los triangulos ~~los triangulos~~ DNO y SNC, $O + \frac{1}{2}D$ y $C + \frac{1}{2}S$ son suplementos de un mismo ángulo N, y que por tanto:

$$O + \frac{1}{2}D = C + \frac{1}{2}S.$$

Del mismo modo en los triangulos $SMO'$ y $DMC$

$$O' + \frac{1}{2}S = C + \frac{1}{2}D.$$

De estas ecuaciones resulta

$$C = \frac{O+O'}{2}$$

Se llama distancia zenital de una recta al ángulo que forma con la vertical, y angulo de pendiente al complemento de la distancia zenital. Estos angulos se miden por medio de limbos que son perpendiculares á los azimutales de los goniometros y reciben el nombre de limbos zenitales. Los destinados á medir angulos de pendiente estan graduados de modo, que al ser horizontal la visual, el cero del nonius coincide con el del limbo; y en los que tienen por objeto medir distancias zenitales el cero del nonius coincide con la division correspondiente à 100° centésimales ó 90° sexagesimales, cuando la visual es horizontal.

Por consiguiente, para medir el angulo de pendiente ó la distancia zenital de una recta, no hay mas que hacer coincidir la visual con dicha recta ú otra que tenga ~~proximamente~~ la misma inclinacion y leer el ángulo por medio del nonius que marca cero, noventa ó cien grados, al ser la visual horizontal. Cuando el limbo tiene dos nonius se puede comprobar su lectura, ó en su caso calcular el ángulo, como se dijo al tratar de la medicion de angulos azimutales.

# Niveles.

Son instrumentos destinados á realizar planos horizontales. Constan generalmente de un nivel de aire y de un anteojo unidos á un eje que á su vez vá unido al trípode por una articulacion de tres ó cuatro tornillos. Los niveles pueden clasificarse en dos grupos.

1.er Grupo.– Pertenecen á él los niveles de Dollond y de Egault (fig.as 63 y 64) y en general todos aquellos en que el anteojo puede girar al rededor del eje que pasa por los centros de los collares c y además invertirse poniendo el objetivo donde estaba el ocular y recíprocamente. Los collares c están sostenidos por dos horquillas situadas en los estremos de la regla, la cual puede girar al rededor de un eje que le es perpendicular y se une al trípode por una articulacion de tres ó cuatro tornillos en los niveles bien construidos.

Una de las horquillas es fija y la otra tiene un movimiento en sentido perpendicular á la regla para poder dar diferentes inclinaciones al anteojo respecto á la vertical. Este movimiento se consigue por medio del tornillo t que tiene la horquilla correspondiente en su parte inferior. El nivel de aire puede estar unido al anteojo como en el de Dollond (fig.a 63) ó á la regla como en el de Egault (fig.a 64) en ambos casos lleva tornillos correctivos n para poder dar diversas inclinaciones á la tangente en el índice.

2.º Grupo.– Corresponden á este grupo los niveles llamados de anteojo fijo, como los de Troughton.

En estos niveles el anteojo vá unido á los cojinetes que les sostienen de modo que no puede invertirse en ellos como en los del grupo anterior.

Los cojinetes estan sostenidos por una regla (fig.ª 65) unida á la articulacion por medio de una columna. Esta regla puede girar al rededor de un eje que le es perpendicular. Dichos cojinetes tienen un movimiento tambien perpendicular á la regla, por medio de los tornillos t. El nivel de aire está unido invariablemente al anteojo en su parte ~~inferior~~ superior

Tambien pertenecen á este grupo los niveles de Gravatt, (fig.ª 66) los cuales solo se diferencian de los de Troughton, en que el nivel de aire está unido al anteojo por medio de tornillos correctivos.

En los niveles convenientemente corregidos una vez colocado el eje vertical, la visual es horizontal en todas las posiciones que puede tomar cuando giran al rededor de dicho eje, condicion necesaria para poder determinar por su medio las cotas de los puntos del terreno como veremos al tratar de la nivelacion topográfica.

## Correccion de los instrumentos.

Para estudiarlas dividiremos los instrumentos en los tres grupos siguientes (1);

1.er Grupo.- Le constituyen los que tienen el anteojo dispuesto de tal modo que puede girar dentro de sus horquillas y sacarse de ellas para invertirlas poniendo el ocular donde estaba el objetivo y este donde el ocular.

2º. Grupo.- Comprende los instrumentos cuyo anteojo vá unido á su eje perpendicular á su direccion, y al rededor del cual pueden dar una vuelta completa.

3er. Grupo.- Le consideramos formado por los instrumentos llamados de anteojo fijo.

Al primer grupo pertenecen los niveles llamados de Y como los de Dollontt (figª. 63) y los de Egault (figª. 64); y tambien los teodolitos ingleses de semi-circulo vertical (figª. 59). Al segundo grupo corresponden los teodolitos de limbo zenital completo (figª. 61) y las brújulas eclimetros. Y por último, constituyen el tercer grupo los niveles de Troughton (figª. 65) y Gravatt (figª. 66).

Para la correccion de instrumentos se hace algunas veces uso de las miras parlantes, que mas adelante describiremos, limitandonos por ahora á decir; que una mira de esta clase es una regla dividida en centímetros, ó en dobles milímetros, que se coloca verticalmente sobre el terreno, apoyandola en el extremo que tiene marcado el cero de las divisiones. El punto de una mira que aparece oculto por los dos hilos del retículo, es la interseccion de la mira y la visual, y contando las divisiones comprendidas entre dicho punto y el terreno se conocerá lo que se llama altura de mira. Para facilitar esta operacion estan convenientemente numeradas las divisiones.

## Primera correccion.

Consiste en examinar si la tangente en el indice del nivel mas sensible ~~[illegible]~~ del instrumento (si tiene mas de uno) es perpendicular al eje de rotacion general; y si no lo es colocarlo en dicha posicion. Segun demostramos al tratar del nivel de aire, se practica esta correccion del modo siguiente.

Se coloca el nivel en direccion paralela al plano vertical de dos tornillos de la articulacion, se lleva por medios de ellos la burbuja à coincidir con el indice; y despues se da un giro de 180° al nivel. Si la burbuja permanece en el indice, la tangente en este punto del nivel sera perpendicular al eje de rotacion; en el caso contrario se reducirá el arco que separa la burbuja del indice à la mitad por medio de los tornillos correctivos del nivel.

Para comprobar si hecho esto la tangente y el eje son perpendiculares, se repiten las operaciones anteriores del modo siguiente: por medio de los tornillos de la articulacion se lleva el nivel à la posicion horizontal y enseguida se le hace girar 180°, para ver si conserva la horizontalidad; si asi sucede, la correccion está bien hecha, y si no, hay que volverla à ejecutar, hasta que en dos posiciones simetricas del nivel la burbuja permanezca en el indice.

Colocada la tangente en el indice del nivel perpendicularmente al eje de rotacion se comprueba otra vez dicha perpendicularidad, haciendo girar 90° al nivel y centrandose la burbuja con los otros dos tornillos del pie si tiene cuatro, ó con el restante si no tiene mas que tres; y observando despues, si la tangente en el indice del nivel es horizontal, en todas las posiciones que pueda ocupar al girar alrededor del eje, lo cual se verificará si durante el giro la burbuja permanece en el indice.

El nivel que debe emplearse para esta correccion es el unido al anteojo, por que generalmente es el mas sensible. Algunos teodolitos llevan dos niveles en el platillo de los noniús, que se centran despues de colocar el eje verticalmente por medio del nivel mas sensible y sirven acto sucesivo para indicar si ha variado la inclinacion de este, al hacer los diferentes movimientos que son necesarios para la medicion de los angulos.

En cuanto á los tornillos que se han de proveer para variar la inclinacion del nivel respecto del eje de rotacion; en el caso de que haya dos ó mas que conduzcan al mismo resultado deberá hacerse uso de aquel cuyo manejo sea mas cómodo y produzca menos perturbaciones en el resto del instrumento. Vamos á ver cual debe ser en los diversos instrumentos de que nos ocupamos.

1er Grupo - Nivel de Dollond (fig. 63) Puede usarse indistintamente los tornillos n y t en general será mas cómodo el t.
Nivel de Egault (fig. 64) Se hará uso del tornillo n puesto que el t no hace variar en nada al nivel.

Teodolito (fig. 59) Se pueden usar el tornillo n ó el c de coincidencia del limbo zenital, prefiriéndose generalmente el c porque el movimiento es mas suave.

2º Grupo - (fig. 61) Lo mismo que en el teodolito anterior, el tornillo mas conveniente para corregir el nivel del anteojo es el de coincidencia c.

3er Grupo - Nivel de Troughton (fig. 65). Como el nivel carece de movimientos correctivos respecto al anteojo hay que mover los tornillos t situados debajo de la regla.

Nivel de Gravatt (fig. 66) Se puede hacer la correccion con el tornillo n del nivel ó con el t de la plataforma. Cuando el nivel está unido al anteojo y puede girar, dentro de sus horquillas (figs. 59 y 63) hay que examinar si la tangente en el índice, además de ser perpendicular al eje de rotacion del instrumento, es paralela al del anteojo; y si no lo fuese llevarla á esta última posicion por el procedimiento que se explicó anteriormente, al tratar de la teoria del nivel de aire.

## 2ª Correccion

Esta correccion es peculiar á los instrumentos del primer grupo; consiste en hacer que la visual coincida con el eje de rotacion del anteojo, para que al girar este dentro de sus horquillas señale siempre un mismo punto. Esta operacion se conoce con el nombre de centracion del retículo.

Para comprobar si está centrado el retículo, no hay mas que ver si la interseccion de los hilos oculta siempre un mismo punto de un muro, de una mira &c.ª, en todas las posiciones que toma el anteojo cuando gira dentro de sus horquillas. Si esto no tiene lugar, será indicio de que la visual y el eje de rotacion no coinciden y habrá que hacer la correccion del modo siguiente.

Se dirige la visual á un plano vertical, que sea aproximadamente perpendicular á la direccion del anteojo, y se hace señalar en dicho plano, que puede ser el paramento de un muro, dos rectas que se confundan con los hilos. Para esto se coloca una regla en el muro, se mueve obedeciendo á las indicaciones del que mira hasta que el canto de la regla se confunda con uno de los hilos, y entonces se marca una recta $a\ b$ (fig.ª 67). Lo mismo se hace despues con el otro hilo trazando la recta $c\ d$. Se da al anteojo un giro de 180° dentro de sus horquillas y en esta posicion se marcan $a'b'$ y $c'd'$ sobre el muro. Se trazan las dos diagonales $mn$ y $o\,o'$ ~~$o\ m\ o'\ n$~~ y se hace coincidir con el punto $o$, la interseccion de los hilos del retículo, por medio de los tornillos $r$ (fig.ªs 57, 63 y 64.)

Enseguida se comprueba si ha quedado hecha la centra cion del retículo, del modo que se dijo antes; y en caso necesario se reproducen las operaciones que se acaban de esplicar.

Para que sea mas fácil llevar el canto de la regla á coincidir con los hilos, se coloca uno de ellos, de modo que la recta lugar geométrico de los puntos del muro ocultos por él sea vertical. Se sabe así que la regla ha de ser siempre vertical cuando se trate de la coincidencia de su canto con este hilo y horizontal para la del otro.

La falta de centracion de un anteojo puede proceder de que el foco principal correspondiente al eje secundario del objetivo paralelo á la direccion del movimiento del retículo, no esté en el eje de rotacion del anteojo, de que no lo esté la intersecion de los hilos del retículo, ó de ambas causas á la vez. Cuando el foco está en el eje de rotacion del anteojo, la centracion del retículo es posible, y se funda en las consideraciones siguientes.

El lugar geométrico de los puntos ocultos por un hilo del anteojo es un plano que pasa por el hilo y por el foco esterior del objetivo, y su interseccion con el muro es la recta c d (figura 67) Cuando se hace girar el anteojo 180°, este plano toma una posicion simétrica con la anterior, siendo el plano de simetría el vertical del eje de rotacion, por consiguiente su interseccion con el muro será una recta c' d' paralela á la c d.

Lo mismo puede decirse respecto al otro hilo y de aquí que moviendo el retículo por medio de los tornillos z (figuras 59, 63 y 64) hasta que la visual pase por el punto O quede centrado.

Como los giros se hacen á simple vista las rectas c d y c'd', o n y m o, no son esactamente paralelas, y por tanto hay necesidad de repetir las operaciones hasta que la visual pase por el mismo punto del muro, durante una rotacion completa del anteojo. Cuando despues de muchos tanteos no pueda conseguirse este resultado, será indicio de que el foco esterior del objetivo no está en el eje de rotacion; y por consiguiente la centracion del retículo será, imposible, á menos de reconstruir el anteojo, cuyo trabajo es ageno al ingeniero.

Por lo demás dicha centracion puede hacerse sin necesidad de trazar en el muro las rectas c d y c'd', on y o m; del modo siguiente. Se hace coincidir uno de los hilos con una recta, tal como una arista de un edificio, el cordon de una plomada &ª se hace girar el anteojo 180° dentro de las horquillas, y se mueve el retículo (figª 59, 63, y 64) por medio de sus tornillos hasta que aquel hilo divida á simple vista la zona comprendida entre sus dos posiciones en dos partes iguales; se practican las mismas operaciones con el otro hilo del retículo; y por último se comprueba si la visual pasa por un mismo punto durante un giro completo del anteojo. Caso de no ser así, se reproduce la correccion.

## 3ª Correccion

La tercera correccion tiene por objeto colocar la visual del anteojo perpendicularmente al eje de rotacion del instrumento, á fin de que cuando dicho eje sea vertical, describa aquella visual un plano horizontal, al girar al rededor del mismo eje. En los instrumentos que tienen limbo zenital como los teodólitos y brújulas eclímetros, es necesario que la perpendicularidad de la visual y el eje, se verifique cuando coincida el cero, el 90° sexagesimales ó el 100° centesimales del limbo zenital con el cero de su nonius. — La manera de efectuar esta operacion varía de unos instrumentos á otros; por lo que hay que tratar de cada grupo separadamente.

1.er grupo — Niveles — Se dirige la visual á una mira despues de haber colocado verticalmente el eje del nivel: sean A y B (fig. 68) las posiciones del eje de rotacion del nivel y de la mira, y a b la direccion de la visual. Se lee la cota de mira que marque la interseccion de los hilos del retículo ó sea Bm = m; despues se hace girar 180° el instrumento al rededor del eje vertical, con lo que quedará el ocular en la parte baja y el objetivo en la alta, y para volver á mirar á la mira será necesario invertirlo sacándolo de las horquillas, poniendo el ocular donde estaba el objetivo y vice-versa. La visual habrá tomado la posicion simétrica $a'b'$ y se podrá leer la cota $Bm' = m'$. Para que sea perpendicular al eje de rotacion del nivel es preciso que marque un punto de mira cuya altura sobre $B$ sea $m_1 = \frac{m+m'}{2}$, lo cual se conseguirá moviendo los tornillos $t$ (fig. 63 y 64) hasta que se lea en la mira una altura igual á $m_1$. Despues se comprueba la correccion viendo si en dos posiciones invertidas del anteojo, su visual pasa por el mismo punto de la mira. Si así no fuese hay que repetir las operaciones hasta conseguir dicho resultado.

Teodolitos de limbo zenital semicircular. Cuando estan destinados á medir ángulos de pendiente se practica la correccion de que se trata del modo que á continuacion se expresa.

Despues de colocar su eje de rotacion verticalmente y de hacer coincidir los ceros del limbo vertical y del nonius, se ejecutan las mismas operaciones que en los niveles, para comprobar si la visual es perpendicular al eje. Cuando lo sea, la visual en sus dos posiciones cortará á la mira en un mismo punto $m_1$ y se obtendrá en

$$\left.\begin{array}{l} Bm_1 = Bm - mm_1 \\ Bm_1 = Bm' + m'm_1 \\ mm_1 = m'm_1 \end{array}\right\} 2Bm_1 = Bm + Bm' \; ; \; Bm_1 = \frac{Bm + Bm'}{2}$$

las dos lecturas el mismo número de divisiones.

En el caso contrario se obtendrán dos lecturas $m$ y $m'$ y habrá que mover la visual hasta que se lea en la mira un número de divisiones $m_{''} = \frac{m+m'}{2}$. Para conseguirlo se hace girar el anteojo por medio del tornillo C (fig. 59) con lo que se habrá alterado la coincidencia de los ceros del nonius y del limbo zenital. En algunos teodólitos puede comunicarse al nonius un movimiento lateral, despues de aflojar los tornillos que le sugetan. En este caso puede llevarse á coincidir con el del limbo, y como en este movimiento la visual no varía la correccion queda hecha.

Cuando el nonius no tiene movimiento lateral, se lee el ángulo que marca al ser la visual horizontal y se toma nota de él para añadirle ó restarle, segun su sentido con relacion al de la graduacion del limbo, á todos los ángulos zenitales que se midan.

En los teodólitos del limbo semicircular dispuestos para medir distancias zenitales, se principia la comprobacion por hacer coincidir el cero del nonius con la division 90° ó 100°. Las demás operaciones son iguales á las del caso anterior. Las consideraciones precedentes, suponen que los collares del anteojo son de igual rádio.— Cuando no lo son la visual a'b' (fig. 68) no forma con la horizontal, despues de invertir el anteojo, el mismo ángulo que la a b; y por consiguiente no quedará en posicion perpendicular al eje de rotacion del instrumento, al hacerla pasar por el punto m, (figura 68) por medio de los tornillos t (figs. 63 y 64) y c (fig. 59). Es por tanto necesario, antes de proceder á la correccion 3.ª examinar si los collares del anteojo son iguales.— Para esto, cuando el anteojo está unido al nivel, despues de hecho vertical el eje de rotacion del instrumento y antes de colocar la visual perpendicularmente á dicho eje, se saca el anteojo de las horquillas y se invierte. Si la burbuja del nivel despues de la inversion no se separa del índice, será indicio de que los collares son iguales y se podrá practicar la correccion de la visual como se ha explicado. Pero si la burbuja no permanece en el índice despues de la inversion del nivel, su desviacion indicará que los collares del anteojo son de diferente rádio y habrá que proceder, como se explicará mas adelante despues de tratar de la correccion 3.ª con relacion á los instrumentos del 3.er grupo. Al mismo tiempo se espondrá el modo de averiguar si los collares son ó no iguales, en aquellos instrumentos en que el nivel no está unido al anteojo, como el nivel de Egault (fig 64).

2.º grupo – Teodolitos y brujulas eclimetros de limbo zenital = Hemos visto anteriormente que para hallar el ángulo $\underline{\alpha}$ de una recta O'A (fig. 69) cuando al estar el cero del limbo zenital en el cero del nonius y la visual es horizontal, no hay mas que mover el anteojo hasta que su visual ~~nivel~~ coincida con dicha recta O'A ú otra que tenga ~~proximamente~~ la misma inclinacion y leer el arco $\underline{o'o}$ por medio de dicho nonius. De aquí se deduce que si se marca el ángulo de pendiente de una recta, ó ~~de~~ su complemento, en un limbo zenital; y se hace ~~cuando hagamos~~ coincidir la visual del anteojo con dicha recta por un movimiento que no separe el nonius del limbo ni á este de su posicion vertical, ~~la visual será horizontal; ó lo que es lo mismo, que~~ cuando separemos el anteojo del limbo (para lo cual no habrá mas que aflojar el tornillo de presion que acompaña al de coincidencia del anteojo) y llevemos el nonius á cero, la visual será horizontal; y quedará por tanto hecha la 3.a correccion de que nos ocupaba-mos.— Veamos como puede determinarse la pendiente de una recta ó su suplemento, por medio de un limbo, antes de que esté hecha dicha correccion. Para esto observaremos primeramente que si la correccion está hecha y despues de colocar verticalmente el eje de rotacion del instrumento, se determinan por observaciones conjugadas, los dos ángulos que una misma recta forma con la horizontal, la suma de dichos ángulos debe resultar igual á 180°. Sea O'A la recta (fig. 69) y supongamos que cuando la visual es horizontal el o del limbo coincide con el del nonius n, y que la graduacion procede en el sentido o, 90. 180, 270. Cuando el anteojo y el limbo están unidos entre si y el nonius está fijo, al hacer coincidir la visual con el ángulo O'A leeremos el ángulo α. Hagamos girar al limbo 180° al rededor del eje de rotacion vertical del instrumento, para hacer la observacion conjugada. Despues de este movimiento la visual del anteojo tomará la posicion o"180", la graduacion que ~~procedía~~ procedia en el sentido o', 90', 180' procederá en el sentido contrario o", 90", 180" y el cero del nonius n habrá pasado á la posicion n' sin salir de la ~~posicion~~ linea nn'. Dirijamos el anteojo nuevamente á A: el nonius permanecerá fijo, la graduacion procederá en sentido $\underline{0'''}$ $\underline{90'''}$ $\underline{180'''}$ igual al anterior $\underline{0''}$ $\underline{90''}$ $\underline{180''}$ y leeremos por medio del nonius $\underline{n'}$ un angulo $b$ tal que $a+b=180°$, como se trataba de demostrar.— Hasta aqui hemos supuesto que el cero del limbo está en la misma visual. Esta suposicion que continuaremos haciendo en las consideraciones que siguen, no tiene mas objeto que facilitar la esplicacion y las figuras; pero se ve facilmente que se obtienen los mismos resultados, cuando dicho cero no está en la visual, siempre que, como en los goniómetros, esté invariablemente unido, con el anteojo.— Supongamos ahora (fig. 70) que cuando la visual $\underline{h\,h}$ es horizontal los ceros del limbo y del nonius no coinciden, estando el ~~primero~~ segundo en $\underline{n\,o}$ y el ~~segundo~~ primero en $\underline{h\,h}$ y llamemos $\underline{e}$ el arco que los separa. Vamos á ver que, esto no obstante, se pueden determinar los ángulos $\underline{a}$ y $\underline{b}$ que una misma recta $\underline{O'A}$ forma con la horizontal. En efecto, si colocamos la visual en coincidencia con la recta leeremos en el ~~arco~~ limbo $l=a+e$.

Hecha como en el caso anterior, la observacion conjugada, leeremos en el mismo limbo la graduacion del arco $l'=b+e$.

De estas dos ecuaciones se deduce

$$l+l'=\alpha+\beta+2e=180^\circ+2e$$

$$e=\frac{(l'+l)-180^\circ}{2}$$

y por consiguiente

$$\alpha=l-\frac{(l+l')-180^\circ}{2}\ (1)\quad \beta=l'-\frac{(l+l')-180^\circ}{2}\ (2)$$

En el caso anterior es $l+l'>180^\circ$.

Cuando $l+l'<180^\circ$ (fig. 72) las observaciones conjugadas dan por resultado

$$l=\alpha-e$$
$$l'=\beta-e$$

y de ellas se deduce

$$l+l'=\alpha+\beta-2e=180^\circ-2e$$

$$e=\frac{180^\circ-(l+l')}{2}$$

y por lo tanto

$$\alpha=l+\frac{180^\circ-(l+l')}{2}\ (3)\quad \beta=l'+\frac{180^\circ-(l+l')}{2}\ (4)$$

De lo anteriormente espuesto se deduce: que para practicar la correccion 3.ª en los instrumentos de limbo zenital completo, se coloca verticalmente el eje de rotacion del instrumento; se dirige la visual del anteojo á un punto A (fig. 70) y se lee el ángulo $l$ con el nonius $n$; se hace girar el limbo zenital 180° al rededor del eje vertical del goniometro; se vuelve á dirigir la visual al punto A; se lee con el mismo nonius $n$, que ahora ocupará la posicion $n'$, el ángulo $l'$ y se suman $l$ y $l'$. Si $l+l'=180^\circ$ la correccion está hecha. Si $l+l'>180^\circ$ se calcula $\beta$ por la fórmula (2); se hace girar el limbo zenital al rededor de su eje de rotacion, despues de aflojar el tornillo de presion (fig. 71) que le une al nonius, hasta que en este se lea el ángulo $\underline{b}$; y por último, se mueven limbo y nonius unidos, alrededor del mismo eje hasta que la visual vuelva á pasar por el punto A. Cuando $\lambda + \lambda' < 180°$ (fig. 72) las operaciones son las mismas á excepcion del cálculo de $\underline{b}$ que se hace por la fórmula (L). — Siguiendo el procedimiento anterior se deduce; que cuando el limbo está dispuesto para medir distancias zenitales, si la suma $\lambda + \lambda'$ de las dos lecturas $\lambda$ y $\lambda'$ correspondientes á las dos observaciones conjugadas es $400°$; la visual será horizontal al coincidir el cero del nonius con la division $100°$ del limbo, y por lo tanto la correccion estará hecha. — Que cuando $\lambda + \lambda' > 400°$ habrá que restar $\frac{(\lambda+\lambda') - 400}{2}$ de $\lambda'$, marcar en el limbo el número de grados que resulte y del medio del nonius de que se haya hecho uso para las lecturas, y mover limbo y nonius unidos, hasta que la visual pase por el punto observado. Y por último, que si $\lambda + \lambda' < 400°$ habrá que agregar $\frac{400° - (\lambda+\lambda')}{2}$ á $\lambda'$, señalar el limbo el número de grados que resulte y hacer girar limbo y nonius unidos, hasta que la visual pase por el punto usado para hacer la correccion. — El mecanismo para mover el limbo y el nonius unidos, es generalmente uno ó dos tornillos que mueven una regla unida al primero ó al segundo. En algunos goniómetros el nonius tiene un movimiento correctivo independiente del limbo; y en este caso, despues de dirigida la segunda visual al punto que se elige para hacer la correccion y de calcular el ángulo que debe marcar el nonius, se mueve este hasta que señale dicho ángulo. Cuando el goniómetro no tiene ninguno de estos mecanismos, se calcula el error $\underline{e}$ por las fórmulas anteriores y se suma ó resta, segun su signo, á todos los ángulos que se midan con el limbo zenital. Cuando este limbo no es un círculo completo, hay que seguir para hacer la 3ª correccion, otro procedimiento de que se tratará mas adelante.

Hasta aquí hemos supuesto que el nonius esté fijo y el anteojo invariablemente unido al limbo; si el limbo está fijo y el anteojo se mueve con el nonius, se podrá hacer la correccion valiendose de operaciones conjugadas, ó directamente, como veremos en su lugar.

3er grupo.— Como el anteojo está unido á la regla, no se puede seguir, para hacer la correccion, el procedimiento indicado para los niveles de primer

grupo, y hay que emplear los métodos siguientes.
El mas empleado es el primer método.- Se colocan dos miras Aa - Bb en $A_1A$ y $B_1B$ (fig. 75) y el nivel se instala en un punto $N_1N$ que debe estar á la misma distancia de las verticales de $A_1$ y de $B_1$.- Despues de haber puesto vertical el eje se dirigen visuales $dp$ $d_1A_1$ y $dq$ $d_1B_1$ á las miras que se leen las alturas $Ap = A$ y $Bq = B$.
Los puntos $p$ y $q$ obtenidos así estarán en la misma horizontal. En efecto, como la visual del anteojo al girar al rededor del eje vertical $ee$ describirá un cono de revolucion, las visuales dirigidas á las miras, estas y las horizontales $dm$ $d_1A_1$ y $dn$ y $d_1B_1$ forman dos triángulos rectángulos $mdp$ $A_1d_1$ y $ndq$ $B_1d_1$ que son iguales puesto que tienen los ángulos en $d$ iguales y los lados $md$ $A_1d_1$ y $nd$ $B_1d_1$, son tambien iguales, por tanto $mp = nq$ y $p$ y $q$ estan en un mismo plano horizontal. Despues de leer las alturas de mira $A$ y $B$ se estaciona el nivel en un punto $M$ perteneciente á la alineacion determinada por las miras $Aa$ y $Bb$, se coloca verticalmente su eje de rotacion y se leen las alturas $Aa = A'$ y $Bb = B'$.
Se ve desde luego que si $A'-A = B'-B$ la visual será perpendicular al eje; que si $A'-A < B'-B$ habrá que bajar la visual hasta que $A'-A = B'-B$ y re-

cíprocamente cuando $A'-A > B'-B$. Esta corrección se hace por medio de los tornillos $r$ y $\bar{r}$ (figˢ 65 y 66).

**Segundo método**_ Se coloca el nivel en un punto A (fig. 76) y se dirige la visual á una mira situada en B, después de poner vertical el eje de rotación. Se mide la altura $h$ del centro del anteojo sobre el suelo y la $m$ de la mira. Se cambian de posición esta y el nivel y haciendo las operaciones que antes, se determinan las alturas $h'$ y $m'$. Si la visual es perpendicular al eje del nivel será horizontal en las dos posiciones del mismo y resultará que

$$h + h' = m + m'.$$

En efecto, claramente se ve en la figura que siendo las visuales horizontales se tiene

$$h - m = m' - h'.$$

de donde $\qquad h + h' = m + m'.$

Cuando no se verifique esta igualdad hay que colocar la visual perpendicular al eje del nivel, para lo cual se mueve el retículo, por medio de sus tornillos, hasta que $h + h' = m + m'$.

Para conocer las alturas $h$ y $h'$ se busca en los alrededores del punto de estación del nivel otro que esté á la misma altura que él, y en la vertical del centro del ocular, y se mide la distancia entre

ambos puntos por medio de una cinta, una mira &c.
Este modo de hacer la corrección, tiene el inconveniente del error que generalmente se introducirá por la medición de la altura del instrumento, el cual se evita por el método anterior y por el siguiente

Tercer método — Se colocan dos miras A y B y el instrumento se instala en C (fig. 77) Después de hacer que sea vertical el eje de rotación del nivel, se dirigen dos visuales $\underline{ma}$ y $\underline{mb}$ y se miden las alturas de mira $Aa$ y $Bb$ que denominaremos $m$ y $n$. Se traslada el instrumento ~~á un punto~~ á un punto D de la alineación A B distante de la vertical del punto B una longitud igual á la distancia de C á la de A; se coloca verticalmente el eje de rotación del nivel, se dirigen las visuales $nc$ y $nd$, que serán paralelas á las anteriores y se miden las alturas $Ac = m'$ y $Bd = n'$. Las semisumas

$M = \dfrac{m+m'}{2}$, $N = \dfrac{n+n'}{2}$ determinarán en las miras dos puntos $\alpha$ y $\beta$ que estarán en una misma horizontal.

En efecto. ($r\alpha = \dfrac{ra+rc}{2} = \dfrac{rp+pa+rc}{2}$ $s\beta = \dfrac{sd+sb}{2} = \dfrac{sd+sq+qb}{2}$ pero como $rp = sq$ „ $pa = sd$ „ $rc = qb$ luego) Llamando $d$ al desnivel $AE$ de los puntos A y B se ve fácilmente que ($r\alpha = s\beta$. C.Q.D.)

$$d = Bq - Ap = (Bb - bq) - (Aa - ap)$$

(46) $d = Bs - Ar = (Bd - ds) - (Ac - cr)$

y poniendo los valores $m\ m'\ n\ y\ n'$ en vez de sus iguales, será

$d = (n - bq) - (m - ap)$ [1]

$d = (n' - ds) - (m' - cr)$ [2]

Observemos ahora que los triángulos $m\,a\,p$ y $n\,d\,s$ son iguales, porque el ángulo de la visual con la horizontal no variará y las distancias $m\,p$ y $n\,s$ son iguales. Lo mismo sucede con los triángulos $n\,r\,c$ y $m\,q\,b$, luego tendremos que

$a\,p = d\,s$ y $c\,r = b\,q$ [3]

~~Suponiendo~~ Sumando ahora [1] y [2], resulta

$2d = (n + n') - (m + m') + ap + cr - bq - ds$ y en virtud de [3]

$$2d = (n + n') - (m + m')$$

de donde $\frac{n + n'}{2} = \frac{m + m'}{2} + d$;

lo que nos indica que los puntos d B están á la misma altura sobre los E y B; y como E B la hemos supuesto horizontal d B también lo será.

Determinados los puntos $\alpha$ y $\beta$ (fig. 77) se podrá saber si la visual es ó no perpendicular al eje de rotación del nivel; porque cuando lo sea, como las visuales $nr$ y $ns$ formarán una recta horizontal y resultará que $rd = sb$, ó llamando $m_1$ y $n_1$ á las alturas de mira $Ar$ $Bs$, será $M - m_1 = N - n_1$ y cuando no lo sea las visuales $nd$ $nc$ no serán horizontales, y por consiguiente $M - m'$ será mayor ó menor que $N - n'$. En el primer caso la correccion estará hecha. En el segundo habrá que hacerla moviendo el retículo, por medio de sus tornillos, hasta que $M - m' = N - n'$.

Observaciones relativas á los instrumentos del primer grupo. Hemos dicho al tratar de dichos instrumentos que cuando los collares del anteojo sean desiguales, no puede colocarse la visual perpendicularmente al eje de rotacion por el procedimiento que le es peculiar. En este caso se practica la correccion tercera, por los métodos referentes á los instrumentos del tercer grupo; pero corrigiendo la visual por medio de los tornillos $t$ (figs. 63 y 64) ó $c$ (fig. 59); porque si se hiciese uso de los tornillos $r$ (figs 59, 63 y 64) desapareceria la centracion del retículo.

Hemos visto tambien como se examina si los collares del anteojo son iguales, cuando el nivel está unido el anteojo (fig.s 59 y 63); pero en algunos instrumentos, por ejemplo, el nivel de Egault (fig. 64) no es aplicable el procedimiento esplicado hasta ahora y por tanto hay que seguir otro diferente. Este consiste en colocar la visual perpendicularmente al eje, por los métodos peculiares á los instrumentos del 3.er grupo, y esto hecho, examinar si dicha visual pasa por un mismo punto en las dos posiciones inversas que el anteojo puede ocupar dentro de las horquillas, lo que sucederá si los collares son de igual radio. — Se infiere de lo expuesto, que siempre que para colocar la visual del anteojo perpendicularmente al eje de rotacion de los instrumentos del 1.er grupo, haya que seguir los métodos referentes á los del tercero, habrá que cuidar, al hacer uso de aquellos instrumentos, de poner cada collar del anteojo en la misma horquilla que se le colocó para practicar la correccion de la visual.

El método hasta ahora expuesto para hacer que en los goniómetros la visual sea horizontal, cuando el cero, el 90° ó el 100° del limbo zenital coinciden con el del nonius; supone que con dicho limbo se pueden hacer mediciones conjugadas de los ángulos dependiente ó de las distancias zenitales de una recta, lo cual entre otras condiciones requiere la de que sea un círculo completo. — No es, por tanto, aplicable aquel método á los instrumentos que, como algunas brujulas-eclimetros, tienen por limbos zenitales arcos de círculo. En este caso para practicar la 3ª corrección, se pone en coincidencia el cero, 90° ó 100° del limbo y el cero del nonius; y hecho esto se coloca horizontalmente la visual, como en los instrumentos del tercer grupo, pero haciendo uso de los tornillos que mueven al limbo unido con el nonius: si no existiesen dichos tornillos se podrá hacer uso de los del anteojo, si este es fijo, ó á falta de estos, si el anteojo es de collares, del de coincidencia del nonius. En este último caso habrá que leer el ángulo que forma la visual horizontal con el radio cero (90° ó 100°), para conocer la corrección constante que se ha de hacer á todos los ángulos verticales que se midan en lo sucesivo. — El procedimiento anterior es tambien aplicable á los goniómetros de limbo zenital completo, en que este se mueva con el anteojo y el nonius esté fijo, y á los de limbo fijo y anteojo movible con el nonius.

## Cuarta correccion.

Para hacer la correccion anterior es necesario mover los anteojos de algunos instrumentos y, por tanto, el nivel unido á ellos habrá dejado de ser perpendicular al eje. El objeto de la cuarta correccion es restablecer dicha perpendicularidad. Para estudiarla iremos examinando los instrumentos por grupos.

1er grupo — Nivel de Dalloud = Se ha movido el tornillo t (fig. 63) para corregir la visual; y por consiguiente la tangente en el índice del nivel habrá dejado de ser perpendicular al eje de rotacion del instrumento; pero se puede restablecer la perpendicularidad por medio del tornillo n que no influye en la direccion de la visual.

Nivel de Egault. — Se ha variado la posicion del anteojo por medio del tornillo t (fig. 64): pero como el nivel vá sobre la regla y es independiente del anteojo la visual no se habrá movido, y por tanto no es necesario restablecer su perpendicularidad con el eje de rotacion.

Teodolito de limbo zenital semicircular.
La correccion de la visual se ha hecho valiendose del tornillo c de coincidencia (fig. 59) y se habrá movido el nivel que vá debajo del anteojo. Se restablecerá la perpendicularidad del eje de rotacion del instrumento y de la tangente en el índice del nivel, por medio del tornillo x.

2º Grupo = Aparatos de limbo zenital.
Por la misma razon que en los de limbo semicircular, hay que llevar la burbuja al índice, por medio del tornillo x (fig. 61) cuando el nivel está unido al anteojo; pero cuando, como sucede en algunas brújulas-eclimetros, los movimientos del nivel y del anteojo son independientes, no hay necesidad de variar la posicion de aquél.

Tercer grupo - Nivel de Egaughton.
La correccion 3ª se ha hecho con el retículo y no ha variado la posicion del nivel de aire. Lo mismo puede decirse respecto al nivel de

Gravatt. — No hay pues necesidad de hacer en estos instrumentos la correccion cuarta de que ahora se trata.

## Quinta correccion.

Esta correccion no es indispensable pero si conveniente, en particular en los niveles. Se reduce á colocar horizontal uno de los hilos del retículo y vertical el otro. — Se comprende que esto no es necesario, si se leen las alturas de mira por medio del punto de interseccion de los hilos del retículo; pero si uno de estos es horizontal se aprecian mejor las fracciones de las menores divisiones de la mira, y si el otro es vertical indicará si la mira se halla en el plano vertical determinado por el punto en que ella está situada y el de estacion del nivel. Para ver si un hilo es horizontal; una vez colocado verticalmente el eje de rotacion del instrumento, se dirige la visual á un punto fijo y se hace girar el anteojo al rededor de dicho eje. Si todos los puntos del hilo pasan por el punto observado, estaremos seguros de su horizontalidad y de la verticalidad del que le es perpendicular. En el caso contrario será necesario hacer la quinta correccion.— Para modificar la posicion del hilo se hará girar el anteojo dentro de las horquillas, en los instrumentos del primer grupo. En los demás hay que hacer uso del retículo cuyos (fig. 40) tornillos, cuando están fijos, permiten un pequeño movimto. de rotacion en su plano. Colocado el hilo horizontalmente se vuelven á apretar dichos tornillos.

Conviene hacer la quinta correccion al mismo tiempo que otra cualquiera que haya exigido mover el retículo excepto en los instrumentos del primer grupo. Como en estos el anteojo puede girar dentro de las horquillas, no hay necesidad de tocar al retículo para colocar un hilo horizontal; pero como la posicion del anteojo que corresponde á la horizontalidad del hilo, seria muy fácil perderla, es preciso tener una señal fija que indique aquella posicion. Con este objeto algunos instrumentos de este grupo llevan en el anteojo un tope 2 (fig. 79) y en la parte inferior de la horquilla un tornillo t cuya tuerca b está unida á dicha horquilla: Cuando se ha colocado el hilo horizontal haciendo girar el anteojo dentro de las horquillas, se hace avanzar el tornillo hasta que tropiece con el tope; y así, siempre que haya que volver á poner el hilo horizontal, bastará dar un giro al anteojo dentro de las horquillas hasta que lo impida el choque del tope del tornillo.— En los instrumentos del segundo grupo se hace la correccion quinta á la vez que la que ahora vamos á estudiar; y en los del tercer grupo debe verificarse al mismo tiempo que la tercera.—

## Sesta coreccion.

Los niveles de anteojo no necesitan generalmente mas correcciones que las esplicadas, pero los teodolitos y brujulas-eclimetros necesitan otra correccion.— Consiste esta en hacer que la visual describa un plano vertical al girar al rededor del eje perpendicular al limbo zenital.— Para que esto se verifique son necesarias dos condiciones; que dicho eje sea horizontal y que la visual del anteojo le sea perpendicular.— La comprobacion de que la visual describe un plano vertical, se hace observando una plomada cuyo cordon tenga bastante longitud, situada á cierta distancia del instrumento. Para esto se coloca el eje de rotacion del mismo verticalmente y se dirige el anteojo á la plomada. Si la interseccion de los hilos del retículo oculta siempre un punto del cordon, cuando el anteojo gira alrededor del eje perpendicular al limbo zenital, la visual describe un plano vertical. En el caso contrario no le describe; y esto podrá proceder de que dicho eje no sea horizontal, de que la visual no le sea perpendicular, ó de ambas causas á la vez. — Algunos instrumentos están construidos de modo que sobre el eje perpendicular al limbo zenital puede colocarse un nivel volante; y tienen (fig. 61) en uno ó en los dos coginetes que sostienen dicho eje tornillos correctivos e, por medio de los cuales se le puede inclinar mas ó menos. — En este caso, para hacer que el eje de que ahora se trata sea horizontal, se principia por colocar verticalmente el de rotacion de todo el instrumento, por medio del nivel nn unido al anteojo; hecho esto se pone el nivel volante encima del eje perpendicular al limbo zenital, y haciendo uno de dicho nivel de sus tornillos correctivos y de los e de los cojinetes, se coloca horizontalmente dicho eje, por el procedimiento explicado al tratar del nivel de aire.— Una vez practicadas estas operaciones, como los cojinetes quedan sujetos por los tornillos correctivos, resultará que en lo sucesivo, cuando se ponga vertical al eje de rotacion de todo el instrumento, será horizontal el perpendicular al limbo zenital.

Si para colocar horizontalmente dicho eje no se dispone de un nivel volante, hay que proceder del modo siguiente. Se situa en una estacion M (fig. 81) donde se pueda observar un punto mas bajo y otro mas alto que el centro del limbo zenital. Se pone vertical el eje de rotacion general, se dirige una visual á un punto elevado a y se lee el ángulo α en el limbo zenital. Se fija el movimiento azimutal, se dirige la visual c b á otro punto b del terreno, tal que el limbo indique por debajo de la horizontal c h el mismo ángulo α que antes indicaba por encima; y se marca dicho punto por un piquete $b_1$ ú otro medio análogo. Hecho esto se hace girar el instrumento 180°

al rededor del eje vertical, y se vuelve á dirigir la visual al punto $a$. Se repiten las demás operaciones anteriores y si la visual vuelve á coincidir con el otro punto $b_1$, el eje de giro será horizontal; pero si la coincidencia no se verifica se hace clavar un piquete en el punto $d_1$ indicado por la última visual.

Para corregir el error se marca en el terreno el punto medio de la distancia $d_1 b_1$ y se mueve el tornillo e del goniómetro (fig. 61) hasta que dicho punto esté en la intersección de los hilos. Este procedimiento hay que reproducirle varias veces, hasta conseguir que en las dos posiciones conjugadas del anteojo la visual pase por el punto superior $a$ y por un mismo punto inferior del terreno; y se funda en las consideraciones siguientes. — Si la visual forma un ángulo cualquiera con el eje $mn$ que se trata de poner horizontal (fig. 82) en su movimiento describirá un cono de revolución del que $ca$ y $cb$ (figs. 81 y 82) son generatrices simétricas, con relación al plano que pasa por la horizontal y por el eje de giro $mn$ (fig. 81) el cual será, por lo tanto, perpendicular al

$a c b$ de las dos visuales $c a$ y $c b$. Cuando el eje $m n$ no es horizontal tampoco lo es el plano que le contiene, y por consiguiente el $a c b$ de las visuales estará inclinado. Esta inclinacion cambia de sentido para la observacion conjugada, tomando $m n$ y el plano $a c b$ las posiciones simétricas $m_1 n_1$ y $a c b_1$. De aquí resulta que las intersecciones de los planos $a c b$ y $a c d$ con el terreno serán distintas, y que únicamente se confundirán en una sola cuando el eje $m n$ sea horizontal. — El procedimiento que se acaba de explicar tiene especial aplicacion en los goniómetros de limbo zenital completo; pero es tambien aplicable á los teodolitos del primer grupo, sin mas diferencia que la inversion del anteojo hay que hacerla sacándole de las horquillas.

Cuando los instrumentos no tienen tornillo $e$ (fig. 61) para mover el eje que se apoya en los cojinetes, no puede practicarse la correccion; pero debe comprobarse si está hecha por construccion, como generalmente sucede en dichos instrumentos.

Por lo demás, una vez hecha la correccion, el eje de rotacion del instrumento y el perpendicular al limbo zenital, quedan unidos de tal modo que cuando se coloca verticalmente el primero, el segundo es horizontal; ya solo falta que la visual sea perpendicular á este último eje, para que al girar al rededor del mismo describa un plano vertical.

Supongamos que dicho eje horizontal esté proyectado en c (fig. 81) pero que la visual no le sea perpendicular: al girar esta al rededor de aquel describirá un cono; dos visuales ca cb, tales que $hca = hcb$, siendo ch horizontal, serán dos generatrices de este cono situadas en un plano vertical, y durante el giro las dos posiciones de la visual se irán separando de este plano, tanto mas, cuanto mas se vaya aproximando á la generatriz intermedia, que es la horizontal.

Por consiguiente para colocar la visual perpendicular al eje c, se dirigirá á un punto a que se señalará con un piquete, se hará girar el anteojo hasta que el cero, el 90° ó el 100 del limbo zenital coincida con el del nonius, y se fijará otro piquete en el punto h del terreno

cuitto por la intersección de los hilos del retículo.
Hecho esto, se dará á todo el instrumento un giro de 180.° al rededor de su eje vertical, se dirigirá otra vez la visual al punto a y se hará girar el anteojo hasta que vuelva á ser horizontal. Si la visual pasa por el punto b será perpendicular al eje c y si nó habrá que corregirla. Esto se consigue moviendo el retículo por medio de sus tornillos, hasta que la visual divida en dos partes iguales la distancia del punto en que corta el terreno al piquete b. Después se comprueba la corrección repitiendo las operaciones ó viendo con el auxilio de una plomada, si la visual describe un plano vertical al girar al rededor del eje c.

En los teodolitos de limbo cenital semi-circular no se puede mover el retículo, por que dejaría de estar centrado; lo único que puede hacerse es comprobar si la perpendicularidad de la visual y el eje tiene lugar. En los bien construidos se halla generalmente satisfecha esta condición.

## Levantamiento de planos.

Uno de los procedimientos que se emplean para levantar planos topográficos, consiste en elegir ~~escoger~~ un cierto número de puntos, que se proyectan en un plano horizontal y que convinados entre sí forman alineaciones; y referir después los detalles del terreno á estas alineaciones, por abscisas y ordenadas ó por otros medios que veremos mas adelante.

El conjunto de las trazas horizontales de dichas alineaciones constituyen la red poligonal y las lineas quebradas de que esta se compone se llaman poligonos.

La red poligonal debe circunscribir lo mas cerca posible todos los detalles del terreno y trazarse de modo que se pueda levantar su plano con exactitud. Los vertices de la red deben ser relativamente poco numerosos, á fin de que los errores inherentes á su determinacion ~~determinacion~~ influyan lo menos posible en el trazado del plano; y de que sin invertir un tiempo escesivo puedan emplearse para para hallarlos ~~hallar~~ los procedimientos é instrumentos mas favorables á la exactitud.

Observando estas reglas se consigue trazar en el plano los diferentes poligonos de la red, reduciendo al minimum posible los errores de posicion de sus vertices, y poder emplear al tomar los datos necesarios para proyectar los detalles, procedimientos rápidos y sencillos, puesto que los errores que dichos datos puedan contener no han de influir en los detalles restantes del plano.

Si prescindiendo de la red poligonal se fuese levantando el plano de los detalles, uno tras otro, y este gran número de planos se enlazaran entre sí en el orden correspondiente, sería necesario, para que el plano total fuese lo mas exacto posible, emplear en todos los detalles los procedimientos é instrumentos de mayor precision, lo que exigiria mucho tiempo y muchos gastos y seria poco exacto.

Supongamos que se trata de levantar el plano de una población. Se establecerá una serie de alineaciones AB, BC... IA (figª 86) cuyas trazas formen un polígono cerrado; y otras alineaciones transversales B, 13, 14, 15 G &ª á lo largo de las calles procurando siempre que sea posible, que estas alineaciones partan de un angulo del polígono circunscrito y terminen en otro del mismo polígono; y por último se trazan otras series de alineaciones transversales que unan vertices de las anteriores. Tanto el plano de las alineaciones correspondientes al polígono anterior, como el de las transversales, se levantan con la mayor exactitud posible, y los detalles relativos á las manzanas se determinan por procedimientos mas rápidos y sencillos, tales como los que se han descrito al tratar de la escuadra de agrimensor, ú otros de que mas adelante se tratará.

Los planos del polígono principal y de los transversales se pueden levantar por el método de rodeo.

Este metodo consiste en poner en estacion el instrumento en uno de los puntos como el A (figª 86) medir la distancia AB; el angulo formado por esta alineacion con la AC; trasladarse despues á B y repetir la misma operacion por el lado BC, y así para los demás. Todos estos datos se anotan en registros: en una de sus columnas se ponen los angulos, en otra las distancias y la última está destinada para observaciones; y en ella se insertan las notas que convenga, y siempre la posicion de las estacas que marcan los vértices de las alineaciones con referencia á puntos fijos, porque si al dibujar el plano se encontrara algun error habria que volver al campo, y como las estacas pueden desaparecer, para restablecerlas, pueden referirse á puntos fijos; por ejemplo, si en la I hubiera una casa se tomaria la distancia á los angulos, si la estubiera en la alineacion de una fachada se mediria su distancia á la esquina mas proxima; y cuando no hay puntos de referencia proximos se coloca en la interseccion de dos alineaciones del terreno, por ejemplo la D (fig.ª 86) se croquizan y cortan estas señales en la casilla de observaciones.

Anotadas las distancias y los angulos de las alineaciones se pueden construir las proyecciones horizontales. Los datos para proyectar los detalles de las manzanas pueden tomarse al mismo tiempo ó despues que los de la red poligonal segun el personal de que se disponga, valiendose en este caso de los piquetes de los vertices como puntos de partida. Tambien se refieren á los vértices los estremos de las alineaciones transversales, cuando no es posible que estas partan de uno de ellos.

Antes de dar por terminadas las operaciones relativas al poligono que rodea á la poblacion, debe comprobarse si hay algun error notable en los angulos: para eso sabemos que la suma de los de un poligono es igual á tantas veces dos rectas como lados tiene menos dos. Haremos pues la suma de los angulos dados por el registro y veremos si estas dos cantidades son iguales

En general, habrá diferencia, y esta puede atribuirse á dos causas ó á errores inevitables de los goniómetros ó á los de lectura ó escritura. En la practica se atribuye al instrumento cuando esta diferencia sea mayor que el limite de tolerancia de los errores angulares, el cual depende del goniómetro de que se haga uso. Generalmente se dan por bien medidos los ángulos cuando el cociente de dicha diferencia por el número de ellos es proximamente igual al limite de aproximacion del goniómetro empleado, y en este caso se compensan los angulos, operacion que se reduce á restar ó agregar dicho cociente á cada angulo, segun que la suma de ellos haya resultado mayor ó menor de la que teoricamente corresponde. En otro caso hay que volver á medir los angulos.

Hecha la compensacion de estos se pueden trazar en el papel las trazas de las alineaciones, por medio de una escala, un transportador de nonius, partiendo de A hacia B, por ejemplo, (fig.ª 86); pero si al construir en i un angulo igual á I y al tomar una longitud igual á la correspondiente del terreno resulta en lugar de b a otra recta i a', se dice que el poligono no cierra.

Deduciremos pues, que hemos cometido algun error que no podemos atribuirlo á los angulos, puesto que se han comprobado, luego será del transportador, de la escala ó del diastimetro; hay que examinar de cual de estos depende. Se empieza por medir los angulos en el plano, si hay error se corrige, si no le hay se procede á comprobar las distancias, cuando el poligono tiene muchos lados: se une a con A' empezando por comprobar los lados cuya direccion sea proximamente paralela á esta, se sigue por los perpendiculares y despues los restantes; si en los lados tampoco se ha encontrado el error hay que volver al terreno, en el cual se hacen las comprobaciones y rectificaciones consiguientes siguiendo el mismo orden.

Dibujado el plano, con los datos rectificados, A se separará de A' muy poco, y esta diferencia debe atribuirse á errores inevitables de las operaciones. Por ejemplo: al poner los goniómetros en estacion para medir un ángulo, rara vez coincidirá su eje con la interseccion de las dos alineaciones que se cortan en aquel punto; generalmente estará dentro ó fuera del poligono á una distancia muy pequeña de dicha interseccion, que los prácticos aprecian en dos ó tres centímetros. De aquí resultan errores angulares que serán tanto menores cuanto mayor sea la longitud de los lados del poligono. Vemos pues que la manera de disminuir la importancia de estos errores, es dar á las alineaciones la mayor longitud compatible con las condiciones del terreno y con la precision de los goniómetros.

Para cerrar el polígono se empieza de nuevo su trazado partiendo de A' y forzando algo los ángulos y las distancias en sentido conveniente. Terminado el plano del poligono de circunvalacion se procede á dibujar los trasversales, en los cuales se presentan los mismos casos que en el anterior y se resuelven del mismo modo; pero considerando como puntos fijos los vértices comunes con el poligono principal y como invariables de este. El mismo procedimiento se sigue en cada transversal, respecto á aquellos con quienes tiene dos vértices comunes.

Cuando el plano requiere gran exactitud se trazan los polígonos por medio de sus abscisas y ordenadas referidas á los ejes coordenados rectangulares. Para esto se elige uno de estos ejes rectangulares de modo que forme un ángulo conocido con uno de los lados del polígono. Por medio de este ángulo y de los que forman entre sí las alineaciones, se calculan los que cada una de ellas forma con los ejes; y como estos ángulos y las distancias entre cada dos vértices se hallan las coordenadas de estos, según veremos al tratar de las triangulaciones topográficas. Si desde los diferentes vértices del polígono que rodea la población se pueden dirigir visuales á un punto interior, la compensación de los ángulos se practica como se explicará mas adelante.

Todo lo expuesto anteriormente se refiere al caso concreto de una población; pero la misma marcha puede seguirse para levantar un plano de un terreno cualquiera. En este caso tanto el polígono principal ó circunscrito, como los transversales, se establecen á lo largo de los caminos, en las márgenes de los ríos, y en general en zonas de terreno llanas y despejadas, á fin de que pueda ejecutarse la medición de ángulos y distancias en condiciones favorables á la exactitud.

Hemos dicho que el plano de los detalles se puede levantar por abscisas y ordenadas, valiéndose de la escuadra ó la cinta. Algunas veces están bastante distantes de los polígonos transversales, y no tienen tanta importancia que deban trazarse estos polígonos para referirlos á ellas por abscisas y ordenadas. En este caso, si el terreno está despejado, se recurre á los procedimientos que siguen.

Sea ABH (fig.ª 47) un trozo de polígono, que puede ser el principal y AEI un transversal secundario. Supongamos que entre ellos hay una casa con una cerca m n p q r; si únicamente existiese este detalle, veríamos primero si es posible trazar fácilmente una alineación BE, que no tenga gran longitud y pase cerca de m n p q r; y en este caso referiríamos á ella los puntos m, n, p, q y r por abscisas y ordenadas y el q del mismo modo por medio de una base perpendicular á BE, y que pase lo más cerca de dicho punto. Pero si por ser BE de gran longitud, por que los accidentes del terreno impidan la determinación de puntos intermedios, ó por otras causas no conviniese hacer uso de este procedimiento, se podrían obtener los datos para proyectar los puntos m, n, p, q, r, del modo siguiente.

Se estacionará en A con un goniómetro y se medirán los ángulos mAB y nAB; se estacionará después en B y se medirán mBA y nBA.

Con estos datos y la distancia conocida AB se podrían construir en el plano triángulos semejantes á los A m B, A n B, que darán las proyecciones de los puntos <u>m</u> y <u>n</u> del detalle. Del mismo modo se obtendrían la de r, p y q, por medio de las alineaciones A E, B H y los angulos intermedios en E, A y B.

Siempre que se pueda, se dirijirán tres visuales á cada punto; de este modo hay una comprobacion de que las operaciones están bien hechas. Así por ejemplo, trazando en el plano lineas homólogas á las Eq y Bq se obtendrá la proyeccion de q, y se comprobará si este se halla bien determinado viendo si la linea homóloga Hq pasa por dicha proyeccion. Cuanto menos agudos sean los angulos bajo los cuales se corten las visuales dirigidas á los puntos del detalle, mejor determinadas quedarán las proyecciones de estos. Este procedimiento recibe el nombre de <u>método de interseccion</u>.

Supongamos ahora que se trata de levantar el plano de otro detalle, tal como el arroyo H J I (fig.ª 87). Se podrá en algunos casos evitar del modo siguiente, las operaciones que serian necesarias, si tuviesemos de trazar alineaciones que formen poligonos á lo largo del arroyo, sus longitudes y los angulos que formen entre si. Se estacionará con un goniómetro en un punto L, vertice de uno de los poligonos establecidos para el levantamiento del plano, ó enlazando con ellos por un medio cualquiera (por ejemplo, el indicado en la figura) y se medirán LK, LJ, LI &.ª, y los angulos que forman con una alineacion determinada, tal como la L E. Con estos datos podremos trazar en el plano las lineas homólogas á L K, L J, L i &c.ª cuyos extremos K, J, i, unidos entre si por una curva, darán la proyeccion de una de las márgenes del arroyo. Se determinaría la de la otra del mismo modo, ó bien midiendo la anchura de la corriente en varios puntos.

Este método llamado de radiacion, tiene la ventaja de disminuir el número de estaciones del goniómetro, y de que cuando las distancias pueden determinarse por medio del anteojo, como mas adelante veremos, las operaciones se hacen con rapidez. Empleando los diastímetros ordinarios, solo es conveniente cuando las distancias L K, L J, L i... que hay que medir son muy cortas.

Existe otro método, modificacion del anterior, y que podrá ~~...~~ seguirse cuando las distancias de los puntos del detalle al de estacion del goniómetro sean muy grandes, y el anteojo no sea diastimométrico. Este metodo es el siguiente.

Se estaciona en un punto convenientemente escogido, se dirigen visuales á los a, b, c... del detalle, se toman los ángulos que forman con L E y la distancia L a al primer punto a; pero en lugar de medir las distancias radiales L b, L c... se miden las ab, bc, cd, &c.ª

Para hallar las proyecciones de los puntos a, b, c,... del detalle, se determina primeramente la del punto a, trazando en el plano la recta homóloga de la La, por medio del ángulo ELa y la distancia La, medidos en el terreno, y se construyen despues triángulos semejantes á los bLa, cLb, dLc, en los que son conocidos dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

Uno de los instrumentos mas útiles para el levantamiento de los detalles es la Brújula topográfica, de que pasamos á ocuparnos.

## Brújula.

Una aguja imantada, que puede girar libremente al rededor de la vertical que pasa por su centro de gravedad, toma una ~~distancia~~ direccion determinada, á la que vuelve siempre, despues de algunas oscilaciones, cuando se la separa de ella. Se llama meridiano magnético el plano vertical determinado por dicha direccion, y declinacion de la aguja imantada al ángulo que dicho meridiano forma con el geográfico. La declinacion es oriental ú occidental, segun que la punta Norte de la aguja se halla al Este ó al Oeste del meridiano geográfico.

La aguja imantada forma un cierto ángulo con el horizonte; pero para los usos de la brújula se destruye dicha inclinacion, disminuyendo el peso de la mitad de la aguja situada del lado del Norte ó aumentando el de la otra mitad.

La direccion del meridiano magnético no es fija, porque es variable la declinacion dela aguja imantada; pero se sabe por esperiencia que estas variaciones son de pequeña amplitud en un mismo punto de la superficie terrestre durante muchos meses, y lo mismo cuando se trasporta la aguja á diversos puntos de un terreno de algunos kilómetros cuadrados. Por ahora supondremos que en las condiciones de tiempo y lugar indicadas, la direccion del meridiano magnético no varia, y por tanto consideraremos los meridianos de dos puntos diferentes como paralelos. En esto se funda el uso que se hace delas Brújulas en las operaciones topográficas.

Mas adelante trataremos de la variacion de declinacion de la aguja y de su influencia en dichas operaciones. En Madrid es hoy la declinacion occidental de 19º proximamente.

Se compone la brújula de una caja a b c d, (fig.ª 88) que puede ir provista de uno ó dos niveles para colocarla horizontal. En esta caja hay un limbo circular graduado que vá cubierto con un cristal. En el centro c de este limbo hay una pivote que sostiene la aguja, y que generalmente consiste en un pequeño cono de acero muy afilado, que entra en una pequeña cavidad tambien cónica, practicada en un trozo de ágata unido á la aguja. Cualquiera que sea la disposicion que se adopte, debe hallarse destruida la inclinacion, á cuyo fin se contra-resta la accion magnética, por medio de una gota de cera ó de un pasador convenientemente colocado en la mitad de la aguja colocada al Sur del pivote. La forma de la aguja suele ser la de un rombo muy prolongado y cuya mitad austral ó sea la que está al Norte del pivote se distingue unas veces por su color azul y otras por una señal particular. Otras veces la aguja, está formada por una barrita delgada y puesta de canto.

Para el estudio de la brújula supondremos la aguja reducida á la línea que une sus dos polos, línea que debe pasar por la vertical del centro c del limbo. Con el objeto de que el peso de la aguja no cargue continuamente sobre el pivote y á fin de evitar que este se tuerza cuando se transporte la brújula, hay una palanca de primer género, que funciona por medio de un boton, que cuando se le comprime, la palanca empuja á la aguja y la mantiene apoyada en el cristal del limbo.

Esta disposicion tiene además otra aplicacion, que no deja de ser útil. La aguja tarda á veces en pararse, y sus oscilaciones se pueden destruir, levantandola cuando llegue á la mitad de una de ellas y volviendola á dejar caer sobre el pivote. El limbo de la brújula, unido á la caja de la misma, puede girar al rededor de un eje que le es perpendicular, y que por consiguiente, será vertical cuando el limbo sea horizontal y recíprocamente. Dicho eje debe proyectarse en el centro c del limbo. De uno de los costados b c de la caja sale otro eje m n, paralelo al limbo, y al rededor del cual puede girar un anteojo. Por consiguiente cuando se coloque la visual p q de este anteojo perpendicularmente al eje m n, y el limbo sea horizontal, p q describirá un plano vertical en su movimiento de giro al rededor de m n. Descrita la brujula vamos á ver como se emplea en Topografía.

Supongamos para ello primeramente, que el plano de colimacion del anteojo corta al limbo segun el diámetro 0°-200°. Propongámonos por ejemplo, levantar el plano de una série de alineaciones determinadas por los puntos A, B, C, D, &c. (fig.ª 90) siguiendo el método de rodeo.

Se denomina **rumbo** de una alineacion el angulo que el plano de esta forma con el meridiano magnético; se le suele tambien llamar **azimut ó arrumbamiento.** La determinacion del rumbo de una alineacion por medio de la brujula es sumamente sencilla; sea por ejemplo, la alineacion A B (fig.ª 89) Se estaciona en A con la brujula, haciendo que el limbo sea horizontal y que su centro esté en la vertical de A, lo que se consigue por medio de los niveles ó si nó á ojo, observando si las puntas de la aguja enrasan con el limbo constantemente al hacer girar la caja. Si esto no sucede se mueve la caja en sentido conveniente hasta que se verifique. Hecho esto se mueve la brujula hasta que se dirija con el anteojo la visual al punto B, y entonces como el diámetro 0ᵍ–200ᵍ se confunde en la alineacion AB; el ángulo que en esta posicion indique la punta Norte de la aguja sobre el limbo, será el rumbo pedido que se contará á partir de 0ᵍ y de izquierda á derecha.

Se llama rumbo recíproco ó inverso de una alineacion AB el de la misma alineacion tomada en sentido contrario BA. Este rumbo se mide desde la estacion B; y por la figura se vé claramente, que la diferencia entre el rumbo de una alineacion y su recíproco debe ser 200ᵍ, lo que podrá servir de comprobacion.

Para hacer el levantamiento del plano de la série de alineaciones ABCDE (fig.ª 90) se empezará por instalar la brújula en A, se pondrá el limbo horizontal, se dirigirá la visual á B y se medirá el rumbo de AB. Se hallará por medio de un diastímetro la distancia entre las verticales de A y de B. Se estacionará luego en B, y para obtener una comprobacion se dirigirá la visual en A y se medirá el rumbo BA; se dirigirá despues el anteojo á C y se tomará el rumbo de BC; se medirá despues esta longitud, y se repetirán para C, D y todos los demás puntos las operaciones que se han hecho en B.

Los rumbos y las distancias se anotan en un croquis ó en un registro. En el primero (fig.ª 91) se marcan los rumbos por un arco, en el que se escribe el número de grados, y las distancias se acotan á lo largo de las alineaciones respectivas. La disposicion de los registros es muy variada. En todos ellos deberán estar anotados los vértices del polígono, los rumbos y las longitudes de los lados.

Los trabajos de gabinete necesarios para trasladar al papel los resultados de los de campo se pueden hacer de varios modos. Se podrá hacer uso de un trasportador, cuya graduacion esté en sentido contrario á la del limbo de la brújula. Se principia por marcar en el papel la traza del meridiano magnético (fig. 92) ó sea la meridiana magnética del punto A, que estará marcado en el plano, puesto que A será un vértice del polígono principal ó de uno transversal principal. Se aplica luego el trasportador de modo que su centro se confunda con A y el 0°. venga sobre la meridiana del mismo punto, y se marca el m en que el transportador indique el mismo número de grados que el rumbo de AB, que constará en el croquis ó registro. Se une A con m y sobre esta recta Am se lleva una magnitud á la que represente en la escala del plano la distancia AB. Para los demás puntos B, C, D. se repiten exactamente estas mismas operaciones, y se obtiene así el plano pedido. Si el transportador tuviera su graduacion en el mismo sentido que la brújula seria preciso volverle, si fuera transparente, y en el caso contrario tomar los suplementos à 400° de los rumbos hallados.

Se pueden emplear con el mismo objeto las escalas ó tablas de cuerdas. Las tablas están construidas por medio de la formula conocida

$$\text{cuerda arco } \alpha = 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}\alpha$$

y dispuesto de modo que enfrente de cada número de grados se encuentra el valor de su cuerda.

Supongamos que se trata de trazar un rumbo de 64° cuya cuerda es 9,080, siendo el radio 10.000. Las tablas de Francoeur tienen el R = 10.000. Sea a N (fig.ª 93) la meridiana magnética del punto a, haciendo centro en este punto y con un radio am de 10.000 partes de una escala cualquiera se describirá el arco mn, en el cual se inscribirá la cuerda mn de 9.080 partes de la misma escala, y hecho esto se trazará ab. El número de partes del radio aparece en las tablas enfrente del arco de 60° si la division es sexagesimal, ó del de 66,°66 si es centesimal. Por un procedimiento analogo se pueden trazar rectas que tengan un rumbo dado, haciendo uso de las tablas de lineas trigonométricas naturales.

En lugar de las tablas se puede hacer uso de las escalas de cuerdas, que son su representacion grafica. Tambien se puede emplear papel de horizontes. Consiste este en un circulo graduado que se fija sobre el papel en que se quiere dibujar el plano; de tal manera que el diametro 0°–200° coincida con la direccion.

Norte-Sur y con su graduacion en sentido inverso á la del rumbo de la brújula. Fijado el primer punto a (figª 94) se vé en el registro ó en el croquis cual es el rumbo de la alineacion, por ejemplo, en el caso de AB (figª 90) 330º. Se toma este número en el orientador graduado y se corre una plantilla hasta que pase por su borde a, trazando una paralela a m al radio 0º-330º. Sobre a m se lleva AB que serán, por ejemplo, a b en la escala del plano y fijado b, se trazará por él la paralela b n al radio 0º-280º que es el rumbo de BC. Así se continua hasta terminar el polígono.

Si no se dispusiera de papel de horizontales se puede hacer uso de una construccion que le es equivalente. Se dibuja en el papel la direccion NS del meridiano magnético, y se escoge en ella un punto O (figª 95) al rededor del cual, por medio de un transportador, se marcan todos los rumbos medidos en el campo, anotando en los extremos de estas lineas su valor en grados ó el número ó letra del vértice en que terminan las alineaciones á que corresponde, respectivamente cada uno de ellos. Hecho esto se procede como en el caso anterior.

Este método, aunque muy sencillo, tiene el inconveniente de que si el plano es grande hay que trazar paralelas muy distantes, lo que dá lugar á errores. El método que mas conviene seguir cuando hay que fijar muchos puntos y el plano sea grande, es el que vamos á exponer; pero antes daremos idea del procedimiento en que se funda

El transportador de que se hace uso es semicircular con dos graduaciones (figs 96 y 97) una exterior, que vá de izquierda á derecha y comprende de 0° á 180° ó de 0° á 200°, según se haga uso de la division sexagesimal ó de la centesimal; la otra interior vá en el mismo sentido y tiene de 180° á 360° ó de 200° á 400°. Para fijar un rumbo por medio de este transportador, lo primero que hay que hacer es ver si es menor ó mayor de 180° á 200°, según la division. Adoptaremos una de ellas, por ejemplo, la centesimal.

Supongamos que por un punto A (fig. 98) se quiere marcar un rumbo de 60°. Se traza por A la direccion NS de la aguja magnética y se coloca el transportador de tal manera que su centro esté en A, volviendo su convexidad hacia el Norte, se le hace girar alrededor de A hasta que la division 60° venga sobre la recta NS, y con un lapiz que se apoye sobre el diámetro 0°-200° se traza la recta A0° ó Am que será el rumbo pedido. El sentido del rumbo es siempre del centro al 0° del transportador. Lo mismo se haria en el caso de la figura 99, en que el rumbo dado es de 130°.

Cuando el ángulo es mayor de 200° se hace uso de la graduacion interior. Las operaciones son idénticas, con la diferencia de que la division 300° debe estar hacia abajo, es decir, que debe dirigirse hacia el Sur la convexidad del transportador. Lo mismo que antes, el sentido del rumbo será siempre contado á partir del centro y hacia el 0°. Las figuras 100 y 101 indican la posicion del transportador cuando los rumbos de las rectas sean 270° y 360°.

Cuando el punto no esté en una meridiana no es preciso trazar la que pasa por él, si hay alguna próxima. Sean los puntos a (fig.s 102 y 103) que se hallan en este caso. Entónces se coloca el transportador en uno cualquiera O de la meridiana y se busca como antes el rumbo en la division del transportador; hecho esto se corre á lo largo de la meridiana, coincidiendo siempre con esta el radio, hasta que pase por el punto a el diámetro 0°–200° del transportador; se traza enseguida con un lapiz la linea que formará el rumbo dado, tal como indican las figuras citadas.

Para aplicar este método al caso de la brújula se empieza por trazar en el papel una serie de rectas paralelas á la meridiana magnética, que disten entre si una longitud igual poco mas ó menos al radio del transportador; estas paralelas se trazan por medio de un cuadrado ó rectángulo M N P Q (fig.ª 104) cuyos lados M N y P Q se dividen en el mismo número de partes iguales y se unen despues entre si, obteniendo por este medio las paralelas, sin necesidad de usar las plantillas como en los casos anteriores. Supongamos que se trate de dibujar el plano de la alineacion poligonal A B C D... (fig.ª 90) como en los casos anteriores; marcaremos el punto a y haciendo lo que acabamos de decir, trazaremos por él un rumbo de 330°, tomaremos a b que será el valor de A B reducido á escala y continuaremos así para los demas puntos b c &.ª colocando la convexidad del transportador hácia el Norte ó hácia el Sur, segun que los rumbos sean menores ó mayores de 200°;

y escogiendo en cada caso la meridiana mas próxima al punto de que se trate.

Sucede algunas veces que por un punto d, que no está muy cercano á una meridiana, hay que trazar un rumbo próximo á 0°, 200° ó 400°, como es el de 380° que se presenta en el caso del punto d. Siguiendo el método general pondríamos en coincidencia el radio 0°-380° con la meridiana y despues tendríamos que correr el transportador en esta direccion; pero fácilmente se vé que el extremo 400° describirá una línea m n paralela á la meridiana y que no se puede hacer que el punto d venga á estar comprendido en el radio del transportador. En este caso se resuelve la cuestion trazando otra serie de líneas perpendiculares á las primeras, que equidisten tambien una magnitud igual poco mas ó menos al radio del transportador.

Imaginemos una meridiana aislada N S (fig.ª 105) y un punto a por el cual hemos de hacer pasar una recta, cuyo rumbo sea de 5°. Supongamos colocado el transportador en la posicion acostumbrada, y levantemos en O una perpendicular P Q á la meridiana; observaremos que cuando el rumbo sea 5° la perpendicular P Q formará 100° + 5° con dicho rumbo, y como este está en coincidencia con la línea O O° la division 105 estará sobre la perpendicular P Q. De aquí resulta que corriendo el transportador á lo largo de esta recta hasta que venga á $O_{1}$, podremos marcar el rumbo a b de 5°. Luego cuando encontremos un punto que se halle en estas condiciones, haremos que coincida la perpendicular á la meridiana con el número de grados del rumbo mas 100°, y corriendo el transportador á lo largo de ella tendremos el rumbo pedido. Para evitar estas sumas, algunos transportadores llevan una circunferencia menor, donde van marcados estos ángulos en su verdadero valor. Esta circunferencia lleva tambien dos graduaciones que se obtiene sumando 100° ó 90° con las análogas en la mayor, segun se trate de la division centesimal ó sexagesimal. Las figuras 106 y 107 representan dos de estos transportadores, cuya parte interior, así numerada recibe el nombre de transportador complementario y cuyo uso es el que acabamos de indicar.

Este método se pone ó trazado previo de una cuadrícula, cuyos lados van respectivamente paralelos y perpendiculares á la meridiana magnética. Hemos supuesto trazada la direccion de dicha meridiana. En los planos levantados sin hacer uso de otro goniómetro que la brújula, esta direccion es hasta cierto punto arbitraria, dependiendo generalmente de la condicion de que quepan dentro del papel en que se han de dibujar. Pero cuando se han tomado los ángulos de la red poligonal por medio del teodolito, y solo se ha empleado la brújula en el levantamiento de los detalles para trazar la direccion de la meridiana magnética, se mide en el terreno el rumbo de uno de los lados de la red poligonal y se marca en el plano una recta, que forme con la proyeccion de dicho lado un ángulo igual al rumbo medido.

Con la brújula se pueden seguir tambien los métodos de interseccion y radiacion para el levantamiento de los detalles. Supongamos que haya un punto a (fig.ª 108) cuya posicion se quiere fijar en el plano, y que por ser inaccesible ó estar distante haya que emplear el método de interseccion. Se hace estacion en A y se dirige la visual á a, marcando el rumbo de esta visual Aa; despues se pasa á B y se repiten las mismas operaciones, midiendo el rumbo de Ba. En el plano vendrá dado el punto a por la interseccion de dos rectas, que partiendo de los vértices representativos de A y B, formen los dos rumbos medidos en el campo.

Puede tambien hacerse aplicacion del método de radiacion. Sea A (fig.ª 109) un vértice del polígono principal ó de un transversal principal BAC... y supongamos que desde este punto A se quiere sacar un detalle, por ejemplo, una vereda. Se hace estacion en A, haciendo que el centro del limbo coincida con la vertical de este punto y se pone el limbo horizontal. Se dirige la visual á B y luego á todos los demás puntos M, N, O, .. &ª hasta C, siempre por un mismo orden y leyendo los rumbos correspondientes que se anotarán en el croquis. Si seguimos el procedimiento de radiacion mediremos todas las distancias radiales AM, AN, AO, &ª, ó bien primero AM y luego MN, NO, OP y PQ, anotando todas estas distancias. Los trabajos de gabinete se hacen en cada caso como ya se ha explicado.

Por medio de la brújula se puede tambien hallar el ángulo que forman entre sí dos alineaciones. Sean estas A B y B C (fig.ª 40); se estaciona en B y la aguja tomará una cierta posición según la dirección NS. Se dirige la visual á A y se lee el rumbo $r$; se hace lo mismo para C y se obtendrá el rumbo $r'$ de B C. La diferencia $r'-r$ de estos dos rumbos, será el ángulo de las dos alineaciones, ó como sucede en el caso actual será $360^\circ-\alpha$, es decir, su suplemento á cuatro rectos. Vemos pues que para esta medición la brújula no presenta ventaja alguna sobre los goniómetros que hemos descrito anteriormente, lo que es causa de que no se use con este objeto

## Escentricidad del plano de colimación.

Hasta ahora hemos supuesto que el plano de colimación del anteojo pasaba por el centro del limbo, pero al describir la brújula ya hemos dicho que el anteojo vá al lado de la caja. Entre otras varias razones se adopta esta disposición, á pesar de los errores que puede introducir, porque siendo la brújula un instrumento en que se hacen las lecturas á simple vista, si el anteojo estuviera centrado no dejaría ver el limbo con la suficiente claridad.

Adoptado ya el que el anteojo vaya á un lado de la caja, haremos una observación, y es que, á fin de no confundirse, se deben leer siempre los rumbos con la punta Norte de la aguja y dirigir las visuales con el anteojo colocado á la derecha del observador. Si no se hiciera siempre así, sería preciso anotarlo en el registro, y esto puede dar lugar á equivocaciones.

Supongamos una brújula en que el plano de colimación no pase por el centro del limbo; al girar al rededor del eje vertical del instrumento, ocupará aquel plano distintas posiciones cuya envolvente será un cilindro de revolucion, de radio igual á la mínima distancia del centro del limbo al plano de colimacion. Vamos á ver cual es el error que esto produce, suponiendo la brújula reducida á un limbo y su anteojo.

A B (figª 111) es una alineacion cuyo rumbo queremos medir: estacionemos en A y hagamos girar el anteojo al rededor del eje hasta que veamos á B. Siendo el diámetro 0º–200º paralelo al plano de colimacion, leeremos el rumbo desde 0º hasta la punta norte, como ya hemos dicho. Ahora bien, este rumbo no es el de la alineacion A B, sino el del plano de colimacion; y por lo tanto cometemos un cierto error $e = 0^o A 0^{o\prime} = A B D$; y se llama error de excentricidad del plano de colimacion. Se han discurrido medios diversos para anular este error, siendo los principales los siguientes.

Uno de ellos, consiste en colocar cerca del pie del jalon ó banderola una tablilla, cuyo extremo esté á la misma distancia del eje del jalon que el anteojo del centro (figª 112). Otras veces llevan los jalones en la parte superior (figª 113) una tablilla pintada de encarnado, con una raya blanca en medio que marca la referida distancia. Fácil es ver que con cualquiera de estas disposiciones se anula el error, puesto que tomando B B′ (figª 111) perpendicular á A B é igual á la excentricidad A D, y dirigiendo la visual desde D′ se tiene el verdadero rumbo de A B.

Otro de los medios de eliminar este error consiste en hacer dos mediciones: en la primera se mide el rumbo con el anteojo á la derecha del observador, y la segunda con el anteojo á la izquierda. Sea como antes AB (fig.ª 114) una alineación; supongamos estacionada la brújula en A, y representemos el limbo y la traza del cilindro envolvente de las posiciones del plano de colimación. Dirigiendo la visual á B el $0^\circ$ estarán en una paralela á BM que pase por el centro A del limbo. Llamemos $e$ el error $0^\circ AC$, que es la diferencia entre los rumbos de la visual y de la alineación; el verdadero rumbo de AB es CAN, de manera que designándolo por $R$ y por $l$ la lectura hecha $0^\circ AN$, tendremos $R = l - e$. Hagamos girar el anteojo hasta que venga á M' y dirijamos de nuevo la visual á B, para lo cual habrá que invertirlo y traer el ocular hacia el observador. La segunda lectura nos dará $CAN = 0^\circ AN - 0^{\circ\prime} AC = 0^\circ AN - (200^\circ - 0^{\circ\prime} AC')$ teniendo en cuenta que el sentido de la graduación del limbo es el indicado por las flechas. Ahora bien, llamando $l'$ á la lectura $0^{\circ\prime} AN$ y observando $0^{\circ\prime} AC' = M'BA = e$, por tener los lados paralelos, será $R = l' + e - 200^\circ$.

No conocemos $e$, de modo que no puede darnos el valor de $R$ ninguna de estas dos igualdades, pero sumándolas resulta $2R = l + l' - 200^\circ$ de donde $R = \frac{l + l' - 200^\circ}{2}$; lo que nos dice que para hallar un rumbo sin error de excentricidad, no hay mas que dirigir una visual con el anteojo á la derecha, luego otra con el anteojo á la izquierda, y sumar las dos lecturas, restar $200^\circ$ y dividir por dos directo. En la figura que nos ha servido de ejemplo el segundo rumbo $l'$ es mayor que $200°$ y pudiera restarle ya los $200°$ al hacer la lectura. Supongamos ahora que la aguja tiene la posicion que indica la figura 115; tendremos como antes en la primera lectura $R = l - e$.

Hagamos girar la brujula para dirigir la segunda visual y entonces será $R = CAN = 0°'AN + 200° + 200°'AC$ ó sea $R = l' + e + 200°$ sumando $2R = l + l' + 200°$ y $R = \frac{l + l' + 200°}{2}$ lo que nos dice, que en este caso hay que añadir $200°$; y que por lo tanto se ha de tener en cuenta la posicion de la aguja y ver si el segundo rumbo es mayor ó menor de $200°$. En el primer caso se restarán y en el segundo se sumarán $200°$.

Hay otro medio de eliminar el error de excentricidad, pero no es tan exacto. Hemos visto que dicho error es el angulo $0°CA$ (fig.ª 116) que el diametro paralelo al plano de colimacion forma con la alineacion; y que es igual al $CBM$; por consiguiente cuando $B$ esté en el infinito se anulará. Vamos á ver que sobre la alineacion $CB$ se puede tomar un punto, á partir del cual, el error de excentricidad es menor que los inevitables de observacion en el limbo y en el transportador. La distancia es facil de calcular. La figura 116 nos dá

$$\operatorname{sen.} CBM = \frac{CM}{CB}$$

y segun acabamos de decir, este angulo $CBM$ debe ser igual, como limite superior, al error resultante de los que hemos mencionado. En las brujulas ordinarias, la suma de todos los errores es, por término medio, 20' centesimales. Si representamos por d la excentricidad CM tendremos

$$CB = \frac{d}{\text{sen.}\ 0^{\circ},20} \qquad (\text{para } d=0,10\ ;\ CB=28^{m},57)$$

y el valor que obtengamos para CB, después de sustituido el correspondiente de d, nos dará la distancia á la cual el error de excentricidad es igual á los errores instrumentales. Colocando los jalones á mayor distancia, que la hallada, se irá disminuyendo el error. Las rectificaciones y comprobaciones de los niveles, del anteojo y del limbo cenital (si le tiene) de la brujula, son las que hemos estudiado al tratar de la correccion de instrumentos. Ahora solo nos ocuparemos de las que le son peculiares.

1ª El punto de suspension y los dos extremos de la aguja deben estar en linea recta.

Para ver si esto se verifica se toma un papel que se coloca sobre una mesa, y se clava una punta de acero, que servirá de pivote, y que conviene sea poco alta. Se traza en el papel una recta que pase por el pivote, se saca de la caja la aguja imanada y se la coloca sobre el pivote, como no coincidirá con la recta, puesto que tomará la direccion de la meridiana magnética, se hace girar el papel hasta que la punta Norte de la aguja imantada venga sobre la recta, y se vé si entonces la punta Sur se proyecta sobre la linea recta trazada en el papel.

## 2ª La vertical del extremo del pivote debe pasar por el centro del limbo.

Si la aguja tiene alguna excentricidad, produce error en las lecturas que se hacen en el limbo, y vamos á ver que este error es variable. Supondremos que colocamos los jalones á mayor distancia que el límite antes calculado, lo que equivale á suponer centrado el anteojo.

Sea $w$ el centro (figª 117) y $p$ el pivote; este describirá una circunferencia de cuento al rededor del eje. La aguja imantada tomará una cierta dirección N S. Supongamos que vamos á medir el rumbo de la alineación $w$ B; la lectura que hagamos será $0^\circ N = l$ y el verdadero rumbo $0^\circ A$ será

$$R = l - e$$

llamando $e$ al error A N. Consideraremos otro punto B y dirijámosle la visual; el pivote habrá venido á $p'$ y la aguja tomará otra posición N'S' paralela, pero distinta de la anterior. El rumbo será ahora

$$R' = l' - e'$$

siendo $e' =$ A N' el error, que es ahora diferente que el anterior. Este error variable va aumentando (si suponemos que la aguja esta sobre A B en su primera posición) hasta que el pivote viene á $p_2$, disminuye hasta que vuelve sobre A B, para volver á aumentar y luego á disminuir. Su máximum tiene cuando la linea recta que une el centro con el pivote, como $w\,p_2$ es perpendicular á la meridiana magnética. Su mínimum es igual á cero cuando la aguja viene á colocarse sobre esta misma línea. Este error se puede eliminar de varios modos.

1º. El medio mas sencillo y que primero se ocurre es corregir el pivote, trasladandole al centro. Pero puede suceder que despues de hecha la correccion, se olvide suspender la aguja por medio de la palanca y quede insistiendo sobre el pivote, lo que daria lugar á que este se descentrase.

2º. Se puede anular el error haciendo lecturas en ~~las puntas~~ las puntas Norte y Sur. Sean $w\,M$ la alineacion y la posicion de la aguja NS (fig. 118), tracemos por $w$ una paralela AB á NS. Llamando $l$ la lectura $0^\circ N$ hecha con la punta Norte y $e$ el error AN tendremos para $M\,w\,A$ el valor

$$R = l - e$$

Leamos con la punta Sur

$$0^\circ A = 0^\circ S + BS - 200^\circ$$

ó sea

$$R = l' + e - 200^\circ$$

De donde

$$2R = l + l' - 200^\circ$$

y

$$R = \frac{l + l' - 200^\circ}{2}$$

valor independiente del error. Observemos que la segunda lectura es mayor que 200º. Si como en el caso anterior el 0º hubiera estado á la derecha de la punta Norte, se deduciría que

$$R = \frac{l + l' + 200^\circ}{2}$$

Por consiguiente para ver si una brújula está centrada hay que comprobar si es 200° la diferencia de las dos lecturas. Pero como hay una posicion particular, en la que esto se puede verificar sin estar centrada la aguja deberemos examinar si esto sucede en otras dos lecturas, colocando el diámetro 0°-200° en sentido normal á la primera posicion.

3º. Otro método consiste en determinar el rumbo por doble visuales, con anteojo á la derecha y á la izquierda.

Para esto se dirige la visual á M (fig.ª 119): como suponemos el anteojo centrado, el 0° estará en u M. Si la aguja estubiere centrada ~~ocuparemos~~ ocuparia la posicion AB; pero ahora tomará la posicion NS, por ejemplo. Tendremos pues:

Anteojo á la derecha; primera lectura $0^\circ A = 0^\circ N - AN$.... $R = l - e$

Anteojo á la izquierda, segunda lectura (el 0° habrá venido á 0°', el pivote p, á p' y la aguja quedará segun N'S')

$$0^\circ A = 0^{\circ\prime} A' - 200^\circ = 0^{\circ\prime} N' + N'A' - 200^\circ.$$

ó sea

$$R = l' + e - 200^\circ$$

Se deducirá de aquí

$$R = \frac{l + l' - 200^\circ}{2};$$

y si el cero hubiera estado á la derecha de la aguja en su primera posicion $R = \frac{l + l' + 200^\circ}{2}$

4.º Cuando se levanta un plano por el método de radiacion ó de interseccion conviene seguir el método que acabamos de indicar; pero si se sigue el de rodeo es preferible el siguiente:

Sea AB la alineacion propuesta (fig.ª 120) Haciendo estacion en A se tendrá

$$R = l - e$$

Trasladamos la brújula al otro extremo B de la alineacion; con el anteojo tambien á la derecha dirigimos la visual á A. El pivote estará en p' sin variar su posicion relativa con el 0º, y el verdadero rumbo será 0º BQ' igual al 0ºAP y tendremos

$$R = l' + e - 200^{\circ}$$

Eliminando e

$$R = \frac{l + l' - 200^{\circ}}{2}$$

ó bien en otro caso

$$R = \frac{l + l' + 200^{\circ}}{2}$$

Vemos pues que con el método de las dobles visuales se pueden eliminar todos los errores de la brújula.

## Levantamiento por estaciones alternadas.

Hasta aquí hemos supuesto que para levantar un plano con la brújula haciamos estacion en todos los vértices de un polígono; pero con este goniómetro se puede usar tambien el método de estaciones alternadas. Sea por ejemplo (fig.ª 121) el polígono ABCDE, cuyo plano vamos á levantar siguiendo este método. Estacionada la brújula en A se dirige la visual á B, se toma el rumbo r de AB que mide la distancia AB. Se estaciona despues en C y se mide el rumbo r' de CB', midiendo la longitud BC. Desde el mismo punto C se mide el rumbo r'' de la alineacion CD y su longitud. Despues se estaciona en E para repetir lo que se hizo en C. Vamos á ver que con estos datos se puede trazar el plano. Fijado el punto a se traza la meridiana magnética y se dibuja a b, determinada por su rumbo r. Para proyectar b no habrá mas que tomar a b igual á AB reducida á la escala. En b se trazaria un rumbo x dado por la espresion. $x - r' = 200°$ ó sea $x = 200° + r'$. Puesto que x es el rumbo de BC recíproco de CB ó r'. Así se seguirian trazando todos los demás rumbos y tomando sus longitudes.

El método de estaciones alternadas solo debe emplearse en los casos en que convenga preferir la rapidez á la exactitud.

Cuando se traza sobre el plano la proyeccion a b c d... de un polígono ABCDEF (figa. 122) levantandolo por medio de la brújula, los errores inevitables de los trabajos de campo y de la construccion gráfica, impiden que dicha proyeccion cierre exactamente, resultando generalmente un error de cierre a a'. Para examinar de que procede este error, se vuelve á construir la proyeccion pero en el sentido a f' e' d'... y se comparan los lados af' y af, e'f' y ef, e'd' y ed... bajo el punto de vista de su longitud y de su direccion. Si hecho esto a a', f f', e e' no resultan iguales y paralelas, será indicio de que hay error de rumbo ó de distancia, en el lado anterior al vertice en que aparezca la desigualdad, y es necesario ver en cual de las dos construcciones gráficas se ha cometido el error.

Cuando el error $\underline{aa'}$ es inadmisible por su magnitud, hay que examinar de donde resulta, comprobando la longitud de los lados proximamente paralelos á $\underline{aa'}$ y los rumbos de los que se aproximan á ser perpendiculares á esta linea. Si procediendo de este modo no se halla la causa del error del cierre, se divide el poligono en partes, por medio de rectas que unan dos vertices, y se construyen estos poligonos. Haciendo varias combinaciones, suele hallarse la parte del total en que está el error y la causa de este. Si así no fuese hay que buscar el error ó errores en el terreno, empezando la investigacion por los lados proximamente paralelos ó perpendiculares á $\underline{aa'}$.

Cuando el error de cierre es muy pequeño se reparte entre los lados y rumbos; para lo cual se construye el poligono nuevamente, aumentandolos ó disminuyendolos en cantidades insignificantes, en el sentido conveniente para que se verifique el cierre. Hasta ahora hemos supuesto que la declinacion de la aguja imantada es constante, pero en realidad no es así. Hay que estudiar por lo tanto sus variaciones. La declinacion varia cuando se pasa de un punto de la superficie terrestre á otro, pero la experiencia ha hecho conocer que esta variacion es tan pequeña que no influye en los limites de un plano topográfico. La aguja imantada esperimenta tambien variaciones seculares y diurnas. De las observaciones hasta ahora practicadas resulta respecto de las primeras, que por termino medio, el meridiano magnético cuya declinacion es actualmente occidental, se vá aproximando al geográfico, á razon de unos 8 á 10 minutos por año. Al tratar mas adelante de la brújula de limbo movil se verá el modo de tener en cuenta esta variacion. En cuanto á las diurnas se observa; que la punta Norte de la aguja se pone en movimiento á la salida del Sol, y marcha hácia el Oeste hasta la una del dia; que despues retrocede hácia el Este, durante toda la tarde y que por la noche permanece estacionaria. Resulta de las observaciones practicadas, que esta variacion es de tres á cuatro minutos desde las once de la mañana á las tres de la tarde. Por consiguiente no deberá hacerse uso de la brújula fuera de estas horas, si se han de tomar los rumbos de las alineaciones en condiciones favorables á la exactitud. De otro modo los errores pueden llegar á ser de treinta minutos.

La aguja imantada puede esperimentar variaciones de declinacion por condiciones de la localidad, tales como la proximidad de masas de hierro aparentes ú ocultas. Para conocerlas se toman los rumbos recíprocos $\underline{\alpha}$ y $\underline{b}$ (fig.ª 23ª) de una alineacion AB, cuya diferencia deberá ser 200º, si la direccion del meridiano magnético permanece constante. En realidad $b-\alpha$, á causa de los defectos de toda brújula y de

(Véase Lehagre páginas 123 á 127)

los errores inevitables de las operaciones, rara vez es 200. En condiciones medias $b-\alpha$ no debe diferir de 200° mas que en unos 20; más ó menos. El error debido á las condiciones locales se corrige del modo que se expondrá al tratar de la taquimetría. Las pequeñas masas de hierro, desvian menos la aguja magnética cuando se encuentran en el suelo que cuando se hallan á cierta altura. Las vias de ferrocarriles no ejercen accion sobre ella á cinco metros de distancia y las verjas de hierro actuan á la de treinta metros.

## Brújulas de limbo movil

En esta clase de brújulas el limbo puede moverse independientemente de la caja y el anteojo unido á ella, por medio de un piñon fijo á la caja que engrana con un sector dentado que hay debajo del limbo. ~~Hemos visto anteriormente, que el meridiano~~ Hemos visto anteriormente que el meridiano magnético cuya declinacion es actualmente occidental, se va aproximando al geográfico unos 8 á 10 minutos cada año.

Sucede á veces que pasado algun tiempo, hay que proyectar en un plano algunos detalles que no existian en el terreno cuando se practicaron las operaciones para levantar dicho plano.

Sea uno de estos el camino que parte de $C_2$ (fig.ª 123) Si se estaciona con la brújula en $C_2$ y se mide el rumbo de $C_2A$ se hallará que es diferente del que tenia, en las primitivas operaciones; en efecto: siendo Mg el meridiano geográfico, como la aguja imantada se vá aproximando á él, si cuando se levantó el plano en que se va á proyectar el nuevo detalle la meridiana magnética era M'm' en la actualidad será M m. De aquí se deduce, que si se miden los rumbos A B, B C, &c. resultarán mayores que los antiguos. Hemos visto tambien que para dibujar el plano levantado por medio de la brújula hay que trazar una cuadrícula; y supongamos que así se hiciera en el plano de que tratamos. Si queremos trazar el detalle nuevo no podremos servirnos de dicha cuadrícula, puesto que ha variado la direccion de la aguja magnética y habrá necesidad de otra nueva formada de líneas perpendiculares y paralelas á la direccion actual de la misma. Para evitar esto se pueden corregir los rumbos medidos ahora, refiriéndolos al antiguo meridiano magnético, restando de todos los rumbos actuales el ángulo de los dos meridianos. Este ángulo es la diferencia entre los rumbos antiguo y actual de una misma alineacion, tal como la C A. Para corregir los rumbos sin necesidad de hacer operaciones aritméticas se emplean la brújula de limbo móvil del modo siguiente.

Se hace estacion con la brújula en un punto, tal como C, se dirige la visual á A y se mueve el limbo, por medio del piñon, hasta que la punta Norte marque el rumbo antiguo, lo q. es equivale á hacer correr el 0° del limbo un ángulo igual al que forman los dos meridianos magnéticos. Se ve desde luego que dejando el limbo en esta posicion, los rumbos que en él se lean estarán corregidos de la diferencia de meridianos magnéticos.

Hecha esta variacion del cero del limbo, el diametro 0° 200° habrá dejado de ser paralelo al plano de colimacion del anteojo, pero no influye en los angulos que forman entre si las alineaciones del detalle. Sean por ejemplo, las alineaciones AB y AC (figª 124): estacionando la brujula en A la aguja magnetica tomará una cierta posicion NS y el ángulo ABC será igual á la diferencia $r-r'$ de los rumbos de las alineaciones. Si la aguja es de limbo movil se hace girar el limbo, el 0° no estará en la alineacion AB; estará en $0_1^\circ$ á una distancia $0_1^\circ\,0^\circ$ de 0° igual á la correccion del meridiano magnetico. Al dirigir luego la visual á C el 0° habrá recorrido el mismo ángulo de las dos alineaciones y estará en $0_1^{\circ\prime}$; la diferencia de los rumbos $r_1$ y $r_1'$, será la misma que $r-r'$.

Esta disposicion de las brujulas de limbo movil hace muy ventajoso su uso para una porcion de operaciones topograficas. Un caso enteramente análogo al anterior puede presentarse en el replanteo de una via de comunicacion. Se habrá levantado el plano y si al cabo de algunos años se vá á proceder á la ejecucion del camino, resultará que al instalar la brujula en un vertice (marcado en el terreno desde que se levantó el plano) y dirigir la visual á otro vertice tambien marcado, nos encontraremos con que la aguja señala un rumbo distinto del indicado en el plano.

Si la brujula es de limbo movil se corrige este hasta que la aguja imantada marque en el primer vertice el rumbo antiguo, y se pueden continuar las operaciones sin tener que efectuar ninguna operacion aritmetica

Cuando se trata de levantar un plano de gran extension, limitada por un poligono cerrado 1, 2, 3, 4, ... 15, 16 (fig.ª 125); se empieza como ya sabemos por dividir este poligono por transversales principales 4 15, 7 12, y luego se subdividen por transversales secundarias. El poligono 1, 2, 3 ... 16 y las transversales principales se levantan con gran exactitud, valiendose de un teodolito, y la brujula se emplea en las transversales de ultimo orden y en los detalles. Una de las ventajas que tiene este método, es que pueden ejecutarse los trabajos de campo por varias secciones de personal simultaneamente. Ahora bien, si se toman varias brujulas en un momento dado, como sucederia en este ejemplo, y se mide un mismo rumbo, sucede por regla general que cada aguja marca un rumbo distinto, lo que procede de errores inevitables en la construccion del instrumento. Si las brujulas no fueran de limbo movil se necesitarian, para trazar el plano tres direcciones distintas de la aguja magnetica, una para cada aguja. Pero si las brujulas son de limbo movil, antes de proceder à las operaciones de campo, se arreglan de tal modo que marquen el mismo rumbo para una misma alineacion; entonces cada seccion, puede trabajar, con la seguridad de que las tres direcciones que antes habra, para la meridiana se han confundido en una sola, y de que con una sola cuadricula se podran dibujar las partes del plano levantadas por cada seccion.

Como ultima aplicacion de las brujulas de limbo movil citaremos la orientacion de planos.

*Orientar* un plano es colocarle homologamente á la posicion que ocupan en el terreno los objetos que representa. Para esto basta colocar una linea del plano, paralela y en el mismo sentido que la correspondiente del terreno. Con este objeto se toman generalmente los dos meridianos terrestres y magnético; el primero es preferible porque no varía su posicion, pero se hace uso tambien del segundo.

Cuando se trata de trazar en un plano topográfico la meridiana topográfica, se coloca el plano de colimacion del anteojo de un goniómetro en el meridiano terrestre, y se mide el ángulo de este con una alineacion del terreno ya dibujada en el plano. Trazando en este una recta que forme con dicha alineacion un angulo igual al medido en el campo, se tendrás representada la meridiana geografica.

Con una brujula de limbo movil, se pueden obtener desde luego en el campo los angulos que forman las alineaciones con el meridiano geográfico. Para esto no habrás mas que poner en coincidencia el plano de colimacion de la brújula con dicho meridiano y hacer que la aguja marque cero en el limbo, por medio de un movimiento independiente de la caja y el anteojo.

## Triangulaciónes topográficas

Cuando el terreno cuyo plano se trata de levantar es de considerable estension el polígono principal y los transversales resultan de gran longitud y compuestos de muchos lados, lo que dificulta la investigacion, y correccion, de los errores.

Las triangulaciones topográficas, tienen por objeto determinar, con la mayor exactitud posible, las proyecciones horizontales de un cierto número de puntos del terreno, que fraccionando los polígonos suministran puntos de comprobación, menos distantes que los de la red poligonal.

Como representa la fig.ª 127, una triangulación, se compone de alineaciones 1.5, 5.17, 17.1, 8.11, 11.14, 14.8 ... cuyas trazas horizontales forman triángulos, algunos de los cuales tienen por vértices otros correspondientes á la red poligonal, y la dividen en polígonos parciales como el 1.2.3.4.5, 11, 12.13.14, &ª. El conjunto de los triángulos recibe el nombre de red triangular, y sus vértices el de puntos trigonométricos.

Para determinar las proyecciones de los puntos trigonométricos con la mayor exactitud posible; 1.º Se mide una de sus alineaciones valiéndose del mejor de los ~~[illegible]~~ diastímetros topográficos de que se disponga, y se reitera la medición varias veces para poder obtener un término medio de su longitud, que se aproxime más á la verdad que la que resulte de cada medición. 2.º Se miden los ángulos de la triangulación con un teodolito, por procedimientos que atenúen los errores de la medición inevitables.

Estos procedimientos son dos: el de repetición y el de reiteración; pero solo se tratará ahora del primero, dejando el segundo para cuando se explique la medición de los ángulos en las triangulaciones geodésicas. Para dar idea del método de repetición, observaremos que cuando se mide el ángulo A de dos alineaciones no se obtiene un valor verdadero, si no otro valor $a \pm e$, siendo $e$ un error resultante de los que se cometen inevitablemente por la imperfecta construcción de los instrumentos y por la imperfección de nuestros sentidos.

Supongamos que se han hecho las operaciones necesarias para medir el ángulo $a$ que forman la alineación $\underline{1.5}$ y la $\underline{1.17}$ (fig.ª 127) con un teodolito estacionado en el punto 1, y que el plano de colimación del anteojo está coincidiendo con la segunda alineación $\underline{1.17}$; si leyéremos el ángulo marcado en el limbo, obtendríamos un valor $a \pm e$; pero si en vez de esto hacemos girar todo el teodolito alrededor de su eje vertical, hasta que el plano de colimación del anteojo se confunda con el de la primera alineación, $\underline{1.5}$; y después dejando fija la parte inferior del teodolito, damos un movimiento de rotación á la superior, al limbo, hasta que el plano de colimación coincida con la segunda alineación $\underline{1.17}$, y leemos el ángulo; obtendremos un número de grados $a \pm e + a \pm e' = 2a \pm e \pm e'$ cuya mitad será un valor mas aproximado del ángulo $\underline{a}$ de las alineaciones que $a \pm e$ y $a \pm e'$. En efecto llamemos $A$ á este valor, será $A = \frac{2a \pm e \pm e'}{2}$ Como no hay razon para que todos los errores sean positivos ó negativos, lo mas probable, en general, es que sean de signo contrario, y entonces suponiendo que cualquiera de ellos $\underline{e}$ es positivo y el otro negativo $A = a + \frac{e - e'}{2}$ que se aproxima mas al ángulo $a$ de las alineaciones que los valores $a + e$ y $a - e'$; puesto que $\frac{e - e'}{2}$ es menor que $\underline{e}$ y que $\underline{e'}$.

Supongamos que en vez de leer el angulo $2a\pm e\pm e'$, hacemos girar todo el teodolito, hasta que la visual pase por el punto 5; que dejando fija la parte inferior de aquel damos un movimiento de rotacion á la parte superior, hasta que el punto 17 se halle en la visual y así sucesivamente ~~la~~ la lectura final seria $na+\Sigma e$ y por el razonamiento anterior deduciriamos que $a+\frac{\Sigma e}{n}$ se aproxima mas al angulo a de las dos alineaciones que $a+e$ y $a-e'$.

Para la repeticion de los angulos solo es necesaria la última lectura, sin embargo conviene efectuar la primera; porque de la comparacion de ambas se deduce si durante las operaciones se ha cometido alguna equivocacion. Y por último 3º. Aunque conocida la longitud de una de las alineaciones y los angulos de todos los triangulos que componen la red triangular, podriamos construir sus homologos en la escala del plano y obtener por este medio las proyecciones de todos los vertices, no se sigue este procedimiento y se sustituye por otro, que se expondrá mas adelante y del que resulta la posicion de varios vertices determinada con mas exactitud.

La forma de los triangulos, debe ser tal, que los errores angulares influyan lo menos posible en el cálculo de las longitudes de los lados; pero como generalmente los accidentes del terreno impiden satisfacer á esta condicion, se consideran admisibles en la práctica, los triangulos topograficos cuyos angulos son mayores que veinte grados sexagesimales y menores que ciento setenta. La longitud de los lados de la triangulacion depende del grado de aproximacion con que puedan obtenerse los ángulos y por consiguiente del goniómetro que se emplee en la medicion de los mismos.

Sea $l$ un lado; al medir el ángulo que forma con otro se cometerá un error; llamemos $e$ al arco correspondiente en la circunferencia, de círculo cuyo radio es la unidad; este error producirá en el extremo del lado una derivacion $l \times e$, en el terreno y en el plano otra $\frac{l \times e}{M}$, siendo $\frac{1}{M}$ la escala. Para que pueda percibirse en un dibujo una distancia gráfica, es necesario que sea mayor que $\frac{1}{4}$ de milímetro, por consiguiente, para que la desviacion gráfica sea imperceptible ha de ser $\frac{l \times e}{M} \leq \frac{0^m,001}{4}$ de donde $l \leq \frac{0^m,001}{4} \times \frac{M}{e}$. De aquí se deduce el límite superior de los lados; en cuanto al inferior en la práctica nasa vez tienen menor de dos kilómetros, á excepcion de las bases, que para su mas fácil medicion se hacen mas cortas. Los puntos trigonométricos deben satisfacer tambien á la condicion de que desde cada uno se descubra el mayor horizonte posible. Se han de hallar además en puntos notables del terreno ofrecer garantías de permanencia ó poder referirse á construcciones u otros puntos fijos por distancias y alineaciones

Antes de proceder al establecimiento de una triangulacion es preciso hacer un reconocimiento del terreno, para elegir los vértices de modo que, satisfaciendo á las precedentes condiciones ocupen posiciones que faciliten las operaciones de campo. Para esto se recorre la localidad, y teniendo presente estas condiciones, se eligen para puntos trigonométricos los que á simple vista parezcan mas convenientes. Al propio tiempo se miden, con goniómetros de poca precision, pero de fácil trasporte y manejo, los ángulos de los triángulos que resulten, y por medio de un diastímetro, que reuna las mismas condiciones, se determina la ~~misma~~ longitud de uno de los lados. Con estos datos se traza el dibujo de la triangulacion, por procedimientos geométricos; y en él se examina si los ángulos y lados son admisibles ó las modificaciones que hay que introducir para que lo sean. Hechas estas, si son necesarias, se vuelven á tomar en el campo los datos para trazar el dibujo de la triangulacion, y trazando esta se reproduce en estudio; y así sucesivamente hasta conseguir que los puntos trigonométricos esten convenientemente situados. Los datos y trazados correspondientes á los puntos trigonométricos definitivos constituyen la triangulacion provisional, que sirve de guia para las operaciones ulteriores. Mas adelante estudiaremos algunos goniómetros de utilidad para estas operaciones.

Obtenida una red aceptable ABC...HK (figª. 130) se marcan en el terreno los puntos en que no haya señales fijas, por medio de piquetes clavados en el fondo de taladros de unos 0m.40, que se rellenan con polvos de carbon y se recubren con un monton de piedras si el suelo es blando; ó por medio de un taladro de 0m.1 de profundidad colocado en el centro de un pequeño triángulo gravado en el terreno (cuando este es de roca) que se recubre con piedras como el anterior. Estos puntos se refieren á objetos fijos, como arboles, edificios, peñas &c.ª para poder hallarlos cuando sea necesario; y si esto no es posible se clavan tres estacas, por lo menos, a una distancia menor que la longitud ordinaria de las cintas ó cadenas topográficas, en sustitucion de los puntos de referencia.

Hecho esto se procede á la eleccion de señales para los vertices en que no las haya establecidas. Dichas señales son objetos artificiales, que sirven de mira para la medicion de los angulos y de la base. Se dice que una señal es visible por vision positiva, cuando se proyecta sobre el terreno; y por vision negativa, cuando se proyecta en el cielo, que es lo mas conveniente. Un pié derecho sosteniendo un tonel, un haz de ramage ó un disco circular, son señales aceptables y mas aun si son visibles por vision negativa. Las señales de noche son linternas, que llevan en la cara por donde emiten la luz un diafragma que sirve de punto de mira. Elegidas las señales se dibujan en los registros la red trigonométrica, designando los vértices con letras y números; y los croquis de las señales de cada punto trigonométrico, con la referencia á los puntos fijos.

Hechos estos trabajos se mide el lado que se adopte como base, varias veces, hasta conseguir cuatro ó cinco resultados cuyas diferencias sean menores que $\frac{1}{2000}$ de dicha base; y se considerará como longitud definitiva de esta, el promedio de aquellos resultados. Se miden tambien los angulos de todos los triangulos de la red, ó sea los que forman, las alineaciones del modo que se explicó anteriormente, y se determina la orientacion de la base, midiendo el angulo que forma el ~~angulo~~ plano vertical que la contiene con el meridiano de uno de sus estremos. Cuando se han terminado todas estas operaciones se puede pasar al cálculo de la triangulacion.

Lo primero que se hace es corregir los angulos para lo cual se suman los tres de cada triangulo y se compara su suma con 180° generalmente se halla diferencia. Si esta es mayor que el grado de tolerancia que pueda admitirse hay que proceder á una nueva medicion de los ángulos de los triangulos en que asi suceda, hasta conseguir que en toda la triangulacion, la suma de los tres ángulos de cada triangulo se diferencie de 180° en menos del grado de tolerancia. Esta cantidad en las triangulaciones topográficas del Instituto geográfico es un minuto sexagesimal. Obtenido este resultado se distribuyen los errores de cada triangulo entre sus angulos, por partes iguales, con lo que se consigue que sumen 180° Los angulos asi deducidos se denominan angulos corregidos. Por medio de ellos y de la base medida, se pueden calcular las longitudes de todos los lados de la triangulacion.

Sea (figª. 131) una parte de esta, y AB la base. En el triangulo ABK se conocera un lado y los angulos adyacentes y se podrian deducir, BK y AK por las formulas $BK = AB \frac{\operatorname{sen} BAK}{\operatorname{sen} AKB}$ „ $AK = AB \frac{\operatorname{sen} ABK}{\operatorname{sen} AKB}$.

En el triangulo BCK se conocerá por tanto BK y como se han medido los angulos adyacentes se tendrá

$BC = BK \frac{\operatorname{sen} BKC}{\operatorname{sen} BCK}$ „ $CK = BK \frac{\operatorname{sen} CBK}{\operatorname{sen} BCK}$ y asi sucesivamente. Aunque para determinar la longitud de los lados basta medir una base AB; conviene en algunos casos medir algunas mas, tal como CG. De este modo, si entre el resultado del calculo de CG y la medicion directa de dicha distancia, hay una diferencia menor que el limite de tolerancia admitido en la medicion de las bases, se tendrá una comprobacion de las operaciones.

En las triangulaciones del Instituto geográfico, cuando la extension del terreno no llega a 10.000 hectareas, se elige una base de 500 à 1.000 metros en el centro de la triangulacion; cuando esta comprendida entre 10.000 y 20.000 hectareas, se eligen dos bases, distantes 6 à 7 kilometros, en sentido del paralelo terrestre. Desde 20.000 à 30.000 hectareas, tres bases y asi sucesivamente.

Conocida la triangulacion de todos los lados de la red, podria esta construirse graficamente, trazando una serie de triangulos semejantes a los que la constituyen; pero como cada punto trigonometrico se obtendrá por medio de los ya proyectados, los errores gráficos se acumularian y la figura definitiva no seria rigurosamente semejante à la que forman las trazas de las alineaciones del terreno. Se prefiere por tanto determinar la proyeccion de cada punto trigonometrico, por construcciones independientes, lo cual se consigue refiriendolos à dos ejes coordenados, del modo siguiente. Se toma generalmente por origen uno de los extremos A de la base (figª. 131) para eje de las Y la meridiana AY, que pasa por dicho punto, y para eje de las $x$ la perpendicular AX à la meridiana. Como se conoce la orientacion BAy. de la base es facil deducir el angulo BAX que dicha base forma con la perpendicular AX. Los angulos que las alineaciones sucesivas forman con los ejes coordenados, se deducen con el auxilio dela triangulacion provisional, teniendo en cuenta las siguientes observaciones:- Sean AB y BC (fig.ª 132) dos alineaciones consecutivas y OX el eje à que se trata de referir su direccion. Si se conoce BAX y se trata de determinar CBy, bastarà observar que este angulo es igual à xBy ó BAX mas el angulo CBx suplemento de ABC. Por consiguiente, cuando el angulo de dos alineaciones consecutivas presenta su concavidad hacia el lado de las x negativas, se obtiene la inclinacion de la segunda alineacion, añadiendo à la primera el suplemento del angulo que las dos alineaciones forman entre si.

Si al contrario, el angulo delas dos alineaciones presenta su concavidad hacia el lado delas x positivas, como en las paginas 134 y 135 se tendra CBy = xBy - xBC ó CBy = BAX - (180º - ABC). De modo que se obtendrà la inclinacion dela segunda alineacion, restando dela primera el suplemento del angulo que ambas forman. Conocido el angulo $\alpha$ de una alineacion con el eje OX se puede deducir el de esta con la meridiana OY. Este angulo es 90º - $\alpha$ si $\alpha$ es ~~angulo~~ agudo y $\alpha$ - 90º - $\alpha$ es obtuso ó en general 90º - $\alpha$ en los dos casos, siendo el resultado positivo en el primero y negativo en el segundo.

Calculados los ángulos que las alineaciones forman con la meridiana y con sus perpendiculares, se determinan fácilmente sus proyecciones sobre estos dos ejes. Si $a$ es la longitud de un lado y $\alpha$ el ángulo que forma con la parte positiva de la perpendicular á la meridiana; su proyección sobre el eje OX será $a \cos. \alpha$ y sobre el eje OY $a \operatorname{sen} \alpha$. Para obtener las coordenadas de los puntos trigonométricos se hace uso del teorema de las proyecciones, según el cual la proyección de la resultante de un contorno poligonal sobre un eje cualquiera, es igual á la suma algebráica de las proyecciones de los lados de dicho contorno. Sea $a$ la longitud en metros de la base (figª 171) $a'$, $a''$, $a'''$ &ª las de las alineaciones sucesivas $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ &ª los ángulos que forman con OX; $x, x', x'', x'''$ &ª las coordenadas de los puntos trigonométricos B C D &ª. Se tendrá desde luego $x = a \cos \alpha$ .... $y = a \operatorname{sen} \alpha$.

En virtud del teorema de las proyecciones y designando con el signo + adiciones algebraicas, se tiene $x' = a \cos\alpha + a' \cos. \alpha'$ $y = a \operatorname{sen}. \alpha + a' \operatorname{sen}. \alpha'$ ó bien ~~$x' = x + a'\cos\alpha'$ ... $y' = y + a' \operatorname{sen} \alpha'$~~.

$x' = x + a' \cos\alpha'$ ..... $y' = y + a' \operatorname{sen}\alpha'$

Del mismo modo $x'' = x' + a'' \cos. \alpha''$ ..... $y'' = y' + a'' \operatorname{sen}. \alpha''$ "

$x''' = x'' + a''' \cos. \alpha'''$ ..... $y''' = y'' + a''' \operatorname{sen} \alpha'''$ y así sucesivamente.

Como para calcular las coordenadas de un punto trigonométrico cualquiera, por ejemplo del G se puede seguir el orden A B C G, ó A K H G ó el A B K C H G. Si los resultados son iguales se tiene una comprobación de los cálculos. Esta comprobación no se hace para todos los puntos, sino para un número mayor ó menor de ellos según la extension de la red. Verificada la triangulacion y hechos los calculos de las coordenadas, se situan en el plano las proyecciones de los puntos trigonométricos, despues de trazar los ejes á que han de estar referidos. Por medio de una triangulacion topográfica, se puede levantar el plano de un contorno poligonal.

Basta para ello establecer una red trigonométrica dispuesta de tal modo, que las alineaciones del contorno lo sean al mismo tiempo de la red. Hechas todas las operaciones de campo y de gabinete resultan conocidas las coordenadas de los vertices del contorno y se obtiene su proyeccion, con mucha exactitud. Este procedimiento es general, pero se aplica con mas frecuencia al caso siguiente.

Sea ABCDEF (fig.ª 136) dicho contorno. Supongamos que en el interior del mismo hay una señal elevada; como la aguja de una torre, un para-rayos &.ª ó que en su defecto pueda establecerse una señal visible desde los puntos ABC &.ª Se puede obtener el plano de este polígono midiendo una de sus alineaciones AB, y determinando por medio de un goniometro los angulos d, i, d', i'... d^v, i^v. Podrian medirse tambien los angulos O; pero como estos se deducen de los d, i,.. &.ª y por otra parte su suma debe ser igual á 360°, se tiene un medio de comprobacion que hace superflua su medicion directa. Sucederá algunas veces que dicha suma no será 360°; pero si dividido el error por el numero de los angulos en O el cociente no excede del limite de aproximacion que proporciona el goniometro empleado se distribuye por partes iguales entre dichos angulos á fin de que sumen 360°. Hecha esta correccion resultará que la suma de los tres angulos de cada triangulo AOB, BOC &c. no será 180°, y será necesario modificar los angulos $d, i$, $d', i'$, &c. aumentandolos ó disminuyendolos por partes iguales, para que la suma de dichos angulos sea 180°. Parece á primera vista que con los angulos asi modificados podrá procederse á los calculos de la triangulacion; sin embargo no es asi; porque las modificaciones hechas en la amplitud de los angulos AOB, BOC... alteran la longitud de los lados y no hay seguridad de que el poligono cierre. En otros terminos; por la resolucion del triangulo AOB (fig.ª 137) en que son conocidos AB, $d_m$ é $i_m$, designando con el subindice $m$ los angulos modificados, se deducen las longitudes AO y BO. Por la del triangulo BOC se obtienen BC y CO

Id ---- COD ---- CD y DO
Id ---- DOE ---- DE y EO
Id ---- EOF ---- EF y FO
Id ---- FOA ---- FA y AO

Para que el poligono cierre es necesario que las longitudes AO, resultantes del primer triangulo ABO y del ultimo FOA, sean iguales. Si la longitud AO deducida del triangulo ABO (fig.ª 137) fuese mayor que la resultante del triangulo FOA, el poligono no cerrará, porque la suma de los angulos de la derecha $d_m$, $d'_m$, $d^v_m$ es demasiado pequeña relativamente á la suma de los ángulos $i_m$, $i'_m$, $i^v_m$ de la izquierda (entendiéndose por ángulos de la derecha y de la izquierda los adyacentes á las alineaciones AB, BC...FA, que ocupan las posiciones de este nombre, para un observador, que colocado en un punto intermedio de dichas alineaciones mirase al punto O) Si la longitud AO, primeramente calculada, fuese menor que la deducida del triángulo FOA, la suma $d_m + d'_m + d^v_m$ sería demasiado grande relativamente á la $i_m + i'_m + i^v_m$. En uno y otro caso hay necesidad de corregir los ángulos $d_m\ d'_m\ d''_m \dots d^v_m$ y los $i_m\ i'_m \dots i^v_m$.

Antes de proceder á los cálculos trigonométricos necesarios para determinar las longitudes de las alineaciones y las coordenadas de los vértices del contorno poligonal hay pues que asegurarse de que dicho contorno cerrara. Se consigue este resultado haciendo aplicación del siguiente

*Teorema* En todo polígono cerrado ABCDEF (fig.ª 138) compuesto de triángulos que tengan un vértice común O, la suma de los logaritmos de los senos de los ángulos de la derecha es igual á la suma de los logaritmos de los senos de los ángulos de la izquierda.

Con efecto, en los triángulos

$$AOB \;----\; \cancel{\frac{AO}{BO}} \;---\; \frac{AO}{BO} = \frac{\text{sen}\, i_m}{\text{sen}\, d_m}$$

$$BOC \;----\; \cancel{\frac{BO}{CO}} \;---\; \frac{BO}{CO} = \frac{\text{sen}\, i'_m}{\text{sen}\, d'_m}$$

$$COD \;----\; \cancel{\frac{CO}{DO}} \;---\; \frac{CO}{DO} = \frac{\text{sen}\, i''_m}{\text{sen}\, d''_m}$$

$$DOE \;----\; \cancel{\frac{DO}{EO}} \;---\; \frac{DO}{EO} = \frac{\text{sen}\, i'''_m}{\text{sen}\, d'''_m}$$

$$EOF \;----\; \cancel{\frac{EO}{FO}} \;---\; \frac{EO}{FO} = \frac{\text{sen}\, i^{iv}_m}{\text{sen}\, d^{iv}_m}$$

$$FOA \;----\; \cancel{\frac{FO}{AO}} \;---\; \frac{FO}{AO} = \frac{\text{sen}\, i^{v}_m}{\text{sen}\, d^{v}_m}$$

Multiplicando entre si estas ecuaciones resulta

$$1 = \frac{\operatorname{sen} i_m \times \operatorname{sen} i'_m \cdots \times \operatorname{sen} i^v_m}{\operatorname{sen} d_m \times \operatorname{sen} d'_m \cdots \times \operatorname{sen} d^v_m}$$

y tomando logaritmos $\log \operatorname{sen} i_m + \log. \operatorname{sen}. i'_m + \cdots \log. \operatorname{sen} i^v_m = \log. \operatorname{sen} d_m + \log. \operatorname{sen} d'_m + \cdots \log. \operatorname{sen}. d^v_m$. Por consiguiente, si despues de hallar, con el auxilio de unas tablas de logaritmos de lineas trigonométricas, la suma de los logaritmos de los senos de los ángulos modificados de la izquierda y la de los logaritmos de los senos de los angulos de la derecha, resultan dichas sumas iguales, el polígono cerrará; si la primera suma es mayor que la segunda, habrá que aumentar los ángulos de la derecha y disminuir los de la izquierda, en cantidades iguales; y á la inversa en el caso contrario. Despues de esta segunda modificacion se aplicará de nuevo el teorema precedente, y en general á todos otros tanteos se conseguirá que las dos sumas sean iguales. Los angulos que satisfacen á esta condicion se denominan angulos ~~corregidos~~ corregidos y no deben diferir de los angulos medidos en el campo, en una cantidad mayor que el limite de aproximacion del goniómetro que se haya empleado para medirlos. Cuando se ha conseguido este resultado, se procede al cálculo de las coordenadas de los vértices, por el procedimiento antes expuesto y se puede dibujar la proyeccion del polígono, valiéndose de dos ejes coordenados que se trazan previamente.

## Resolución de algunos problemas

Muchos son los problemas que se pueden resolver; pero únicament nos ocuparemos de un reducido número; por que vista la marcha que en ellos se sigue no ofrecerán dificultad los demás que se presentan en la práctica.

1º Medir la distancia de un punto accesible á otro que está situado en una zona inaccesible. Sean A y B (figª. 139) dos puntos que satisfacen á las condiciones del enunciado, siendo A el inaccesible. Se elige en el terreno accesible un punto C, de tal modo que la distancia se pueda medir con facilidad por medio de un diastímetro. Hecho esto se estaciona con un goniómetro en el punto B y se mide el ángulo ABC y la distancia BC; despues se hace estacion en C y se mide el ángulo ACB; con lo que se tienen datos suficientes para determinar todos los elementos del triángulo ABC; y entre ellos el lado AB, que es la magnitud que se trata de conocer. En efecto, puesto que en todo triángulo los lados están entre si en la relacion de los senos de los ángulos opuestos á ellos, $\frac{AB}{CB}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$ ó $AB=CB\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$. En el segundo miembro de esta fórmula entran las cantidades; CB, distancia conocida, el seno de C que tambien es conocido, y el seno de A, ángulo cuyo valor podemos obtener por ser igual á $180°-(B+C)$.

2º Hallar la distancia entre dos puntos situados en terreno inaccesible. Sean A y B (figª. 140) estos puntos; se principia por medir una base CD en terreno accesible; enseguida se estaciona con el goniómetro en C, se dirigen visuales á los puntos A y B y se miden los ángulos ACD y BCD; despues se estaciona en D, se dirigen visuales á los puntos A y B y se miden los ángulos ADC y BDC. Hecho esto se determina por el cálculo el lado AC del triángulo ACD, del cual se conocen por medicion directa el lado CD y los ángulos adyacentes ACD y ADC; este cálculo dará $AC = CD \frac{\operatorname{sen} ADC}{\operatorname{sen} CAD}$. De la misma manera por el triángulo CDB, del que son conocidos CD y los dos ángulos adyacentes, podremos calcular el valor de $CB = CD \frac{\operatorname{sen} BDC}{\operatorname{sen} CBD}$. Una vez determinados los valores de AC y CB y conocido el ángulo ACB, diferencia entre los ACD y BCD, se tienen datos suficientes para deducir del triángulo ACB, el lado AB.

3º. Por un punto dado en terreno accesible, trazar una alineacion paralela á otra trazada en terreno inaccesible. Sean (fig. 141) C y AB el punto y la alineacion dadas; despues de hacer las mismas operaciones que en el problema anterior, se conocen todos los elementos del triángulo ABC, y por lo tanto el ángulo ABC; conocido este ángulo se estaciona con el goniómetro en C y se traza una alineacion CF, que forme con CB un ángulo BCF suplementario de ABC, la cual será paralela á AB.

Para trazar la alineacion CF se dirige una visual al punto B, por la rotacion del goniómetro al rededor de su eje vertical, despues de hacer coincidir los ceros del limbo y del nonius hasta que la lectura de estos indique en el limbo un ángulo igual al BCF. Despues se baja el anteojo hasta que la visual encuentre al terreno, y en el punto de encuentro se coloca una banderola, que con el punto C determinará la alineacion CF que se trata de trazar.

4º " Trazar por un punto accesible C una alineacion perpendicular á otra inaccesible AB. Para esto despues de haber trazado la alineacion CF (figª 141) paralela á la inaccesible AB, como se ha hecho en el problema anterior, se dirige la visual á F, por el movimiento de rotacion del goniómetro al rededor de su eje vertical despues de hacer coincidir los ceros del limbo y del nonius; y enseguida, dejando fija la parte inferior, se hace girar la superior al limbo, hasta que el nonius indique 90º, y en cualquiera de los puntos H en que la visual encuentre al terreno, se coloca una banderola. Esta y el punto C determinarán la alineacion CH perpendiculares á AB.

5º " Determinar la proyeccion de un punto, conocidos los angulos que forman entre si las alineaciones determinadas por el y por otros tres de posicion ya fijada en el plano. Sean A, B, C (figª 142) los tres puntos del plano y O el que se trata de fijar. Se estaciona con un goniómetro en el punto O y se miden los angulos $AOB = \alpha$ y $BOC = 6$. Las distancias AB y BC son conocidas, y por tanto se puede hallar la proyeccion de O por medio de la construccion gráfica siguiente: Sobre el lado AB se traza una circunferencia de circulo capaz del angulo $\alpha$ y el punto O se hallará sobre esta circunferencia; igualmente sobre BC se traza otra capaz del angulo B; y como tambien O se hallará sobre esta, se encontrará en la intersección de las dos. Estas dos circunferencias se cortan algunas veces bajo ángulos muy agudos, y por tanto la posición del punto no quedará bien determinada. Se obtiene mayor exactitud en todos los casos por el siguiente procedimiento.

De los triángulos OAB y OBC se deduce haciendo $AB = a$ y $BC = b$ $OB = \frac{a \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} \alpha}$ " $OB = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$ y por consiguiente $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} B}$ ó haciendo $\frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} B} = \operatorname{tang.} \varphi$ " $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \operatorname{tang.} \varphi$ de donde $\frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} C} =$
(1) $\frac{\operatorname{tag.} \varphi - 1}{\operatorname{tag.} \varphi + 1}$ " $\frac{\operatorname{tag.} \frac{1}{2}(A - C)}{\operatorname{tg.} \frac{1}{2}(A + C)}$ (2) $= \operatorname{tag.} (\varphi - 45^\circ)$ De esta última ecuación resulta $\operatorname{tag.} \frac{1}{2}(A - C) = \operatorname{tag.} (\varphi - 45^\circ) \operatorname{tg.} \frac{1}{2}(A + C)$ (1)

(2) Clarck p.º 385

Por otra parte en el cuadrilátero OABC: $A + \alpha + B + C + ABC = 360^\circ$ de donde $A + C = 360^\circ - \alpha - B - ABC$ (2).

De la ecuación (1) se deduce el valor de $A - C$ y de la (2) el de $A + C$; y de estos valores es fácil deducir los de A y C. Conocidos estos ángulos si sobre AB se construye un ángulo BAO igual á A, y sobre B otro ángulo BCO igual á C, la intersección de las rectas AO y CO será el punto O, que se trata de determinar. Cuando ese ángulo O resulta muy agudo, se determina el punto O por sus coordenadas referidas á dos ejes rectangulares, que pueden ser la recta AB y la perpendicular á la misma en el punto A. Tomando AB como eje de las $x$, las coordenadas de O serán $x = AO \cos. A$ " $y = AO \operatorname{sen} A$ ecuaciones en las que A es conocido por las (1) y (2) y AO puede deducirse de la resolución del triángulo AOB. Del mismo modo se hallarían las coordenadas del punto O referidas á la recta BC como eje de las $x$ y á la perpendicular á la misma en el punto C.

(1) Se tiene (Cirodde p.ª 36). $tg(a \pm b) = \frac{tg\, a \pm tg\, b}{1 \mp tg\, a . tg\, b}$. Siendo $\begin{cases} a = \varphi \\ b = 45^\circ \end{cases}$ sale $tg(\varphi - 45^\circ) = \frac{tg\varphi - 1}{1 + tg\varphi} = \frac{tg\varphi - 1}{tg\varphi + 1}$

C. Prolongar una alineacion interrumpida por un obstáculo. Sean A y B (fig.ª 143) dos puntos que determinan una alineacion, y supongamos que esta se ha de continuar á la derecha del obstáculo D. Se estaciona con el goniómetro en un punto C, tal que al mismo tiempo que desde él se vea el B se pueda ver otro cualquiera de los de la derecha del obstáculo, y se miden la distancia BC y el ángulo BCE; enseguida se trasporta el instrumento á B y se mide el ángulo CBA. Con estos datos se puede calcular la distancia CE que hay que llevar sobre CE', para tener un punto de la alineacion AB; puesto que en el triángulo BCE se conocen el lado BC y los dos ángulos adyacentes. De la misma manera se obtiene otro punto F, y con los puntos E y F se puede continuar la alineacion. Tambien podria continuarse por medio del punto E y del ángulo CEF = EBC + ECB.

# Altimetría.

## Nivelacion ~~compuesta~~.

Esta parte de la topografia tiene por objeto la determinacion de las alturas relativas de los puntos del terreno, y el estudio de los procedimientos que se emplean para representar el relieve del terreno. Se llama superficie de nivel, la que como de las aguas tranquilas, es perpendicular en todos sus puntos á la vertical. En topografia se consideran las superficies de nivel como esféricas. Dos puntos estan á nivel cuando pertenecen á una sola de dichas superficies, de lo contrario existe entre ellos una diferencia de nivel igual á la distancia del uno á la superficie que pasa por el otro.

Las curvas trazadas sobre las superficies de nivel, reciben el nombre de curvas de nivel. Se entienden por superficie de comparacion, la de nivel á quien se refieren las alturas de los puntos del terreno. Las distancias de estos puntos á la superficie de comparacion, reciben el nombre de cotas ó alturas. Antes de entrar en el estudio de las diferentes operaciones que constituyen la nivelacion; describiremos un nivel, que por no requerir correccion alguna, no se incluyó en los anteriormente descritos; y daremos idea, de las miras.

## Nivel de agua.

El nivel de agua usado generalmente en la practica se compone (figª. 145) de un cilindro de laton ú hoja de lata de 1m 30 de longitud, encorvado en sus estremos á angulo recto; ó bien terminado en dos esferas a, b y otros pequeños cilindros c, d, perpendiculares al tubo a b y de un mayor diametro, á fin de adaptar á ellos dos frascos de vidrio e, f, de unos 30 mm de diametro interior y 12 c.m de altura.

Para mayor facilidad de trasporte, el cilindro a b se compone generalmente de tres partes a g, g h, h b; y puede por lo tanto, armarse y desarmarse, por medio de roscas y tuercas convenientemente dispuestas en los puntos g y h. Este instrumento se fija un tripode por medio de una pieza conica, junca r, soldada en el punto medio de la parte gh del cilindro horizontal. La pieza r entra à rozamiento en la espiga del tripode. Otros niveles llevan una articulacion de nuez, como se vé en la fig.ª 146. Los frascos del nivel se cubren con los cilindros l k (fig.ª 147) de hoja de lata ó laton, cerrados en su parte superior, los cuales se sujetan por medio de corchetes o, n, en los rebordes c, d (fig.ª 147). Si se llena de agua el instrumento hasta que el nivel en los frascos esté à los $\frac{2}{3}$ de su altura, el liquido terminará en cada uno de ellos por un casquete, y el plano de visual tangente à ambos casquetes será horizontal.

Cuando los frascos tienen igual diámetro, dicho plano permanece à la misma altura en todas las posiciones que pueda tomar el nivel, al girar al rededor de la espiga del tripode. Supongamos que la condicion de igualdad de diámetros no se verifica, y que el nivel está en una posicion tal como a c m n b r (fig.ª 148) en que la espiga no es exactamente vertical, como generalmente sucede. Si despues de congelarse el agua girase el nivel 180° al rededor de su eje o p, el plano a b tomaria la posicion simétrica a'b', la ~~porcion~~ porcion del liquido a', f, r, b, iria a ocupar la posicion a, f, r, b', y la porcion a. c. n b' la a', c' d' b.

Si despues del giro el agua recobrara su fluidez, la porcion a, f, r, b, que ocupaba el tubo mas grueso, pesando sobre la superficie a f obligaria à la columna liquida a, f, m, n, a', c', à elevarse sobre c', a por el tubo de menor diámetro a', c', d', b, para alcanzar el nivel a b. Por consiguiente pasaria al tubo menor una cantidad de agua a, c, d, b' = a', c', d', b; y quedará una parte c. f. r', d, que se repartirá entre ambos tubos, elevando el nivel a b á una cierta altura A B. Las visuales de este nivel son las tangentes á los meniscos del agua. Deben preferirse las inferiores, por que de este modo la mira no queda oculta por los brazos; pero se ha de cuidar de que estos no esten inclinados lateralmente, por que como en este caso la superficie del agua los cortaria bajo un ángulo agudo en un lado y obtuso en el otro, la accion de la capilaridad seria diferente, y la visual seria inclinada. Se corrige este error, visando alternativamente segun las dos tangentes interiores y tomando el término medio de las alturas de mira. Las miras que se usan con este nivel son las de tablilla, que despues se describirán. El nivel de agua experimenta, por la accion del viento, oscilaciones que impiden observar las alturas de mira con precision; su alcance no pasa de 30m á 40m, y aun dentro de este limite, los practicos cometen errores de 0m. 01 á 0m. 02 asi es que unicamente puede ser de alguna utilidad en trabajos de detalles de muy poca extension

## Miras.

Segun se dijo anteriormente, son reglas de madera que colocadas verticalmente en un punto del terreno, sirven para medir la distancia del mismo al plano horizontal determinado por el nivel. Pueden clasificarse en dos grupos.

1.ª Miras de tablilla.

2.ª Miras parlantes.

Las primeras se componen (fig.ª 151) de dos reglas de madera A,B, una de las cuales, A, puede correr frotando á lo largo de la otra B, en virtud de la forma particular de las mismas, que permite este movimiento sin dejar que se separen como está representado en el corte C. La pieza movil se sugeta á la fija por medio de un tornillo de presion t, que penetra en la abrazadera metálica D. La tablilla de la mira es un rectangulo E F, de palastro, de unos 0.m 24 de base por 0.m 20 de altura. La cara anterior está dividida en cuatro rectangulos, dos de los cuales, correspondientes á una misma diagonal de la tablilla, están pintados de un color diferente, con objeto de distinguirlos á larga distancia, destacar la mira de los objetos que la rodeen y señalar bien el punto de interseccion m. Los colores generalmente usados son el blanco y rojo, preferibles al blanco y negro sobre todo cuando la mira se proyecta en sombra. En la parte posterior de la tablilla está fija una abrazadera metalica G, igual á la D, y por medio de la cual puede deslizar á lo largo del cuerpo formado por las dos reglas.

Una de las caras laterales de B está dividida en metros, decimetros y centimetros, desde 0 metros en la parte inferior, hasta dos metros. Si consideramos las dos reglas superpuestas, vemos, que el centimetro dividido en milimetros que hay en la cara lateral de la pieza metálica G, puede correr la distancia comprendida entre cero y dos metros; si fijamos la tablilla en la parte superior de la regla movil, el centímetro dividido que lleva esta en su parte inferior puede recorrer los dos metros y por lo tanto la tablilla puede recorrer cuatro metros. Estas miras tienen el inconveniente de exigir bastante tiempo para colocar el punto m en la visual del nivel, y el de poderse correr la tablilla antes de hacer la lectura, dando un resultado erroneo, todo lo cual se evita con las miras parlantes.

La mira parlante se compone de tres cuerpos de madera (fig.ª 152). El primero a b de seccion rectangular y de una altura de $1^m.60$, á contar del canto inferior, recibe en su interior otro cuerpo de la misma forma, el cual puede correr en sentido de su longitud, lo que permite que pueda estar encerrado en el primero hasta el borde inferior de la cantonera metálica C, ó que pueda sobresalir una longitud b C que es de $1^m.40$. Una regla c d, tambien de $1^m.40$ de longitud puede del mismo modo encerrarse en el segundo cuerpo ó mantenerse fuera de él una longitud c d. La altura total de la mira es de $4^m.40$. Encerrados los dos cuerpos superiores en el a b (fig.ª 153) la mira puede trasportarse cómodamente.

Para hacer uso de esta clase de miras es preciso darles la disposicion representada en la figura 152, lo que se consigue sacando los dos cuerpos superiores, hasta que ajusten los bottones que llevan en los correspondientes taladros, cosa que se verifica por la fuerza elástica de un resorte. Las divisiones de las miras parlantes y su numeracion, estan dispuestas; de modo que puedan leerse las alturas con facilidad y sin temor de equivocaciones. Una de las disposiciones mas usuales es la siguiente.

Los metros están escritos en números grandes de tinta roja y los decimetros en números del mismo tamaño de tinta negra (figª. 154): las lineas que como la a b, comprenden todo el ancho de la escala, son las de separacion de los decimetros; entre cada dos de estas hay un número rojo y otro negro, que ocupan casi toda la distancia que media entre ellas y marcan la altura correspondiente de la linea inferior. Los centimetros están señalados por rectangulos alternativamente blancos y negros, de manera que leyendo de abajo arriba los blancos ocupan en cada decimetro los lugares impares. Los puntos negros indican la mitad del decimetro. Los milimetros estan marcados, de dos en dos por trazos gruesos alternativamente blancos y negros. Algunas miras presentan los números al revés, para que se puedan leer con los anteojos astronómicos de los instrumentos.

Por medio de los niveles y las miras se puede determinar la distancia de un punto cualquiera del terreno á la superficie de nivel que pasa por otro; problema que puede resolverse desde una sola estacion del nivel, constituyendo en este caso la nivelacion simple, ó bien haciendo uso de varias estaciones, lo que da origen á la nivelacion compuesta.

## Nivelación simple

Supongamos que se trata de hallar la diferencia de nivel entre dos puntos a y b (fig.ª 155). La superficie de nivel que pasa por a irá á cortar á una mira colocada en b, en el punto c, y la diferencia de nivel buscada, segun la definicion que hemos dado será la distancia c b = Δ del punto b, á la esfera que teniendo su centro en el de la tierra pasa por el punto a. Coloquemos en estacion en el punto a un nivel y sea N E la superficie de nivel que pasa por la interseccion de sus ejes de rotacion y la visual del anteojo, tendremos: Δ = b E − E c pero E c es igual á N a altura del instrumento, luego Δ = b E − N a, N a puede medirse, pero no b E por dos razones: 1.ª Porque los niveles no dan superficies de nivel esfericas, sino planos tangentes á dicha superficie. 2.ª Por la refraccion atmosférica.

Sin embargo puede determinarse b E del modo siguiente. La visual del anteojo, siendo perpendicular al eje del nivel en el punto N, es tangente á la superficie de nivel del mismo punto y corta á la miras en T. Si la atmósfera fuese de densidad homogenea, leeriamos por medio del anteojo la altura de mira b T; pero como no lo es, la division de la mira que aparece en T, es por efecto de la refraccion la R, cuya trayectoria luminosa R N es tangente á la visual y la altura de mira que leemos es la b R. El valor de b E en funcion de b R es b E = b R − R E y como R E = T E − T R, b E = b R + (T R − T E) (1) fórmula que dará b E, cuan

(1) A no ser en momentos de gran calor, el aire atmosférico es mas denso en la superficie terrestre que á cierta altura ~~disminuye de densidad~~

do sea conocida la altura bR leida en la mira, la correccion de refraccion $\frac{TR}{E}$ y la correccion de esfericidad T E.

Pero T E como se vé en la figura 156 es la parte externa de la secante T D, por lo tanto $NT^2 = (TE + ED) TE$ ∴ NT, con un pequeño error podemos suponerle igual á NE, cantidad que representaremos por K; E D es el diámetro de la superficie de nivel, proximamente igual al de la tierra 2 R; y à la correccion de esferidad T E la designaremos por la letra E. Por consiguiente $K^2 = (E + 2R) E$ ∴ $E = \frac{K^2}{2R + E}$ y como E es muy pequeño respecto à 2 R ∴ $E = \frac{K^2}{2R}$

En cuanto à la correccion de refraccion T R = r, (figª. 155) veremos en geodesia que tiene por expresion $r = 0,08 \frac{K^2}{R}$. Sustituyendo los valores de r y E en vez de T R y T E en la ecuacion (1) y designando bR por L y bE por M tendremos $M = L - 0,42 \frac{K^2}{R} = L - 0,000000066 K^2$ (2) y por consiguiente $\Delta = L - 0,000000066 K^2 - A$ .....(3) (3) llamando A la altura N A de la visual del nivel sobre el punto de estacion ò sea la altura del instrumento.

La ecuacion (3) dà la diferencia de nivel entre dos puntos; cuando se conoce la lectura L hecha en la mira, la distancia K à esta del punto de estacion del nivel y la altura A. Puede prescindirse de medir K en algunos casos, pues si en la formula (3) se hace K = 100 metros, resulta $\Delta = L - 0,^{m}00066 - A$ y como el término numérico es menor que los errores que se cometen en las nivelaciones, se tiene $\Delta = L - A$. Lo que nos dice, que cuando la distancia K del punto de estacion à la mira, sea menor que

Clamada por Ulla

sobre ella y por eso la visual NT se refracta segun una curva NR concava hacia la tierra

100, se puede prescindir de las correcciones de refraccion, y esfericidad. Pero aun cuando se sujetaren mira y nivel à la condicion de $K < 100^m$, siempre tendria este medio de hallar la diferencia de nivel dos inconvenientes: 1º. la medicion de la altura del instrumento que no puede hacerse con gran exactitud; y 2º. que no podrian determinarse diferencias de nivel mayores que la diferencia entre la altura total de la mira, y la menor del instrumento.

Para obviar estos inconvenientes, se practica la nivelacion simple, colocando el nivel en un punto cualquiera y miras en los dos cuya diferencia de nivel se trata de hallar. Sean estos (figª 157) A, A' y B B' y N el punto de estacion del nivel. Llamando M y M' las distancias de los dos primeros à la superficie de nivel que pasa por el punto N N' del instrumento; L y L' à las ~~alturas~~ lecturas hechas en las miras A A' C, B B' D y K K' las distancias del punto N à dichas miras, tendremos $M = L - 0{,}42\frac{K^2}{R}$ „ $M' = L' - 0{,}42\frac{K'^2}{R}$ y la diferencia de nivel $\Delta$ será $\Delta = M - M' = L - 0{,}42\frac{K^2}{R} - L' - 0{,}42\frac{K'^2}{R}$ „ $\Delta = L - L' - \frac{0{,}42}{R}(K^2 - K'^2)$. Cuando $K = K'$ resulta $\Delta = L - L'$.

De modo que colocando el nivel à igual distancia de las miras, desaparece el termino, referente à las correcciones de esfericidad y refraccion; y se obtiene la diferencia de nivel, restando las lecturas hechas en las mismas miras

La ventaja que por este medio se obtendria, no seria de bastante importancia si precisamente tuviese que situarse el nivel equidistante de los puntos dados, pero vamos à ver que basta que ocupe proximamente dicha posicion. En efecto el término correctivo se puede poner bajo la forma $c = \frac{0.42}{R}(K'+K')(K-K')$ y haciendo $K+K' = 200$ metros, distancias que pocas veces conviene pasar en las nivelaciones detalladas; y $c = 0^m,0005$; resulta $K-K = 24$ metros. (1) De aqui se deduce que colocando el nivel á simple vista, á igual distancia de las miras; se puede hallar la diferencia de nivel, restando una de otras las lecturas hechas, en las mismas sin necesidad de hacer las correcciones de esfericidad y refraccion.

Ocurre á veces en la practica, que los accidentes del terreno, impiden colocar el nivel en posicion, proximamente equidistante de las miras. En este caso puede tambien prescindirse del calculo de los errores de esfericidad y refraccion, siguiendo el procedimiento de *nivelación reciproca.*

Para esto se colocan miras en los puntos A y B (fig. 148). Se estaciona con el nivel en C á una distancia, K del punto A y K' del B; se hacen las lecturas L y L', de modo que designandos por c y c' los terminos correctivos se tendrá.

$$\left.\begin{matrix} M = L - c \\ M' = L' - c' \end{matrix}\right\} \Delta = L - L' - c + c' \ (4)$$

Despues se situa el nivel en D á las distancias K de B y K' de A, y se hacen dos nuevas lecturas $L_1$ y $L'_1$, con lo que se tendrás, tambien representado por $c_1$ y $c'_1$ los terminos correctivos

$$\left.\begin{matrix} M_1 = L_1 - c_1 \\ M'_1 = L'_1 - c'_1 \end{matrix}\right\} \Delta = L_1 - L'_1 - c_1 + c'_1 \ (5)$$

(1) Si $c = 0,0005$ resulta $0,0005 = 0,00000065(K'+K)(K'-K)$ y reduciendo $K'-K = \frac{7692}{K'+K}$

De las ecuaciones (4) y (5) resulta $\Delta = \frac{L-L'+L_1-L'_1}{2} - \frac{c-c'+c_1-c'_1}{2}$
Pero $c = c'_1$ y $c' = c_1$ porque

$$c = 0.42 \frac{K^2}{R}$$
$$c' = 0.42 \frac{K'^2}{R}$$
$$c_1 = 0.42 \frac{K'^2}{R}$$
$$c'_1 = 0.42 \frac{K^2}{R}$$

luego $\Delta = \frac{L+L_1}{2} - \frac{L'+L'_1}{2}$ fórmula en que no entran los errores de esfericidad y refraccion. Lo expuesto hasta aqui, supone que se hace uso de un nivel de agua en buenas condiciones ó de un nivel de aire en el cual se hayan practicado las correcciones correspondientes.- Egault ha dado un método para hallar las alturas de miras cuando han desaparecido las correcciones de la visual del nivel. Este método exige que el eje de rotacion del instrumento sea vertical y que el anteojo pueda girar dentro de horquillas y sacarse de estas para invertir su posicion.

Sea a b (fig.ª 159) la direccion de la visual, la altura de mira observada será A m. Dando una semirevolucion al anteojo dentro de sus collares, la visual vendrá á la posicion a' b' simétrica de la a b con respecto al eje del mismo; y se podrá observar una nueva altura A m'. Leidas estas alturas se saca el anteojo de los collares, se le coloca sobre estos en posicion invertida, y por el movimiento de rotacion al rededor del eje VZ se dirige el objetivo á la mira, mediante lo cual y por el giro del anteojo dentro de los collares se podrán leer las alturas de miras

$An$ y $An'$. Como las visuales $Om'$ y $On$ son simétricas respecto á la horizontal $OH$, y lo mismo las $om$ y $on'$; $AH = \frac{Am'+An}{2}$ y $AH = \frac{Am+An'}{2}$ y por tanto $AH = \frac{\frac{Am'+An}{2} + \frac{Am+An'}{2}}{2} = \frac{Am+Am'+An+An'}{4}$ de donde resulta que cada altura de mira, se obtiene independientemente de los errores de la visual, hallando la cuarta parte de la suma de las alturas de mira observadas.

Hemos supuesto que la mira es vertical. En las operaciones muy delicadas puede colocarse así, por medio de una plomada; pero generalmente el peon de ella encargado la coloca verticalmente á simple vista. En este caso puede quedar inclinada á derecha ó izquierda de la alineacion determinada por el nivel y la mira ó contenida en dicho plano, pero no vertical. La primera de estas desviaciones se nota desde la estacion y puede corregirse. Para evitar el error procedente de la segunda se hace girar lentamente la mira al rededor de una recta; que pasando por su pié sea perpendicular al plano vertical en que está situado. La menor ~~mayor~~ de las lecturas hechas durante este movimiento, es evidentemente la que corresponde á la posicion vertical de la mira.

## Nivelación compuesta.

Cuando por la gran distancias de los puntos A y G (fig.ª 160) cuya diferencia de nivel se trata de determinar, ó porque los accidentes del terreno lo impidan no es posible hallar dicha diferencia por medio de la nivelacion simple, se practica una nivelacion compuesta. Para esto se eligen puntos intermedios B, C, D, E, F, situados de modo que el desnivel entre cada dos de ellos pueda obtenerse por una nivelacion simple. No es necesario en esto caso que dichos puntos esten en la alineacion AG; pero si se tratara de conocer la interseccion de la superficie del terreno y el plano vertical de la alineacion AG, habria que colocar las miras en los puntos B, C, D. E, F, pertenecientes à dicha alineacion, segun se verá mas adelante. En cualquiera de estos casos hay que ejecutar una nivelacion compuesta, ò sea una serie de nivelaciones simples enlazadas entre si lo cual se hace del modo siguiente.

Se parte de uno de los puntos dados, A, por ejemplo, en este y en B se colocan miras, y el nivel en una posicion intermedia que satisfaga à la condicion de compensar la refraccion y la esfericidad, ~~el nivel~~. Se verifican las lecturas de mira, $\underline{l'}$ en la A y $\underline{l''}$ en la B. La misma operacion se repite entre B y C, leyendo la altura $\underline{l'''}$ en la mira B y $\underline{l''}$ en la C, y se prosigue del mismo modo hasta el punto G.

Observando la marcha indicada se advierte; que à cada estacion del nivel corresponden dos alturas de mira, una de las cuales, se lee en la mira que el observador ha fijado à su espalda, y la otra en la situada del lado del punto G, en que la operacion ha de terminar. La primera se denomina mira de espalda ó nivelada de atras; y la segunda mira de frente ó nivelada de delante.

Para obtener el desnivel entre dos puntos consecutivos, se ha convenido en restar de la nivelada de atras la nivelada de delante. De este modo cuando la diferencia sea positiva indicarás que el punto situado en el mismo lado que G se encuentra mas elevado que el que está en la direccion de A. En virtud de lo expuesto, y designando por $dn$, $dn'$ ---- las diferencias de nivel entre A y B, B y C ---- resulta

$$d\,n = l' - l''$$

$$d\,n' = l''' - l^{iv}$$

$$d\,n'' = l^{v} - l^{vi}$$

---------

---------

$$d\,n^{v} = l^{xi} - l^{xii}$$

Conocida la cota $c'$ del punto A, referida á una superficie de comparacion cualquiera, se deducen facilmente las de B, C, D ---- G, con relacion á la misma superficie, sumando algebraicamente la cota del punto anterior con la diferencia de nivel, del modo siguiente

$$c'' = c' + d\,n = c' + (l' - l'')$$

$$c''' = c'' + d\,n' = c'' + (l''' - l^{iv})$$

$$c^{iv} = c''' + d\,n'' = c''' + (l^{v} - l^{vi})$$

-------------

- - - - - - - - - -

$$c^{VII} = c^{VI} + d\,n^{V} = c^{VI} + (l^{XI} - l^{XII})$$

De estas formulas resulta:

$$c'' = c' + (l' - l'')$$

$$c''' = c' + (l' - l'') + (l''' - l^{IV})$$

$$c^{IV} = c' + (l' - l'') + (l''' - l^{IV}) + (l^{V} - l^{VI})$$

- - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - -

$$c^{VII} = c' + (l' - l'') + \cdots + (l^{XI} - l^{XII})$$

La diferencia de nivel $\Delta$ entre los puntos A y G es evidentemente la diferencia entre las cotas $c^{VII}$ y $c'$ de dichos puntos, referidas á una misma superficie de comparacion, y por consiguiente: $\Delta = c^{VII} - c' = (l' + l''' + l^{V} + \cdots l^{XI}) - (l'' + l^{IV} + l^{VI} + \cdots l^{XII})$

De aqui se deduce, que para hallar la diferencia de nivel entre dos puntos A y G, por medio de una nivelacion compuesta se resta la suma de las ~~nivelaciones~~ niveladas de delante de la suma de las niveladas de atrás. Si la diferencia es positiva el punto G estará mas alto que el A, si es negativa, el punto G será el mas bajo, y si es cero los dos puntos estarán á la misma altura. De modo, que cuando solamente se trata de hallar por medio de una nivelacion compuesta, la diferencia de nivel entre dos puntos no hay teóricamente limitacion alguna para la colocacion de las miras intermedias y se llega siempre al mismo resultado, cualquiera que sea el camino que se siga. Conviene sin embargo, para la mayor facilidad y exactitud de las operaciones, exígese lo mas corto posible y en terreno poco accidentado.

Las alturas de mira se anotan en croquis ó en registros. Los primeros son una representacion, hecha á simple vista, de la forma del terreno y de la posicion de las miras (figª 161). Las visuales se indican por horizontales y las alturas de mira se inscriben á lo largo de las lineas que las representan. Con estos datos se puede en el gabinete hallar el desnivel entre dos puntos por la regla anteriormente enunciada.

Los registros consisten en cuadros donde se anotan las alturas de mira con las correspondientes observaciones. Si solo se trata de hallar la diferencia de nivel, el registro puede disponerse del modo siguiente. Mas adelante veremos las adiciones que hay que hacer en él cuando se trate de hallar el perfil, del terreno.

| Estaciones | Puntos nivelados | Alturas de | | Observaciones. |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| | | Atrás | Adelante | |
| ″ | ″ | ″ | ″ | ″ |

La diferencia de nivel se hallará, restando la suma de los numeros de la cuarta columna de la de los inscritos en la tercera.

## Perfiles

Se llama perfil la interseccion de la superficie del terreno con la que engendraria una linea vertical que recorriese la linea poligonal determinada por varios puntos.

La superficie así engendrada, será un plano vertical, cuando los puntos que determinan la directriz de la superficie correspondan á una misma alineacion: una superficie cilíndrica cuando la directriz sea una curva continua; y compuesta de planos y cilindros cuando la directriz se componga de rectas y curvas. Por tanto para trazar un perfil bastarán conocer las cotas de valor de sus puntos y las distancias entre las verticales de los mismos. Para obtener las primeras se hace una nivelacion compuesta, colocando las miras verticalmente en el plano de las alineaciones y en las superficies cilíndricas correspondientes á las directrices curvilíneas; y para conocer las segundas se miden por medio de un diastímetro los intervalos entre cada mira y la siguiente. A fin de que resulte bien representada en el dibujo la forma del perfil, es necesario que en los puntos en que cambie la inclinacion general del terreno se coloquen miras.

A medida que se ván tomando estos datos en el terreno se anotan en croquis ó en registros. Los primeros se diferencian de los correspondientes al caso de determinar la diferencia de nivel entre dos puntos, en que (fig.ª 181) no solo se inscriben en ellos las alturas de mira, sino tambien las distancias de una á otra. Estas distancias se anotan sobre la horizontal que indica cada estacion del nivel, cuando se miden horizontalmente; y á lo largo de las líneas inclinadas del terreno, si se han medido con la pendiente de este. Los registros para perfiles pueden tener la siguiente disposicion.

| Estaciones | Puntos nivelados. | Distancias | | | Miras de | | Diferencias | | Cotas calculadas | Cotas compensadas. | Observaciones. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | parciales | reducidas al horizonte | al origen | Atrás | Delante | Subiendo + | Bajando − | | | |
| ″ | ″ | ″ | ″ | ″ | ″ | ″ | ″ | ″ | ″ | ″ | ″ |

Las anotaciones del campo se hacen en las columnas 1ª, 2ª, 3ª, 6ª, 7ª y 12ª. Con estos datos se procede á los trabajos de gabinete. Lo primero que se hace es hallar las diferencias de nivel parciales, las cuales se obtienen como se dijo al hablar de la nivelacion simple, y se van anotando, segun su signo, en las columnas 8ª y 9ª. Conocidas estas se pueden determinar las distancias reducidas al horizonte, al origen y las cotas.

Respecto á las primeras, hay que advertir que solo se calculan aquellas que no se hayan podido medir horizontalmente en el terreno, lo cual constará en la columna 12ª. Este cálculo se hace por la fórmula $d = \sqrt{D^2 - \Delta^2}$, en la que D es la distancia medida con la pendiente del terreno, $\Delta$ la diferencia de nivel de sus extremos, que se hallará inscrita en la columna 8ª ó 9ª del registro, y d la distancia reducida al horizonte. Para facilitar este trabajo hay tablas con las que entrando con los valores de D y $\Delta$ se halla el valor de d. Los valores de d así obtenidos se inscriben en la columna 4ª. Hecho esto se hallan las distancias horizontales al origen y se anotan en la columna 5ª.

Las cotas se calculan por medio de las diferencias parciales de nivel inscritas en las columnas 8ª y 9ª partiendo de una cota dada. Esta última ó es conocida por haber partido la nivelacion de un punto que haya sido objeto de nivelaciones anteriores, ó por tener un punto intermedio comun con lineas ya niveladas, ó por el objeto con que se construya el perfil, &ª. En otro caso se fija generalmente por la consideracion de que todas las cotas sean positivas.

Si se supone conocida la cota del punto origen de la nivelacion, se obtendrá la del siguiente añadiéndola algebraicamente la diferencia de nivel anotada en las columnas 8ª ó 9ª del registro, y del mismo modo se calcularán las demás por medio de la anterior y el correspondiente de nivel. Las cotas así calculadas se anotan en la columna 10ª. Cuando la cota conocida es la de un punto intermedio del perfil, se determinan las demás del mismo modo procediendo primero hacia un extremo de la linea nivelada y despues hacia otro. Las cotas calculadas quedan referidas á la misma superficie de comparacion que la que sirve de base á los cálculos. Así que, cuando esta sea una altitud las demás quedarán referidas al nivel del mar.

Antes de dibujar el perfil es necesario comprobar los cálculos anteriores. Para esto se suman los números de la columna 7ª y del total q. resulte se resta de la suma de los de la 6ª, se suman algebraicamente los números inscritos en las columnas 8ª y

9ª y se halla la diferencia entre las cotas de los puntos extremos del perfil, anotadas en la columna 10ª. Se ve fácilmente que los tres resultados deben ser iguales, si no ha habido error en los cálculos. Los perfiles se representan, en un plano desarrollando la serie de alineaciones y círculos en que están situados.

En este desarrollo no varían las distancias horizontales, ni las cotas ni por tanto la inclinación de las líneas del terreno. Por consiguiente para dibujar un perfil, se traza una recta, sobre ella se toman las distancias inscritas en la columna 9ª del registro, en cada punto así determinado se levanta una perpendicular á dicha recta y sobre ella se toma la distancia correspondiente anotada en la columna 10ª. Para tomar las distancias al origen con facilidad, cuando el papel no es cuadriculado, se marcan sobre la primera recta á partir del origen, por medio de una regla de metal dividida en milímetros, longitudes gráficas correspondientes á un kilómetro, dos kilómetros &ª. De este modo cuando se trata de marcar una distancia lo están ya los kilómetros y solo hay que llevar á continuación las fracciones de kilómetro. Las cotas se toman por medio de la misma regla y se representan en mayor escala que las distancias horizontales, para que aparezcan con mayor claridad las desigualdades del terreno. Generalmente la escala de las cotas es décupla de la de las distancias.

Hasta aquí se han supuesto exactos los datos de campo.

En general adolecerán de algunas equivocaciones y de los errores inherentes á todo trabajo topográfico. Para corregir las primeras y compensar los segundos, es necesario antes de dar por terminados los trabajos de campo, practicar las operaciones que se exponen á continuacion. Las nivelaciones pueden partir de un punto de cota conocida de antemano y terminar en otro de cota no conocida, ó bien en el mismo punto de partida. Tambien ocurre que principien y terminen en puntos de cotas conocidas por operaciones anteriores.

En el primer caso se comprueba la nivelacion, ejecutando otra en sentido contrario. Si la diferencia D entre los desniveles de ambas nivelaciones no excede segun el grado de exactitud que se trate de obtener, de $0^m,015\sqrt{K}$ ó $0^m,07\sqrt{K}$, siendo K el número de kilómetros de la linea nivelada, y dichas operaciones se han practicado por medio de un buen nivel de aire, se infiere que D proviene de errores inevitables. Pero si pasa de los límites indicados, es necesario ver donde está la equivocacion y corregirla. Para facilitar esta investigacion, se divide la linea nivelada en trozos de unos dos kilómetros, cuyos extremos se marcan con piquetes, cuando no hay señales naturales, y se coloca en ellos la mira al hacer las dos nivelaciones indicadas. De este modo se podrán determinar los dos valores del desnivel de cada trozo, y por su comparacion, conocer en cuales está la equivocacion, y repetir en ellos la nivelacion, que en otro caso tendria que extenderse á la linea total.

Cuando de las nuevas nivelaciones de los trozos comprobados y de las anteriores de los demas resulta un valor de D' menor que $0^{m},04\sqrt{K}$ ó $0^{m},07\sqrt{K}$, se procede por medio de los datos tomados en estas nivelaciones al calculo de las cotas; y obtenidas estas, se distribuye D' entre ellas; y las que resulten se inscriben en la columna 11ª del registro. Si D es menor que $0^{m},04\sqrt{K}$ ó $0^{m},07\sqrt{K}$, se calculan desde luego las cotas y se reparte D entre ellas.

Cuando la nivelacion principia en un punto A (fig.ª 162) y despues de seguir á lo largo de un contorno A B C ... G termina en el mismo punto A, calculado el desnivel debe resultar cero; pero en general resultará un cierto valor N, que segun sea mayor ó menor que $0^{m},04\sqrt{K}$ ó $0^{m},07\sqrt{K}$, indicará que hay ó no equivocacion. Si es mayor se procederá como en el caso anterior, y si es menor se calculan las cotas, se reparte N entre ellas y los resultados se inscriben en la columna 11ª del registro. Supongamos que la nivelacion atraviesa el poligono 1, 2, 3, ... 16 (fig.ª 125) principiando en un punto 5 y concluyendo en otro 15, cuyas cotas sean conocidas por una nivelacion anterior hecha á lo largo del poligono 1, 2, 3, ... 16 ó por operaciones de otra clase.

Este caso solo difiere del anterior en que el desnivel debe resultar igual á la diferencia entre las cotas de los puntos 5 y 15. En todos estos casos hay que tener presente, que al repartir las diferencias D, D' ó N entre las cotas, se han de considerar como invariables las conocidas por operaciones anteriores si ofrecen garantías de exactitud, ó las que se fijen como puntos de partida.

## Secciónes horizontales ó curvas de nivel.

Las intersecciones del terreno y de las superficies de nivel reciben el nombre de curvas de nivel ó secciones horizontales. El trazado de dichas curvas se funda en los problemas siguientes: 1.º Dado un punto en el terreno determinar otro que tenga igual cota. 2.º Dado un punto en el terreno determinar otro cuya cota esceda á la del primero en una cantidad dada. 3.º Dado un punto en el terreno determinar otro cuya cota sea menor que la del anterior y se diferencie en una cantidad dada.

Estos tres problemas se resuelven con facilidad por medio de un nivel y de una mira de cualquier clase, por ejemplo, la de tablilla. Se sitúa el nivel en un punto del terreno y la mira en el punto dado, se coloca verticalmente el eje del instrumento, y se fija la tablilla á la altura en que su centro se halle en la visual. Hecho esto se traslada la mira á diferentes puntos hasta encontrar uno en que la visual, vuelva á pasar por el centro de la tablilla. La cota de este punto es evidentemente igual á la del dado. La resolucion del 2.º y 3.º problema solo difiere de la anterior, en que despues de colocar el centro de la tablilla en la visual, se resta ó se añade á la altura asi obtenida en la mira, la diferencia que ha de haber entre la cota del punto dado y la del que se trata de determinar; pues lo restante del procedimiento es igual á la del primer problema. Cuando la diferencia entre la cota del punto dado y la del que tratamos de determinar sea mayor que la altura de la mira, se divide la operacion en dos ó mas partes, en cada una de las cuales, se halla un punto cuya diferencia de cota con el dado sea menor que la altura de la mira, por el procedimiento que se acaba de exponer. Se vé facilmente como se resolverian los problemas anteriores con el auxilio de una mira parlante. La determinacion de las secciones horizontales se hace del modo siguiente.

*Método directo* Comprende varias operaciones: 1ª Nivelacion de la red poligonal establecida para el levantamiento del plano del terreno. Se practica una nivelacion á lo largo del polígono circunscrito, comprobando y compensando los errores, y una vez obtenidas las cotas de los vértices, estas sirven para verificar las comprobaciones de los trasversales. 2ª Perfiles. Los perfiles son trasversales, sobre los cuales se marcan puntos de cota entera, es decir, puntos cuya cota es un múltiplo exacto de la equidistancia adoptada. Estos trasversales han de principiar y terminar en puntos A, B, C, D, .. (figª 164) del polígono, y estar dirigidos, en cuanto sea posible, segun la pendiente del terreno. Ordinariamente distan entre si unos cuatrocientos metros.

Sean A y B, C y D los extremos de dos perfiles próximos (la cota de cada uno de estos puntos y su posicion sobre el plano es conocida por la nivelacion del contorno poligonal) Para determinar entre A y B puntos de cota entera, se coloca el nivel en N se dirige una visual al punto A y se hace la lectura 2m; 05 por ejemplo. Si la equidistancia adoptada para las secciones horizontales es 1 metro la cota entera del primer punto del perfil AB será 57m; siendo 56m; 33 la de A y 63m; 59 la de B, luego el punto que se busca se encuentra mas alto que A una cantidad 57m; 00 - 56m; 33, ó sea 0m; 67. Se traslada la mira á lo largo de los lados del perfil AB, despues de fijar su tablilla á una altura 2m; 05 - 0m; 67 = 1m; 38, hasta un punto E en que la visual del nivel pase por el centro de dicha tablilla y se señala E, por medio de una estaca. Para hallar el punto F de cota 58m; se repite la misma operacion con la tablilla de la mira á una altura 1m; 38 - 1m; 00 = 0m; 38.

A partir de este punto como la tablilla no puede bajar 1m; á lo largo de la mira, se trasporta el nivel á una nueva estacion N'. Se dirige primero la visual al punto F, y como se ha hecho en la estacion N, se determinan desde N' el mayor numero posible de puntos de cota entera; y asi sucesivamente.

La operacion precedente repetida en todos los perfiles hará conocer una serie de puntos E, F, G - - - E', F', G', pertenecientes á las diferentes secciones horizontales. 3.a Trazado de las bases de las secciones horizontales. Consiste en determinar puntos de cota entera, comprendidos entre dos perfiles consecutivos, y distantes entre si unos 60 metros. Se hallan estos puntos por el procedimiento explicado al tratar del problema primero.

Se deja entre dos bases consecutivas G G' y K K' el intervalo necesario para contener un número de secciones horizontales igual á $(\frac{H}{E}-1)$, suponiendo que la tablilla puede elevarse á cuatro metros sobre el suelo y que E es la equidistancia de dichas secciones. Las indicadas bases y los perfiles dividen el terreno en zonas dentro de las cuales se determinan las curvas de nivel. 4ª Trazado de estas curvas. Sean G, H, I, J, (fig.ª 155) puntos de cotas $59^m$, $60^m$, $61^m$ y $62^m$, perteneciente á un perfil y L un punto de cota $59^m$, correspondiente á otro.

A fin de poder determinar desde una sola estacion las secciones de cotas $59^m$, $60^m$, $61^m$, y $62^m$, pertenecientes á una zona, se coloca el nivel en un punto S, tal que la visual pase por encima del punto G á la mayor altura que pueda señalar la mira, y se lee dicha altura. El porta-mira, conservando esta altura, avanza unos 15 metros en el sentido G L y obedeciendo á las indicaciones del observador sube ó baja la mira á lo largo de la pendiente, hasta que la visual pase por el centro de la tablilla. El pié de la mira marca entonces un punto número uno de cota $59^m$ que se señala con un piquete. Repitiendo esta operacion se determinan diversos puntos 1, 2, 3, 4 ... de cota $59^m$, hasta L.

La investigacion de los puntos de cota $60^m$, $61^m$, y $62^m$, se hace del mismo modo desde la estacion S, partiendo desde los puntos H, I, J. Terminadas las operaciones de esta zona se pasa á determinar las secciones horizontales de cotas $59^m$, $60^m$, $61^m$ y $62^m$ de la siguiente, lo cual se hace desde otra estacion

S' del nivel, siguiendo el mismo procedimiento que en la anterior. De igual modo se procede en las demás zonas.

El plano de las secciones horizontales, se levanta por el método de interseccion de radiacion ó de rodeo, y se dibujan dichas secciones en el papel por los procedimientos ya indicados.

*Método indirecto* = El método directo dá resultados bastante exactos, pero es largo y penoso. Exige ademas, para poder ser aplicado, un terreno descubierto y accesible en todos sentidos, de modo que en ciertos casos como en un bosque, en una poblacion no puede aplicarse. En estos casos se sigue el procedimiento indirecto que consiste: 1º En determinar la posicion y la cota de un gran número de puntos característicos del relieve. 2º En deducir de estos puntos los de las curvas de nivel.

Para resolver la primera parte se empieza por hacer una nivelacion á lo largo del polígono circunscrito al terreno y despues se verifica lo propio con una serie de transversales dirigidas á lo largo de los caminos, veredas, margenes de las corrientes de agua; y en general en aquellas direcciones en que pueda practicarse la nivelacion por no existir obstáculos que lo impidan.

En el caso de una poblacion se empieza tambien por nivelar á lo largo del polígono circunscrito y luego se trazan y nivelan transversales que atraviesan la poblacion siguiendo las diversas calles.

En ambos casos, se proyectan en el plano las diversas alineaciones y se inscriben las cotas de los puntos nivelados. Sean a, b, c, d --- (figª 166) las proyecciones de varios puntos del terreno, teniendo respectivamente por cotas 110m, 25; 114m, 70; 112m, 20; 111m, 85...; y supongamos que las secciones horizontales deben estar à la equidistancia de un metro. Si las rectas a, b, a c, a d, b c --- representan lineas que coincide con la superficie del terreno, entre los puntos a y b pasaran cuatro curvas de nivel de cotas 111, 112, 113 y 114 metros; entre a y c dos de 111 y 112m; entre b y c otras dos de 113 y 114; y asi sucesivamente.

Veamos como se hallan los puntos de las secciones horizontales situados en las lineas a b, a c --- La cuestion se reduce à determinar la proyeccion de los puntos del terreno, cuya cota es un multiplo de la equidistancias. Si la recta A B (figª 167) que une los puntos representados (figª 166) por a y b coincide con el terreno, la distancia horizontal A X (figª 167) del punto de 114m de cota al punto A se podrá calcular por la proporcion $4,45 : 3.75 :: AH : AX \quad \therefore \quad AX = AH \frac{3.75}{4.45}$. La distancia horizontal AY del punto de cota 111m al punto A se deducirá de la proporcion $4,45 : 0,75 :: AH : AY \quad \therefore \quad AY = AH \frac{0.75}{4.45}$ y conocidos estos valores de A X y A Y se podian marcar en el plano, por medio de la escala, los puntos x é y (figª 166) proyecciones de los dos cotas 114m y 111m. Las de los puntos de cotas 112m y 113m se podrian determinar por una proporcion, ó dividiendo en tres partes iguales el segmento dela recta a b comprendido entre x é y (fig.ª 187) Del mismo modo se determinan los puntos correspondientes á las rectas a c, á d, b c, c d, y á todas las demás del plano. Acotando estos puntos y uniendo por una curva contínua los que tengan la misma cota, se tendrán las proyecciones de las secciones horizontales.

Las proporciones mediante las que se determinan las proyecciones de los puntos de cota entera, suponen la coincidencia de las rectas A B, A C, A D &.ª con el terreno; es por tanto necesario tener presente esta circunstancia al elegir los puntos A, B, C - - - que han de servir para determinar las secciones horizontales por el método de que se trata.

## Nivelación por pendientes.

Tiene por objeto determinar las cotas de los puntos del terreno con mas rapidez, aunque con menos exactitud, que por el método de viciales horizontales.

Se entiende por pendiente de una recta la tangente trigonométrica del angulo que forma dicha recta. Representándola por p, por Δ la diferencia de nivel entre dos puntos de la recta y por D la proyeccion horizontal de la distancia que los separa.

$$p = \frac{\Delta}{D} \quad (1).$$

Para hallar la pendiente de la recta A B (fig.ª 291) que une dos puntos A y B del terreno, por medio de un nivel, se determina por una nivelacion la diferencia de nivel B D de dichos punto y la distancia AD entre sus proyecciones horizontales; y se sustituyen los resultados de estas operaciones en vez de $\underline{\Delta}$ y $\underline{D}$ en la fórmula (1).

Para determinar la pendiente de la misma recta por medio de un goniómetro de limbo zenital, se hace estacion con el goniómetro en uno de los extremos A de la recta, y después de tomar en una mira, la altura CA del centro C del limbo zenital sobre el punto A, se coloca dicha mira, en el punto B, se dirige la visual al punto M que marca la altura BM = AC y se lee el ángulo. El resultado de esta lectura será, $\underline{a}$ ó $\underline{z}$, según que el limbo esté dispuesto para medir ángulo de pendiente ó distancias zenitales; si lo primero, la pendiente buscada será, tag. a, si lo segundo cot. z, valores que se hallarán en las tablas de líneas trigonométricas naturales, entrando con los de $\underline{a}$ ó $\underline{z}$. Lo que se obtiene directamente por estas operaciones es la pendiente de la recta CM; pero esta es igual á la de la recta AB, que es paralela á CM por que AC y BM son verticales é iguales entre sí. La distancia AC se llama altura del instrumento.

Las pendientes de las rectas se determinan, sin necesidad de operaciones aritméticas ni de tabla, por medio de los eclímetros.

<u>El eclímetro de pínulas</u> se compone de una regla AB (fig.ª 282) sostenida por una articulacion cualquiera, que tiene en su centro un nivel de aire N, y en sus extremos dos pínulas

contenidas en marcos que le son perpendiculares A Q y B P. Todo el instrumento puede girar al rededor del eje P Z, que es vertical cuando se le ha puesto en estacion. La pínula x (fig.ª 233) llamada pínula mayor, puede moverse en su plano en sentido ascendente ó descendente. Para esto hay en el marco B P (fig.ª 232 y 233) un tornillo sin fin T R que engrana en una tuerca practicada en la parte inferior de un manguito t1, y a este puede unirse la pínula x por medio de una abrazadera m n o (fig.ª 235) que le rodea. Cuando se aprieta el tornillo T', la abrazadera comprime al manguito y la pínula x queda unida á él, de modo que cuando se hace girar el tornillo T R (fig.ª 232 y 233) sube ó baja lentamente, guiada en su movimiento por los lados verticales del marco B P. Aflojando el tornillo T' deja de estar unida al manguito y puede ser movida á mano velozmente. La pínula menor y está dentro del marco A Q (fig.ª 232 y 234) y puede moverse verticalmente por la accion combinada del tornillo c y del resorte r.

Las cerdas de la pínula x están situados enfrente del ocular de la y, y recíprocamente, á fin de que puedan dirigirse visuales en sentidos opuestos. En uno de los lados verticales del marco B P (fig.ª 233) hay una escala de partes iguales y en la tablilla L un nonius. El cero de la escala corresponde á la posicion de la pínula x en que la visual es horizontal.

Algunos eclimetros en vez de pínulas tienen un anteojo que se apoya en cojinetes de forma circular, unidas á las tablillas $\mathcal{L}$ é $\mathcal{Y}$ (fig^s. 233 y 234) cuyos extremos participan de los movimientos de estas. La visual del anteojo puede por tanto tomar diferentes inclinaciones, como la determinada por el ocular de una de las pínulas y la intersección de las cerdas de la otra en los eclímetros de pínulas. El anteojo que vá colocado paralelamente á la regla AB (fig^a. 232) unas veces está lateralmente á las tablillas $\mathcal{L}$ é $\mathcal{Y}$ y otras encima de ellas. En este último caso pasa por dentro del marco BP, y en vez del tornillo T hay fuera una cremallera paralela á los lados verticales del marco para dar movimiento á la tablilla $\mathcal{L}$ por medio de un piñon que estando unido á esta, engrana con la cremallera.

Para que el eclímetro mida la pendiente de una recta es necesario, que siendo vertical el eje PZ (fig^a. 232) y estando el cero del nonius de la tablilla $x$ en coincidencia con el de la escala la visual sea horizontal. Por consiguiente las correcciones del eclímetro de pínula son: 1^a. que la tangente en el índice del nivel sea perpendicular al eje PZ, y 2^a. que la visual sea perpendicular al mismo eje, cuando coincidan los ceros del nonius y de la escala. La primera correccion se hace por medio de los tornillos de la articulacion y del nivel, siguiendo el procedimiento expuesto al tratar de la primera correccion de instrumentos. Hecha esta y colocado verticalmente el eje PZ, se procede á la segunda la cual puede practicarse despues de poner en coincidiera los ceros, por los métodos explicados al tratar de la tercera corrección de instrumentos, con referencia á los niveles de aire, haciendo uso para corregir la visual, del tornillo c (figª 234).

En los eclímetros de anteojo hay además de estas dos correcciones, las de centración y horizontalidad de uno de los hilos del retículo, las cuales deben preceder á la de perpendicularidad de la visual y el eje PZ, y se ejecutan por los métodos explicados al tratar de las correcciones 2ª y 4ª, de los instrumentos.

Para medir la pendiente de una recta AB (figª 236) se coloca en estación el eclímetro en uno de los extremos A, de modo que Pz sea vertical, que el centro o de la pínula menor esté en la vertical de dicho punto y que la visual se halle en el plano de la alineación AB; se sitúa una mira en B, después de marcar en ella la altura BM igual á OA; se mueve la pínula mayor, primero veloz y después lentamente, hasta que la visual pase por M, y se halla el número n de divisiones de la escala mn comprendidas entre el cero de la misma y el del nonius. Este número multiplicado por la unidad de pendiente ó constante del eclímetro, da la pendiente de AB. En efecto se ve desde luego, que por las operaciones hechas AB y la visual OM son paralelas, y que esta, la mira BM y la visual correspondiente al cero de la escala, forman un triángulo OMN del que se deduce, designando por p la pendiente de la visual OM, igual á la de AB $p = \frac{MN}{ON}$ y como los triángulos OMN y omn son semejantes $p = \frac{mn}{on}$ ó llamando $d$ la menor division de la escala y $r$ la dimension $on$ del eclimetro $p = \frac{nd}{r}$ (2)

El valor $\frac{d}{r}$ es lo que se denomina unidad de pendiente ó constante del eclimetro. La formula (2) expresa la regla anterior.

Para hallar $\frac{d}{r}$ una vez para siempre, se determina la pendiente de una recta AB, y hecho esto se estaciona con el eclimetro en A y se hacen las operaciones necesarias para hallar la misma pendiente. Sea $n$ el número de divisiones indicado por el nonius, se tendrá como antes $p = \frac{nd}{r}$ ecuacion en que serán conocidas, $p$ por el nivel y $n$ por el eclimetro y de la que se deduce $\frac{d}{r} = \frac{p}{n}$.

Los eclimetros se construyen de modo que $\frac{d}{r}$ sea una fraccion, que se pueda multiplicar por $n$ mentalmente con facilidad. Generalmente $\frac{d}{r} = 0{,}001$ ó $d = 0{,}001r$; pero como estas divisiones serian muy pequeñas, dado el valor que tiene $r$ en los eclimetros se hacen divisiones $d' = 0{,}005r$ y se construye en la tablilla $x$ un nonius, tomando la magnitud de cuatro de ellas y dividiendola en cinco partes con lo que apreciara $0{,}001r$. Se marca el cero de la escala enfrente del del nonius despues de colocar horizontalmente la visual, y à partir de él se toman los valores de $d' = 0{,}005r$. Por consiguiente para leer una pendiente, se cuenta el número de divisiones $d'$ comprendidas entre los dos ceros, se multiplica por cinco y al producto se añade la lectura del nonius; la suma expresara la pendiente en milésimas. En algunos eclimetros para facilitar estas operaciones las divisiones $d'$ estan numeradas de dos en dos; entonces se lee el número mas próximo al cero del nonius, se multiplica por diez y agregan al producto 0,005, si hay una division $d'$ antes de dicho cero y la lectura del nonius, ó solo esta, cuando no hay $d'$. La suma $s$ como antes la pendiente en milésimas.

Hemos supuesto que para hallar la pendiente de AB (fig.ª 235) se estaciona con el eclímetro en el punto mas bajo A. Se puede estacionar tambien en el punto mas alto B; pero entonces es necesario dirigir la visual por el ocular de la pínula mayor y las cerdas de la menor. En la práctica se coloca el eclímetro de modo que el eje PZ coincida con la vertical de uno de los extremos de la recta AB, de modo que se obtiene una pendiente algo menor que la de AB; pero se hace estacion con mas rapidez.

Para tomar sobre la mira la distancias OA del punto A del terreno, à la visual horizontal, se elige à simple vista otro punto que esté à nivel con A y en la vertical del ocular de la pínula y, se coloca en él la mira verticalmente y se fija la línea de la tablilla à la altura de dicho ocular, ó se lee la altura si la mira es parlante. El resultado de esta operacion se llama altura del instrumento.

De la fórmula (1) se deduce $\Delta = D\,p$ (3) por consiguiente, para hallar la diferencia de nivel entre dos puntos, se multiplica la pendiente de la recta que los une, por la distancia entre los mismos reducida al horizonte. Cuando el instrumento con-que se determina la pendiente es un goniómetro — — $\Delta = D$ tag. $a$ (4) ó $\Delta = D$ cot. $z$ (5) segun se mida el angulo $\underline{a}$ que forma la recta con la horizontal ó la distancia zenital $\underline{z}$.

La nivelacion simple por pendientes, consiste en estacionar con el eclimetro en uno de los puntos A (fig.ª 237) medir la pendiente $p$ de AB y la distancia AH = D; y calcular $\Delta = Dp$. Se ha convenido en dar á $p$, y por consiguiente á $\Delta$, signo positivo, cuando para dirigir la visual se mira por el ocular de la pinula menor y negativo cuando se mira por el de la mayor. Cuando se halla $p$ por medio de un goniómetro (fig.ª 231) si este mide los angulos $\underline{a}$ se calcula el desnivel por la formula (4), y se ha convenido en tomar $\underline{a}$, y por tanto $\Delta$, como positivos ó negativos, segun que el cero del nonius está encima ó debajo del del limbo. Si el goniómetro mide distancias zenitales, la formula (5) dá desde luego el signo que corresponde á $\Delta$, que será más ó menos, segun que $z < 90°$ ó $z > 90°$.

Los valores (3), (4) y (5) se calculan con rapidez por medio de las reglas logaritmicas. Hay tambien tablas en las que entrando con los datos $\underline{D}$ y $\underline{a}$ ó $\underline{D}$ y $\underline{z}$ se hallan calculados los valores D tag. a ó D cot. z.

La nivelacion por pendientes compuesta entre dos puntos se practica haciendo una serie de nivelaciones simples en que cada punto en que se coloca la mira sirve de estacion para la nivelacion siguiente. Cuando se trata de construir el perfil de la línea nivelada hay que cuidar de que las miras estén en las alineaciones que se determinan. Los valores de $p'$, $p''$... $D'$, $D''$... se inscriben en un registro que puede tener la forma siguiente.

| Puntos | | Pendientes | | Distancias | | | Diferencias de nivel | | Cotas | | Observaciones |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| de estacion | nivelados | + | − | medidas | reducidas | al origen | + | − | calculadas | corregidas | |
| 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 5ª | 6ª | 7ª | 8ª | 9ª | 10ª | 11ª | 12ª |

Las columnas 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª y 12ª sirven para los trabajos de campo. Cuando el instrumento que se usa para determinar las pendientes sea un goniómetro, si da los ángulos con la horizontal se inscriben en las columnas 3ª y 4ª, que entonces se encabezarán con el título correspondiente. Estas dos columnas se reducen á una cuando el goniómetro mide distancias cenitales. Las demás columnas se llevan con el resultado de los trabajos de gabinete, que son iguales á los de la nivelacion por visuales horizontales en todo menos en lo relativo al modo de hallar las diferencias que se anotan en las columnas 8ª y 9ª, y á las distancias reducidas al horizonte, que cuando se hace uso de goniómetros se calculan por las fórmulas $d = D\cos.\alpha$, $a = D\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Los perfiles se dibujan del mismo modo que en aquel método de nivelacion.

En cuanto al límite del error que puede admitirse en las comprobaciones de los trabajos de campo, hay que tener presente, que por las consideraciones, que mas adelante se expondrán, respecto al grado de exactitud de la nivelacion por pendientes, dicho limite tiene que ser mayor en esta que en la de visuales horizontales. Generalmente se consideran admisibles los trabajos de campo cuando repartido el error total, el que resulta para cada cota no influye en las operaciones ulteriores, para que se haya practicado la nivelacion por pendientes.

Para la representacion del terreno por curvas de nivel se sigue el método indirecto, cuyas operaciones de campo marchan con rapidez, cuando se practican las nivelaciones por medio de eclimetros ó de goniometros de limbo zenital. Algunas veces al propio tiempo que se nivela, se levanta el plano de las lineas niveladas; para lo cual suelen tener los eclimetros una brujula en la regla que sostiene el nivel de aire. en este caso se agrega una columna al registro para inscribir los rumbos; ó los angulos de las alineaciones si se han nivelado con un goniometro de limbo zenital. Para conocer si se han cometido errores de consideracion, se dirigen visuales desde los vértices A,B,C...(fig.ª 288) de la linea nivelada á puntos O', O'', O'''... bien marcados en el terreno, como veletas de torre, esquinas de casas &ª u ó á falta de estos, banderolas que se colocan á propósito; y se miden las pendientes ó los ángulos verticales, y los rumbos ó los ángulos acimutales, ABO', BCO'... segun el instrumento que se emplee en las operaciones. Antes de abandonar cada uno de estos puntos O' se dirigen visuales CO', DO''. EO'' al siguiente punto O''. Si despues de dibujado el plano a, b, c, d, e, f, g, h, ... de la linea nivelada

A, B, C, D ... se trazan rectas $a0'$, $b0'$ ... $h0'''$, $i0'''$ $K0'''$, y estas pasan próximamente por los puntos $0'$, $0''$, $0'''$, esto probará que en los trozos AE, EH y HK no se han cometido errores considerables; pero si no sucede así en algun trozo, será indicio de error, que habrá que examinar si es gráfico ó procede los trabajos de campo, para poder corregir las operaciones - Construido el plano se podrá medir en él las distancias $\underline{a0'}$ $\underline{b0'}$ ... $\underline{K0'''}$ por medio de la escala, y calcular las cotas de los puntos $0'$, $0''$ .. referidas á la misma superficie de comparacion que los vértices A, B, C ... I, K. En efecto designando por $\underline{c'}$; $\underline{c''}$; $\underline{c'''}$ .. las cotas de estos vértices por $\underline{d'}$, $\underline{d''}$, ... las distancias $\underline{a0'}$; $\underline{b0}$ ... por $p'$, $p''$ .. las pendientes $A0'$, $B0'$ --- por $\underline{a'}$, $\underline{a''}$ --- las alturas del instrumento en A, B, C .. y por $h'$, $h''$ --- las cotas de los puntos $0'$, $0''$; tendremos con los datos el punto A (figª. 289) $0'P'' = P''Q'' + Q''R'' + R''0'$.

Siendo PP'' la superficie de comparacion y $\frac{1}{M}$ la escala del plano $0'P'' = h'_a$; $P''Q'' = AP = c'$; $Q''R'' = AA' = a'$; $R''0' = Md'p'$: por consiguiente $h'_a = c' + a' + Md'p'$ de modo que $h'_a = c' + a' \pm Md'p'$.

La cota del mismo punto $0'$ calculada con los datos de B, C, --- E tendrá por expresion $h'_b = c'' + a'' \pm Md''p''$ ---- $h'_e = c^v + a^v \pm Md^v p^v$.

Si no ha habido equivocaciones notables en la nivelacion de A á E se tendrá aproximadamente $h'_a = h'_b = --- = h'_e$. En el mismo caso entre E y H ó entre H y K $h''_e = h''_f = ---- = h''_h$ $h'''_h = h'''_i = ---- h'''_k$.

Cuando no se verifique esta igualdad para algunos de los puntos $0'$, $0''$ --- habrá que corregir las equivocaciones en los puntos correspondientes de la línea nivelada.

La diferencia de nivel $\Delta = BD$ entre dos puntos B y C (fig.ª 240) puede determinarse sin necesidad de mira; colocando en uno cualquiera de ellos C el instrumento; midiendo la altura a de este con una cinta de bolsillo; midiendo igualmente con un diámetro cualquiera la distancia $CD = d$ y determinando la pendiente p de la visual IB dirigida al punto B, que deberá marcarse por medio de una banderola, cuando deba estacionarse en él, para hacer una nivelación compuesta. Con estos datos resulta $\Delta = dp + a$ fórmula en la que a y d son siempre positivos, y p entra con el signo que le corresponde.

También puede hallarse la diferencia de nivel D entre dos puntos B y A (fig.ª 240) sin mira y sin medir a; estacionando en otro punto C, dirigiendo visuales á A y B y midiendo d, p, d' y p'. En efecto

$\Delta = dp + a \qquad \Delta' = d'p' + a$ y como BE es horizontal

$D = \Delta - \Delta' = dp - d'p'$ (A) dando á p y p' el signo que les corresponda y á d y d' el positivo. Los puntos A y B se tendrán que señalar con banderolas en la nivelación compuesta.

Cuando no sean visibles desde el instrumento los puntos A y B, se dirigen las visuales á los extremos superiores de las banderolas, que en este caso convendrá que sean iguales y estén en posición vertical, y se toman los mismos datos que en el caso anterior. La diferencia de nivel se obtiene por la fórmula A.

Pero lo mejor es hacer uso de miras, por que así se puede hallar la diferencia de nivel, aún en el caso de no ser-visibles sus dos estremos. Para esto se colocan las miras en los puntos A y B (figª. 241) y el instrumento en C; se dirigen visuales á puntos cualquiera D y E de las miras; se mide $p'$, $p$, $d$ y $d'$, y se leen las alturas $BD = l$ y $AE = l'$. Designando por $\Delta$ y $\Delta'$ las distancias BH y AL de BA al plano horizontal HL, tendremos $\Delta = dp - l$ $\Delta' = d'p' - l'$ y por consiguiente la diferencia de nivel D entre A y B será $D = dp - d'p' - l + l'$.

En cuya fórmula los valores de $d$, $d'$, $l$, y $l'$ son positivos y los de $p$ y $p'$ entran con los signos positivo ó negativo, segun sea la posicion de la visual.

A la nivelacion por pendientes corresponde tambien la trigonometria, por medio de la cual se determinan las diferencias de nivel, y por tanto las cotas de puntos muy distantes, como los vertices de una triangulacion topográfica; pero como no difiere esencialmente de la nivelacion geodésica de que se tratará mas adelante, nada se dirá ahora acerca de ella.

Las cotas de nivelacion deducidas por medio de pendientes son menos exactas que las obtenidas por visuales horizontales. Los errores inevitables de lectura en los limbos verticales y en la escala de los eclimetros, los que provienen de los diastimetros, y los de esfericidad y refraccion, que ha tenerse en cuenta, hacen perder á las nivelaciones eclimétricas la ventajas de la rapidez, producen en las cotas errores de centimetros, que aumentan con la distancia del instrumento á la mira y con la inclinacion de la visual. Estos errores se atenuan haciendo uso de las visuales próximas al horizonte.

La nivelacion por [illegible] dientes es mas rápida que la de visuales horizontales á pesar de exigir la medicion de la distancias del instrumento á la mira, porque en primer lugar esta operacion se abrevia considerablemente, cuando el anteojo está dispuesto para medir distancias; y además aun cuando no lo estuviese, en los terrenos accidentados hay á veces que hacer varias estaciones con un nivel para hallar la diferencia de altura de dos puntos, mientras que con un instrumento de limbo zenital ó con un eclimetro se puede determinar la misma diferencia por medio de una sola estacion.

De estas observaciones se deduce, que cuando se trate de determinar las cotas con gran aproximacion debe preferirse la nivelacion por visuales horizontales. A veces ocurre tener que trazar en el terreno lineas de pendiente dada.

Supongamos que se trata de trazar una linea M M' M'' M''' (fig.ª 242) que partiendo del punto M descienda con la pendiente $\frac{1}{x}$ en el sentido M M'''. Se tendrá el eclimetro en estacion en el punto M, se moverá la pinula del nonius hasta que marque la pendiente $\frac{1}{x}$; y despues de tomar sobre una miras la altura del instrumento se la colocará en un punto M' que se crea satisfacer á la condicion enunciada. Hecho esto mirando por el ocular de la misma pinula ó por el del anteojo se hará colocar la mira en puntos mas altos ó mas bajos que este, segun sea necesario, hasta que ocupe una posicion M' en la que la visual pase por el punto de la mira que marca la altura del instrumento. La linea M M' siendo paralela á la visual o v tendrá la pendiente dada. Del mismo modo se trazará M'M'' desde la estacion M'; y asi sucesivamente.

Si el eclimetro tiene brujula se podrá por medio de ella y de un diastimetro ir levantando el plano de la linea trazada. Si la pendiente dada $\pm p$ fuese ascendente se practicaria el trazado del mismo modo; pero mirando por el ocular de la pinula menor. Hay que elegir los puntos M', M''... de modo que como se indica en la figura las rectas M M', M'M''... coincidan sensiblemente con el terreno.

Por este procedimiento pueden trazarse lineas de pendiente dada $\pm p$ por medio de instrumentos de limbo zenital, despues de marcar sobre este, por medio del nonius, el angulo cuya tangente ó cotangente sea $\pm p$ segun que mida los angulos de pendientes ó distancias zenitales. Estos angulos se hallan en las tablas de lineas trigonométricas naturales.

Tambien puede verificarse el trazado de lineas de pendiente dada $\pm p$ por medio de un nivel. Para esto se hace estacion con este instrumento en un punto I; se determina otro n, que tenga la misma cota que el de partida N y se mide la distancia N n = D. Sustituyendo los valores de $\pm p$ y D en la formula (1) se deduce $\Delta = D p$. Hecho esto se halla un punto N' que este mas bajo ó mas alto que n la cantidad $\Delta$; y si las rectas que unen N y N' coinciden con el terreno y N N' = N n, tendrán la pendiente dada, siendo descendente en el primer caso y ascendente en el segundo. Generalmente, cuando la pendiente es pequeña, y se coloca la mira en puntos N' de la linea de pendiente máxima que pasa por n la diferencia entre las distancias N N' y N n influye muy poco en el valor de $p = \frac{\Delta}{D}$.

Cuando la diferencia N N' - N n influye mucho hay que buscar otro punto que esté á nivel de N' y á una distancia D de N, lo cual se hace por tanteo. Del mismo modo que N N' se trazan los segmentos N'N'', N'' N'''... y si el nivel tiene brújula, se puede ir levantando con ella y un diastímetro el plano de la linea por estaciones alternadas, al mismo tiempo que se traza. De lo expuesto se infiere, que las lineas de pendiente dada se trazan con mas facilidad por medio de los eclimetros que por medio de los niveles.

## Instrumentos de reflexión.

En topografia se usan únicamente como instrumentos auxiliares en los reconocimientos del terreno, y para formar croquis aproximados de una localidad determinada.

Se fundan en el teorema siguiente. Si un rayo de luz B m (fig.ª 243 y 244) se refleja primeramente en el espejo plano e f y despues en el e' f', tambien plano, el ángulo A C B formado por el rayo incidente B m y el doblemente reflejado m' C, es doble del ángulo O de los espejos. En efecto en el caso representado en la figura 243, designando por i é i' los angulos de reflexion ó incidencia del rayo luminoso en los espejos $ef$ y $e'f'$ $ACB = 2i + 2i'$ $O = DNm = i + i'$, de donde $ACB = 2O$.

En el caso de la figura 244 $ACB = 2i - 2i'$ $O = mNm' = i - i'$. Luego $ACB = 2O$. Nótese que este teorema supone, que los rayos incidentes y los reflejados están en si unos perpendiculares á los dos espejos.

*Escuadra de reflexion* = Tiene dos sistemas de espejos m, n y m' n' (fig.ª 245) los primeros forman entre sí un ángulo de 45° sexagesimales y los segundos son perpendiculares entre sí; los espejos n' y n estan azogados en su mitad inferior y son transparentes en la superior; estos y los m, m' están dentro de una cajas EF de un decímetro de longitud, poco mas ó menos, que tiene abiertas ventanillas á un lado y otro de n y n' y enfrente de las caras brillantes de m y m'. Los cuatro espejos m y m' n y n' son perpendiculares á las caras laterales de la cajas que no tiene ventanillas, el extremo E está cerrado y el F abierto. Para hacer uso de la escuadra se tiene en la mano á la altura de los ojos del observador, de modo que sean verticales las caras en que están practicadas las ventanillas, y que los espejos n y n' tengan su superficie brillante enfrente del observador.

Sean A' y B' (fig.ª 245) dos banderolas; si se coloca la escuadra en un punto intermedio y mirando á A por la abertura O y por la parte transparente de n' se vé la imagen B'' de B' (producida por la doble reflexion de la luz en m' y en la parte arogada de $n'$) en la alineacion O'A', la proyeccion del punto C en el terreno estarás proximamente en la alineacion A'B'; porque siendo m'B' un sistema de rayos incidentes horizontales, O'B'' otro de rayos doblemente reflejados, tambien horizontales, y estando los espejos $m'$, $n'$ colocados verticalmente; por el teorema anteriormente demostrado o B'' y m' B' forman un ángulo doble del de los espejos ó sea de 180°; y por tanto dos alineaciones paralelas distantes entre sí menos de 0m. 08, dadas las dimensiones y disposicion de la escuadra. Un punto C situado entre los espejos $n'$ y $m'$ estarás muy próximo á la alineacion A'B'. La proyeccion de este punto en el terreno se marca dejando caer un canto desde la cara inferior de la escuadra.

Se demuestra del mismo modo, que cuando mirando por un punto O del extremo abierto de la escuadra y por la parte transparente del espejo $n$ á una banderola A, se vea la imagen doblemente reflejada B' por otra B en la alineacion O A, las alineaciones OA y OB son perpendiculares entre sí y la vertical de un punto comprendido entre los espejos $m$ y $n$ es proximamente la interseccion de dichas alineaciones.

Por tanto valiendose de los sistemas de espejos $m$, $n$ y $m'n'$, se pueden resolver los mismos problemas que con la escuadra de agrimensor. Sea AB (figª. 246) una alineacion marcada por banderolas AB; para trazar otra alineacion que pasando por D sea perpendicular á la AB, se colocarás la escuadra (figª. 245) en un punto

$C_1$ y mirando por o' y n' á A (fig.ª 246) se verá si la imagen doblemente reflejada B está en la alineacion O'A, si no lo estuviese se trasladará la escuadra á otro punto en el que se repetirá esta operacion y así sucesivamente hasta colocarla en un punto $C_2$ en que la imagen de B esté en la alineacion O'A. En este punto que pertenezca á la alineacion AB, se mira á A por o y n (fig.ª 245) y se verá si la imagen de una banderola situada en D (fig.ª 246) se halla en la alineacion OA; si no fuese así, se determinará otro punto $C_3$ de la alineacion AB por medio de los espejos m' n', y haciendo uso de los m y n se verá si la imagen de D está en la alineacion OA. De este modo se procederá mirando alternativamente por o' y o hasta colocar la escuadra en un punto tal, que la imagen de B producida por m' y n' y la de D reflejada por m y n estén en las alineaciones O'A y OA; dejando entonces caer un canto desde el punto de la cara interna de la escuadra, que corresponde á las posiciones de los espejos m y n, se marcará un punto C, que con el D determinará la alineacion CD, que se trata de trazar.

Para marcar una alineacion que partiendo de un punto C de la AB (fig.ª 246) sea perpendicular á esta, se colocará la escuadra en C y mirando á A por o y n (fig.ª 245) se irá situando una banderola en los puntos $D_1$, $D_2$ --- y observando las posiciones de su imagen reflejada por los espejos m, n respecto á A, hasta situar la banderola en un punto D, en que su imagen esté en la direccion OA. Los puntos D y C determinarán la alineacion buscada.

Antes de hacer uso de la escuadra hay que comprobar, si los espejos m y n (fig.ª 245) forman un ángulo de 45° y si los m' y n' son perpendiculares. Para lo primero se trazan por medio de un goniómetro dos alineaciones K A, K B perpendiculares, se sitúa en K la escuadra y se observa si mirando á la banderola A la imagen B' de B está en la dirección O A. Para lo segundo se marcan tres puntos A', C y B' de una alineación A' B' por medio de banderolas, se coloca la escuadra en C y se observa por medio de los espejos m' y n', si la imagen B'' de B' está en la dirección O' A'. Algunas escuadras tienen tornillos para hacer girar los espejos, y en estas se pueden practicar las correcciones necesarias. Cuando no los tienen, se hace uso del instrumento siguiendo procedimientos análogos á los indicados al tratar de la escuadra de agrimensor.

En algunas escuadras sustituyen á los espejos prismas de cristal, dispuestos de modo, que en sus caras laterales se verifique la reflexión de la luz.

*Sextante.* — Se compone de un limbo de unos 60° sexagesimales. El graduado (fig.ª 246); de una alidada E N que puede girar alrededor del centro del limbo, y tiene en uno de sus extremos un espejo E perpendicular al limbo, y en el otro un nonius N; de otro espejo e fijo al limbo y perpendicular á él, azogado en su mitad inferior y transparente en la superior; y de un anteojo T paralelo al plano del limbo y que puede alejarse ó acercarse á él por medio de un tornillo perpendicular á su dirección á fin de que reciba rayos de luz directos y reflejados en relaciones convenientes, para que las imágenes de los objetos observados se vean próximamente con la misma claridad. El anteojo en algunos sextantes no tiene retículo; en otros le tiene de dos hilos paralelos, ó de cuatro formando un cuadrado en el centro. Junto al espejo e suele haber cristales de color, por medio de los cuales se puede, cuando se observa el Sol, disminuir la intensidad de los rayos de luz, antes de que entren en el anteojo.

En la cara del limbo opuesto á la de graduacion hay un mango para tener en la mano el sextante, cuando se hace uso de él. El origen de la graduacion, ó cero del limbo, está en la posicion que ocupa el cero del nonius, cuando los espejos E y e son paralelos. Para medir el ángulo ACB que forman dos rectas CA y CB (fig.ª 248) por medio del sextante; se coloca este en C, se dirige el anteojo al punto A y se hacen girar simultaneamente; el instrumento al rededor de la recta CA, y la alidada al del centro del limbo; hasta que la imagen reflejada del punto B se halle en la direccion C A. Entonces el lado BC del ángulo ACB se confunde con el rayo incidente y el CA con el doblemente reflejado por los espejos E y e; y por el teorema anteriormente demostrado, ACB es doble del ángulo que forman E y e, el cual está indicado en el limbo por el nonius. Para facilitar la multiplicacion de dicho ángulo por dos, los números de la graduacion son el duplo de los que corresponden á divisiones en que están escritos.

Para el uso á que el sextante se destina en topografía basta que satisfaga á dos condiciones: 1ª que los espejos sean perpendiculares al plano del limbo; 2ª que cuando los ceros del limbo y del nonius coincidan los espejos sean paralelos. Se comprueba si están satisfechas, comparando una parte del limbo con su imagen en el espejo E (figª 247) si están en prolongacion una de otra, el espejo es perpendicular al limbo, si no, se corrige la posicion de E por medio de tornillos que hacen variar su inclinacion.

Practicada esta correccion se hacen coincidir los ceros del limbo y del nonius y se dirige el anteojo á un objeto lejano. Si la imagen de este, vista á traves de la parte transparente del espejo e, y la doblemente reflejada por E y la parte azogada de e coinciden, los espejos son paralelos; en el caso contrario hay que corregir la posicion de e hasta que se consiga la coincidencia de ambas imágenes, lo que se hace por medio de tornillos que dan movimiento á e al rededor de dos ejes, perpendicular al limbo uno de ellos y paralelo el otro. La correccion de E se funda en la simetría de los objetos y las imágenes en los espejos planos, y la de e que de la medicion del ángulo de dos rectas que coinciden debe resultar cero si los espejos son paralelos.

*Sextante de bolsillo* = Está dentro de una caja cilíndrica de pequeñas dimensiones, compuesta de dos partes, una de las cuales sirve de tapa, que se quita cuando se vá á hacer uso del instrumento y se atornilla en la parte inferior del mismo;

para sostenerlo con la mano. En el interior hay dos espejos M N y P Q (fig.ª 84) colocados perpendicularmente á la base inferior del cilindro. La vision directa de los objetos se consigue por medio de un anteojo L y una abertura S a practicada en la superficie lateral de la caja.

El anteojo está colocado delante de la superficie reflectante del espejo fijo P Q. Los rayos de luz incidentes en el espejo movil M N pasan por la abertura S a. El espejo M N unido á la alidada G H se mueve por medio de un piñon, que engrana con una rueda dentada colocada en el interior de la caja, haciendo girar un sector T, situado en la parte superior del limbo y la alidada. Este sextante se usa del mismo modo que el explicado anteriormente.

Algunos sextantes en vez de espejos tienen prismas reflectores de cristal. El sextante no da los ángulos reducidos al horizonte; pero cuando se emplea en reconocimientos y croquis, se consideran los ángulos medidos como horizontales; porque no se trata de obtener los datos de campo con gran aproximacion. En estos casos las distancias y los desniveles se determinan aproximadamente por medio de procedimientos é instrumentos que los hagan conocer con facilidad y rapidez.

Las distancias se miden á pasos ó por la velocidad de la marcha. Hay instrumentos, llamados Odómetros, que tienen la forma y tamaño de un reloj de bolsillo, y marcan por medio de una aguja los pasos ó los metros de una distancia recorrida.

[illegible] se comunica el movimiento á su mecanismo, por medio de una cuerda que se ata á una de las piernas del observador, y que de este modo, al dar un paso hace avanzar un diente de una rueda dentada, á cuyo eje está fija la aguja que marca los pasos en una esfera. Las centenas de pasos se leen en otra esfera, recorrida por una aguja, puesta en movimiento por una rueda dentada que engrana con la que va unida á la que marca las unidades. En otros podómetros sustituye á la cuerda un balancín cuyo peso está equilibrado por un resorte, y que hace una oscilación por cada paso, la cual se comunica á la aguja. La esfera está graduada de modo que se leen directamente en ella los metros recorridos. Estos instrumentos tienen un mecanismo para arreglarlos al paso del observador.

Para la nivelación se puede hacer uso de barómetros aneroides de bolsillo. Estos suelen tener dos graduaciones, una barométrica y otra orométrica, en la que se leen las alturas en metros. Para que no haya que tener en cuenta los cambios de temperatura, se llevan los barómetros constantemente en el bolsillo, del que solo se sacan para hacer las lecturas. Se obtiene la diferencia de nivel entre dos puntos, restando las lecturas orométricas hechas en cada uno de ellos. Hay multitud de instrumentos para medir ángulos, distancias y desniveles en los reconocimientos del terreno; pero los anteriores se recomiendan por su fácil manejo y la rapidez con que se hacen las mediciones.

# Anteojo analático

Hemos visto que dos hilos paralelos $h\,h'$ (fig.ª 168) colocados en el retículo de un anteojo determinan un ángulo $w$ constante, cualquiera que sea la posicion del retículo, y por tanto diastimométrico. La distancia $D$ de la mira $M\,M'$ á la vertical $VV'$ del punto de estacion es $D = NF + FO + OC$ ó llamando $f$ á la distancia focal $FO$ y $r$ á la $OC$ que hay desde el centro del objetivo á $VV'$ $D = NF + f + r$ pero $\frac{MM'}{NF} = 2\,\text{tag.}\,\frac{1}{2}\,w$ ó $NF = \frac{g}{2\,\text{tag}\,\frac{1}{2}\,w}$ designando $M\,M'$ por $g$; luego $D = \frac{g}{2\,\text{tag.}\,\frac{1}{2}\,w} + f + r$ ó haciendo las constantes $f + r = A$ y $\frac{g}{2\,\text{tag.}\,\frac{1}{2}\,w} = B$ $D = Bg + A$

El objeto del anteojo analítico es eliminar la constante $A$ de la estadia y reducir el cálculo de la distancia $D$ á la fórmula sencilla $D = Bg$.

Para esto se coloca entre el objetivo $O$ y el retículo $h\,h'$, y á una distancia $OL$ (fig.ª 169) menor ~~mayor~~ que la focal principal de dicho objetivo una lente $L$ llamada colectora, y cuya distancia focal principal $LF$ sea menor que $OL$. El lugar geométrico de los puntos que pueden quedar ocultos por el punto de interseccion del hilo vertical del retículo y del horizontal $h$ es, segun sabemos, el rayo refractado $Mm$ correspondiente al $ha$ paralelo á la direccion del movimiento del retículo; y del mismo modo, el lugar geométrico de los puntos que pueden quedarse ocultos por el punto $h'$ es $M'm'$, rayo refractado correspondiente al incidente $h'a'$ paralelo al $ha$. Las rectas $Mm$ y $M'm'$ concurren en el punto A foco conjugado de F. Por consiguiente cuando se dirige el anteojo á una mira M M', los puntos M y M' ocultos por los hyh' del retículo pertenecen á, los del o del ángulo M A M'.

Vamos á demostrar que este ángulo es constante ó diastimométrico en un anteojo dado mientras no varíen las distancias h h' y O L. En efecto en el triángulo m A m'

$2\,tg.\frac{1}{2}w = \frac{m m'}{OA}$. Pero de los triángulos semejantes m F m' y a F a' se deduce que $\frac{m m'}{a a'} = \frac{OF}{FL}$ de donde $m m' = \frac{a a' \times OF}{FL} = \frac{h h' \times OF}{FL}$ y por consiguiente $2\,tag.\frac{1}{2}w = \frac{OF \times h h'}{OA \times FL}$ ó haciendo $2\,tag.\frac{1}{2}w = m$; y representando por c la distancia h h' entre los hilos, por r la O A, por d la O L y por f' la distancia focal F L de la lente colectora $m = \frac{c(d-f')}{r f'}$ (1).

Por otra parte, siendo los puntos F y A focos conjugados, si designamos por f la distancia focal ~~principal~~ del objetivo O

$\frac{1}{f} = \frac{1}{OF} - \frac{1}{OA}$ ó bien $\frac{1}{f} = \frac{1}{d-f'} - \frac{1}{r}$ (2)

Eliminando $\frac{1}{r}$ entre las ecuaciones (1) y (2) resulta

$m = \left(\frac{1}{d-f'} - \frac{1}{f}\right)\frac{c(d-f')}{f'} = \frac{c}{f'} - \frac{c(d-f')}{f f'} = \frac{c}{f}\left(1 - \frac{d-f'}{f}\right) = \frac{c}{f'}.\frac{f-d+f'}{f}$ (3)

Por cuya expresion, se vé, que en un anteojo anallático dado: 1º. m y por consiguiente w ~~son~~ constantes, mientras no varían c y d; 2º. que si c permanece constante, m aumentan cuando d disminuye y recíprocamente; y 3º. que si d es constante, m aumenta y disminuye proporcionalmente c.

De lo expuesto resulta que por medio de la lente colectora se consigue que el punto anallático A esté en el interior del anteojo. Para que dicho punto coincida en los taquímetros con la vertical del punto de estacion, se procede en la práctica del modo siguiente. Se mide $f$ y la distancia $r$ que media entre el centro óptico del objetivo y la perpendicular al limbo azimutal levantada en su centro, se adopta para $d$ un valor algo mayor que $f$, y se fija el de $m$ por las consideraciones que luego se expondrán.

Sustituyendo los valores $f$, $r$, $d$ y $m$ en las fórmulas (1) y (2) se calculan los valores de $f'$ y $c$. Hecho esto se colocan en el retículo dos hilos paralelos distantes $c$ uno del otro, y en lo interior del anteojo una lente colectora de distancia focal $f'$, de modo que diste $d$ del objetivo; con lo que se obtiene un anteojo de ángulo diastimométrico $m$ y cuyo vértice ó punto anallático estará en la vertical al punto de estacion, cuando situado en este el taquímetro sea vertical su eje principal de rotacion.

Sea T el taquímetro (fig.ª 170) en estacion, $w$ el ángulo diastimométrico, A el punto anallático, D la distancia del punto de estacion á una mira MM'. Supongamos que el anteojo es horizontal y designemos por $g$ la parte MM' de la mira comprendida en el ángulo diastimométrico, tendremos

$$g = 2D \operatorname{tag.} \tfrac{1}{2} w \quad \text{y} \quad D = \frac{g}{2 \operatorname{tg.} \frac{1}{2} w} = \frac{1}{m} g.$$

Las consideraciones, que segun antes digimos, se tienen presentes para fijar el valor de $m$ son: 1.ª que dicho valor no debe ser una fraccion demasiado pequeña, porque un error e en la apreciacion de g, produce en D otro $\frac{e}{m}$, el cual es tanto mayor cuanto menor es la fraccion m; 2ª que tampoco debe m ser demasiado grande, para que puedan medirse las distancias por medio de miras de unos tres ó cuatro metros de longitud; y 3ª. que es conveniente que los valores de m sean fracciones sencillas, por que de este modo y dividiendo convenientemente la mira, se puede simplificar el cálculo de D. En efecto, la expresion de D es $D = \frac{g}{m}$ y designando por n el número de divisiones d contenidas en $MM' = g$ (figª. 170) se trasforma en $D = \frac{nd}{m}$. Si $m = 0,02$ y la menor division de la mira fuese $0^m,02$, resultaria $D = \frac{n \times 0^m,02}{0,02} = n \times 1^m = n$ metros.

De modo que se obtendria la distancia D en metros sin mas que contar el número de divisiones comprendidas en el ángulo diastimométrico, mientras que adoptando para m y d valores cualesquiera habria que hacer una multiplicacion y una division. En general m y d deben tener valores tales que se pueda calcular D mentalmente con facilidad.

Hemos dicho anteriormente, que una vez calculados los valores de c y f, y colocada la lente colectora á la distancia d del objetivo, los dos hilos h y h' determinan un ángulo diastimométrico dado m, cuyo vértice está en la vertical del punto de estacion. Pero á consecuencia de los errores inherentes á la construccion del anteojo no sucede asi. De modo que si se mide por medio del anteojo y de la mira una distancia D, previamente medida por medio de reglones y con la mayor exactitud posible, el resultado D' no será en general igual á D si bien se aproximará mucho á serlo si D' > D habrá que disminuir m y al contrario si D' < D; hasta conseguir que D' = D. Segun hemos visto por la formula (3) se aumenta m disminuyendo d y recíprocamente. Para poder variar la distancia d vá fija la lente colectora á un tubo colocado dentro del del anteojo y por el movimiento de dicho tuvo se puede hacer que D' = D. Algunos constructores llegado este caso fijan invariablemente el tubo de la lente colectora al anteojo, otros le dejan en disposicion de variar d, bien directamente ó bien por medio de un piñon y una cremallera, ó de cualquier otro mecanismo. La variacion de d, siempre muy pequeña, hace que el punto anatítico se separe de la vertical del punto de estacion, lo cual produce un error muy pequeño en el valor de la distancias de este punto á la mira, que no se tiene en cuenta en la practica. Antes de hacer uso de un anteojo anatítico es necesario comprobarle. Uno de los medios que al efecto se usan es, como cuando se le construye, comparar el resultado de la medicion directa y lo mas exactamente posible de una distancia D, con el D' de la medicion indirecta practicada por medio de la mira y el anteojo.

Cuando D y D' no resultan iguales y el tubo de la lente colectora no está invariablemente unido al del anteojo, se corrige el angulo diastimométrico moviendo la lente colectora en el sentido conveniente hasta que D sea igual á D'.

# Agrimensura

La agrimensura trata 1º. De la medicion del área de la proyeccion horizontal de los campos, que se llaman tambien base productiva, porque como los vegetales crecen verticalmente, la produccion de un campo es proporcional à la extension de su proyeccion horizontal. 2º. De la division de los campos en partes que esten entre si en relaciones dadas.

Cuando la forma del terreno es geométrica (triangular, cuadrada, rectangular, trapecial &ª.) se obtiene su superficie midiendo en el campo las distancias y angulos necesarios para evaluar su area reduciendolos al horizonte y aplicando las reglas de la geometria.

Si el terreno tiene una forma poligonal irregular, se la divide por medio de alineaciones en areas que puedan determinarse por la aplicacion inmediata de las reglas de geometria, se hallan dichas areas y su suma es la del poligono de que se trata.

En la figura 171 se supone dividido el terreno ABCDEFGHI en trapecios y triangulos rectangulos por medio de la alineacion AF y de las Bb, Ii, Hh, &ª. que le son perpendiculares, lo cual puede hacerse por medio de la escuadra ò cartabon de agrimensor. Por tanto para hallar el area de dicha figura se medirian las bases Bb, Ii, Hh, &ª. y las alturas Ab, Ai, ih, hg, &ª. y se reducirian al horizonte, con cuyos datos podrian calcularse las areas parciales A', B', C', . . . . I' y llamando S la del poligono se tendria $S = A' + B' + C' + \dots + I'$.

Cuando el interior del terreno es inaccesible ò hay en el construcciones, arbolados ù otros obstaculos que impidan dirigir visuales y medir distancias se traza al rededor otro polígono M N O P (fig.ª 172) se halla su área y las de los segmentos B N, D C, D E F G O, G H I P, I M A y llamando $S$, $s'$, $s''$, $s'''$, $s^{IV}$, á dichas areas y $s$ la del polígono A B C D E F G H I se tendrá $s = S - (s' + s'' + s''' + s^{IV})$.

Las alineaciones M N, N O, O P, P M deben elegirse de modo que resulte, como en el caso actual, una forma M-N O P de facil cuadratura. Tambien se pueden obtener las areas de los polígonos irregulares, levantando su plano por medio de un goniometro. Sea A B C D E F G (fig.ª 173) un campo de forma poligonal, y supongamos que se han levantado su plano por el método de radiaciones: conoceremos las distancias $OA = d$, $OB = d' \dots OG = d^{VI}$ y los ángulos $AOB = \alpha$, $BOC = \alpha' \dots AOG = \alpha^{VI}$. El area del triangulo A O B es $\frac{1}{2} AO \times BM = \frac{1}{2} d \times d' \operatorname{sen} \alpha$; el area $BOC = \frac{1}{2} d' \times d'' \operatorname{sen} \alpha'$ y asi sucesivamente. Llamando $S$ al area del polígono resulta $S = \frac{1}{2} (d d' \operatorname{sen} \alpha + d' d'' \operatorname{sen} \alpha' + \dots + d d^{VI} \operatorname{sen} \alpha^{VI})$.

Si el método empleado es el de rodeo se conocerán los angulos (fig.ª 174) $ABC = \varphi$, $BCD = \varphi' \dots BAG = \varphi^{VI}$ y las distancias $AB = \Delta$, $BC = \Delta'$, $CD = \Delta'' \dots AG = \Delta^{VI}$. En el triangulo ABC son conocidos $\Delta$ $\Delta'$ y el angulo comprendido y se podrá calcular su area $s$, el lado $AC = V$ y el angulo $BCA = \psi$. En el triangulo A C D se conocerán los lados $V$ y $\Delta''$ y el ángulo comprendido $ACD = 360° - (\psi + \varphi)$, por consiguiente podrian calcularse su area $s'$ el lado $AD = V'$ y el angulo $CDA = \psi'$. En el triangulo A D E son entonces conocidos $V'$, $\Delta'''$ y $ADE = \varphi'' - \psi$ se determinarán á su area $s''$, el lado $AE = V''$ y el ángulo $AED = \varphi^{iv}$; y así sucesivamente hasta el triángulo AGF en el que siendo conocidos $\Delta^{v}$, $\Delta^{vi}$ y $\varphi^{v}$ se podrá calcular $s^{iv}$. Llamando $S$ al área del polígono tendremos $S = s + s' + s'' + s''' + s^{iv}$.

Cuando los terrenos están limitados por líneas curvas pueden ocurrir dos casos; ó que puedan ejecutarse dentro del perímetro las operaciones necesarias para hallar su área ó que no sea posible.

En el primer caso (Fig.ª 175) para obtener el área total $S$ se elige una base AG y se trazan y miden las alineaciones BL, CK, DJ, EI y FH perpendiculares á AG, se miden también los segmentos Ab, bc ..... fG de la base, y con estos datos se calculan las áreas parciales $ABL = s$; $BCKL = s'$ ..... $FGH = s^{v}$ como si fuesen triángulos y trapecios rectilíneos, y se obtiene $S$ por la fórmula $S = s + s' + \ldots + s^{v}$.

En el segundo caso (Fig.ª 176) se procede del mismo modo que en el análogo de los polígonos irregulares, trazando las bases NO, OP, PM y MN; pero las áreas comprendidas entre las curvas y las bases se calculan como trapecios rectilíneos y las demás como rectángulos.

Estos dos procedimientos tienen el inconveniente de que no se toman en cuenta los segmentos comprendidos entre las curvas y las cuerdas AB, BC, CD &c. de modo que los resultados que se obtienen son las áreas de los polígonos inscritos en las curvas, pero no las del terreno comprendido en dichas curvas. Si fuesen conocidas las ecuaciones de estas podríamos calcular exactamente su área, al menos en muchos casos; pero generalmente las curvas que se consideran en agrimensura, solo son conocidas por pares aislados de valores correspondientes de la abscisa y la ordenada. Pueden obtenerse sin embargo sus areas con gran aproximación por uno de los métodos siguientes.

<u>Método de Poncelet</u> = Sea $A_0 B_0 B_1 \ldots B_{2n} A_{2n}$ (fig 177) el area que se trata de evaluar, y supongamos que en todos sus puntos la curva presenta su concavidad al eje $O\varphi$. Admitamos que la distancia $A_0 A_{2n}$ haya sido dividida en un número par $2n$ de partes iguales; sea $\mathcal{E}$ una de estas partes. Tracemos por los puntos de división las ordenadas $y_1, y_2\, y_3 \ldots y_{2n-1}$; unamos los extremos $B_0$ y $B_1$ de las dos primeras y los $B_{2n-1}$ y $B_{2n}$ de las dos últimas; unamos también los extremos de las ordenadas de índice impar $B_1$ y $B_3$, $B_3$ y $B_5$. Los trapecios extremos tienen por area $\mathcal{E} \times \frac{y_0+y_1}{2}$ y $\mathcal{E} \times \frac{y_{2n-1}+y_{2n}}{2}$ y los demás $\mathcal{E}(y_1+y_3)$, $\mathcal{E}(y_3+y_5) \ldots$ La suma $a$ de estos trapecios menor que el area de la curva, es $a = \mathcal{E}\Big(\frac{y_0+y_1}{2} + y_1 + 2y_3 + \ldots 2y_{2n-3} + y_{2n-1} + \frac{y_{2n-1}+y_{2n}}{2}\Big)$

Añadiendo y quitando $\mathcal{E} \times \frac{y_1+y_{2n-1}}{2}$ al segundo miembro de esta ecuación resulta $a = \mathcal{E}\Big(\frac{y_0+y_{2n}}{2} + 2y_1 + 2y_3 + \ldots 2y_{2n-1} - \frac{y_1+y_{2n-1}}{2}$ ó suponiendo $y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1} = S \ldots$ (1)

$a = \mathcal{E}\Big(2S + \frac{y_0+y_{2n}}{2} - \frac{y_1+y_{2n-1}}{2}\Big)$ (2)

Por otra parte, si se traza por cada ordenada de índice impar una tangente determinada en las ordenadas que la preceden y la siguen inmediatamente; los trapecios así formados tienen mayor area $2\mathcal{E}y_1$, $2\mathcal{E}y_3 \ldots$ y su suma $A$ mayor que el area de la curva, es —

$A = \mathcal{E}(2y_1 + 2y_3 + \ldots 2y_{2n-1})$ ó $A = 2\mathcal{E}S \ldots\ldots$ (3)

El area buscada 6 está comprendida entre $a$ y $A$; si se toma para valor aproximado de $\sigma$ el medio aritmético $\frac{a+A}{2}$ ó sea $\sigma = \Sigma\left(2S + \frac{y_0+y_{2n}}{4} - \frac{y_1+y_{2n-1}}{4}\right)$ - - - (4) el error cometido e será menor que la semi-diferencia $\frac{A-a}{2}$ de modo que $e < \Sigma\left(\frac{y_1+y_{2n-1}}{4} - \frac{y_0+y_{2n}}{4}\right)$ - - - (5). De las fórmulas (1), (4) y (5) se deduce que para obtener un valor aproximado del area, hay que dividir la base rectilinea comprendida entre las ordenadas limites en un número par de partes iguales, trazar por los puntos de divisiones de orden impar $A_1, A_3$ - - - las ordenadas de la curva, duplicar la suma de estas ordenadas, añadir á este producto la cuarta parte de la suma de las ordenadas limites y restar la cuarta parte de la suma de las que se hallan inmediatas á ellas y por último multiplicar el resultado por la longitud de una de las divisiones de la base. y que para hallar un limite superior del error que puede cometerse, hay que restar la cuarta parte de la suma de las inmediatas y multiplicar la diferencia por la longitud de una de las divisiones de la base.

Uniendo $B_0$ con $B_{2n}$ y $B_1$ con $B_{2n-1}$ (fig.ª 177) por rectas, estas cortan á la ordenada media en $C$ y $D$, y de los trapecios $A_0B_0B_{2n}A_{2n}$ y $A_1B_1B_{2n-1}A_{2n-1}$ se deduce $\frac{y_0+y_{2n}}{2} = IC$ $\frac{y_1+y_{2n-1}}{2} = ID$ y por tanto $\frac{y_1+y_{2n-1}}{2} - \frac{y_0+y_{2n}}{2} = CD$ lo que permite escribir las fórmulas (4) y (5) del modo siguiente: $\sigma = \Sigma\left(2S - \frac{CD}{2}\right)$ - - - (6) $e < \Sigma \times \frac{CD}{2}$ - - - (7). Puede pues apreciarse facilmente el error que se comete y determinar de antemano un valor aproximado del intervalo $\Sigma$ conveniente. Si la curva volviese su convexidad al eje de las $X$, $a$ sería mayor que $A$ y el limite del error cambiaría de signo siendo $\frac{a-A}{2}$. En cuanto á la espresion del área seria $\frac{A+a}{2}$ como en el caso anterior. Cuando la curva ofrezca cambios de sentido en su curvatura, se trazarán las ordenadas correspondientes á cada uno de los puntos de inflexion y quedará dividida el área en partes á cada una de las cuales podrá aplicarse el método precedente.

<u>Método de Simpson</u> = Este método exige tambien que la distancia de las ordenadas estremas se divida en un número par de partes iguales, y se funda en que por tres puntos dados que no estén en línea recta se puede hacer pasar un arco de parábola, cuyo eje sea paralelo á una direccion dada.

Sea $A_0 B_0 B_{2n} A_{2n}$ (fig.ª 178) el arco que se trata de calcular y $A_0 A_{2n} = 2n\Sigma$. Supongamos el arco parabólico, que pasando por los tres puntos $B_0, B_1, B_2$, tiene su eje paralelo á $A_0 B_0$; y sustituyamos este arco de parábola al de la parte de la curva comprendida entre $B_0$ y $B_2$. La ordenada $A_1 B_1$ será diámetro de la parábola, la tangente $GH$ en $B_1$ será paralela á la cuerda $B_0 B_2$; y el área del segmento parabólico $B_0 B_1 B_2 B_0$ las dos terceras partes de la del paralelógramo $B_0 B_2 H G$. Por consiguiente segmento parabólico $B_0 B_1 B_2 B_0 = \frac{2}{3} B_1 I \times A_0 A_2 = \frac{4}{3}\Sigma \times B_1 I$ por otra parte trapecio rectilíneo $A_0 B_0 B_2 A_2 = 2\Sigma \times A_1 I$ luego trapecio mixtilíneo $A_0 B_0 B_1 B_2 A_2 = \Sigma(\frac{4}{3} B_1 I + 2 A_1 I) = \Sigma(\frac{4}{3} B_1 I + 2 A_1 I + \frac{4}{3} A_1 I - \frac{4}{3} A_1 I) = \Sigma(\frac{4}{3} A_1 B_1 + \frac{2}{3} A_1 I)$; pero $2 A_1 I = y_0 + y_2$, y $A_1 B_1 = y_1$, por consiguiente trapecio mixtilíneo $A_0 B_0 B_1 B_2 A_2 = \frac{1}{3}\Sigma (y_0 + y_2 + 4 y_1)$.

Del mismo modo trapecio mixtilineo $A_2 B_2 B_3 B_4 A_4 = \frac{1}{3}\varepsilon(y_2 + y_4 + 4y_3)$ y así sucesivamente. Luego el area total $\sigma$ tendrá la espresion $\sigma = \frac{1}{3}\varepsilon((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots \cdots y_{2n-2}))$ (4) Se obtiene por consiguiente el área añadiendo á la suma de las ordenadas estremas cuatro veces la suma de las ordenadas de indice impar y dos veces la suma delas de indice par y multiplicando la suma total por la tercera parte dela longitud de una de las divisiones de la base.

En lo dicho se ha supuesto que el arco parabolico $B_0 B_1 B_2$ presenta su concavidad al eje delas $X$; la formula es la misma cuando presenta su convexidad al mismo eje. En efecto (fig.ª 179) segmento parabolico $B_0 B_1 B_2 B_0 = \frac{4}{3}\varepsilon \times B_1 I$ segmento rectilineo $A_0 B_0 B_2 A_2 = 2\varepsilon \times A_1 I$ luego trapecio mixtilineo $A_0 B_0 B_1 B_2 A_2 = \varepsilon(2A_1 I - \frac{4}{3} B_1 I) = \varepsilon(2A_1 I - \frac{4}{3} A_1 I + \frac{4}{3} A_1 B_1 = \varepsilon(\frac{2}{3} A_1 I + \frac{4}{3}\frac{4}{3} A_1 B_1) = \frac{1}{3}\varepsilon(y_0 + y_2 + 4y_1)$ y por consiguiente la espresion de $\sigma$ es tambien en este caso la (4). Cuando la curva es sinuosa se divide el área en partes que se evaluan separadamente como en el metodo anterior.

El método de Simpson exige la medicion de todas las ordenadas y no se dá á conocer el limite del error que se comete. Bajo este concepto es inferior al de Poncelet; pero dá en las aplicaciones una aproximacion suficiente. Sea ABCDEFA (fig.ª 180) una estension de terreno terminada por un perimetro curvilineo; para determinar su área, si el interior es accesible, se trazará una alineacion AD y desde los puntos de inflexion B, C, E y F se bajarán alineaciones

Bb, Cc, Ee, Ff perpendiculares á la AD. Hecho esto quedará dividido el terreno en areas parciales a, a', a"....a$^v$ que pueden determinarse por cualquiera de los métodos precedentes y cuya suma dará el area total. Cuando los accidentes del terreno, el arbolado &.ª impidan trazar las alineaciones AD, Bb...Ff ó medirlas con exactitud, ó bien cuando el terreno es de considerable extension, se traza un contorno poligonal próximo al perímetro, se toma en el campo los datos necesarios para medir el area contenida en dicho contorno y el de la zona comprendida entre él y el perímetro curvilíneo, y la suma de ambas dá el area total. Sea ABC....GAH (fig.ª 181) el perímetro de terreno y ADLMA el contorno poligonal trazando desde los puntos de inflexiones BC las perpendiculares BN y CO desde M la MH perpendicular á AM desde ML las perpendiculares MG y LF ás ML y desde L la perpendicular LE á LD podremos determinar las areas a, á, a"...a$^v$ por el método de Poncelet ó por el de Simpson y las de los triangulos mixtilíneos HMG y FLE bien considerándolos como rectilineos, si los arcos HG y FE se confunden sensiblemente con sus cuerdas ó bien calculando separadamente el area de los triangulos rectilineos y la de los segmentos curvilíneos y sumandolas.

La suma de las areas a, á....a$^v$ y la de los triangulos es el area de la zona comprendida entre el perímetro poligonal y el curvilíneo. En cuanto á la del polígono puede calcularse por medio de los angulos A, D, L, M y de la longitud de las alineaciones AD, DL, LM y MA empleando el procedimiento ya explicado al tratar de la determinacion del area de los poligonos irregulares.

Estas consideraciones son aplicables al caso en que está limitado el terreno por una curva, y no es posible ejecutar dentro del perimetro las operaciones necesarias para hallar el area. En este caso se establecen las alineaciones del contorno poligonal ABCDE (fig.ª 182) fuera del curvilineo y se determinan las areas de poligono y de la zona comprendida entre esto, por el procedimiento indicado en el caso anterior. Siempre que se pueda debe adoptarse un poligono cuya área pueda hallarse con facilidad, como un rectángulo ó un trapecio.

Cualquiera que sea el perimetro del terreno que se trate de medir, cuando este terreno se compone de parcelas, se evalua directamente el area total y despues la de cada una de estas parcelas. La primera debe ser igual á la suma de las segundas; pero se tolera una diferencias, en más ó en menos, de $\frac{1}{300}$.

A excepcion de los casos mas sencillos, cuando se trata de hallar el area de un terreno, conviene levantar su plano, á fin de trazar en él las lineas que forman áreas parciales más faciles de calcular y determinar las dimensiones y ángulos que han de medirse para hallar dichas áreas. Hecho esto se plantean en el terreno aquellas lineas y se hace la medicion de las dimensiones y angulos con lo que se tienen los datos necesarios para el calculo del area total. Hemos dicho que la Agrimensura trata tambien de la division de los campos en partes que esten entre si en relaciones dadas.

Este problema es susceptible en algunos casos de solucion geométrica directa; pero el procedimiento práctico peculiar á la Agrimensura es el siguiente. Se levanta el plano del terreno que se trata de dividir, y despues de evaluar en números el área de este se determinan por el cálculo aritmético las areas parciales en que ha de quedar dividido. Hecho esto se trazan aproximadamente en el plano las lineas de division, y se calculan las areas que resultan; y como generalmente estas no serán iguales á las primitivamente calculadas, se corrigen para obtener la igualdad despues de lo cual se replantean las lineas de division en el terreno, haciendo las comprobaciones y correcciones necesarias.

Sea ABCDE (fig.ª 183) un terreno que se trata de dividir en cuatro partes, proporcionales á los números m, n, p, q, con la condicion de que las lineas de division han de concurrir en un pozo O y la recta OI ha de ser una de estas lineas. Para resolver este problema se evalua el área total en números y se divide el resultado en cuatro partes proporcionales á m, n, p y q. Sean ma, na, pa y qa dichas partes, se traza OA y se evalúa el área del triángulo OIA; supongamos que sea inferior á ma en una cantidad b. Se baja desde el punto O, sobre AB, una perpendicular ~~AH~~ OH, se mide esta y se divide b por $\frac{1}{2}$ HO, el cociente es la base de un triángulo que tiene HO por altura y b por area; se lleva desde A á M una longitud igual á este cociente y uniendo O con M, la figura OIAM es equivalente á la primera parte ma. Se traza OB, se determina el área del triángulo OMB cuya altura es OH y cuya base MB se puede medir. Supongamos que el área del triangulo sea inferior á $na$ en una cantidad $c$. Se baja desde el punto O una perpendicular OK sobre el lado BC, se determina su longitud y se divide $c$ por $\frac{1}{2}$ OK, se lleva de B á N una longitud igual al cociente obtenido, se traza ON, y OMBN es equivalente á la segunda parte $na$. Se obtendrá del mismo modo una figura ONCP equivalente á la tercera parte $pa$, y la figura restante OPDEI será equivalente á la cuarta parte $qa$.

Si no hubieren sido dados el punto O y la primera línea de division OI se les hubiera podido elegir arbitrariamente; pero procurando que las figuras parciales no resulten demasiado irregulares. Una vez resuelto el problema en el plano se replantean las alineaciones OM, ON, OP en el terreno tomando sobre las lindes AB, BC y CD las distancias AM, BN y CP calculadas anteriormente, se evaluan las areas parciales, y si no resultan iguales á $ma$, $na$, $pa$ y $qa$ y el error es considerable, se hacen las correcciones necesarias siguiendo el método indicado y se acotan las distancias definitivas en el plano.

En todos los casos debe procurarse que las areas parciales tengan formas convenientes para el cultivo de los campos y el trasporte de las cosechas. Si por ejemplo, hubiese que dividir en tres partes iguales un trapecio ABCD (figª 184) cuyas bases AB y CD fueren pequeñas respecto á la longitud de los lados AD y BC no convendría emplear el procedimiento que naturalmente se ocurre, y consiste en dividir en tres partes iguales cada una de las bases y unir los puntos de division por medio de las lineas fg y hl. Seria preferible tomar sobre uno de los lados AD los puntos m y n tales que Am sea un poco mayor que la tercera parte de AD y nD un poco menor que la misma parte (para evitar ángulos demasiado agudos) y despues trazar por estos puntos dos rectas mp y nq que determinen dos cuadriláteros ABpm y CDqn equivalente cada uno de ellos al tercio del trapecio, lo cual se puede practicar por el procedimiento explicado en el ejemplo anterior (figª. 187) En cuanto al replanteo de las alineaciones mp y nq se ejecutaria por medio de las distancias mA y PB, nD y qC.

Hemos supuesto hasta ahora que los terrenos son homogéneos, y que por tanto solo hay que tener en cuenta su extension superficial. Sucede algunas veces que no lo son y en este caso hay que considerar su valor. Si el trozo de mejor calidad ocupa una extension pequeña, podrá suceder que los interesados en la particion convengan en que dicho trozo se adjudique á uno de ellos, compensando á los demás la inferioridad del terreno con una mayor extension. En este caso, para practicar la particion, se miden por separado las áreas de los trozos de buena y mala calidad, se valoran á sus respectivos precios y se divide el valor total que resulta proporcionalmente á los derechos de los interesados.

Si el valor del trozo de mejor calidad no cubre la parte correspondiente al interesado que se ha de quedar con él, se completa la parte que á este corresponde con una porcion del terreno de calidad inferior. Lo que resta de este se divide entre los demas interesados atendiendo solo á la extension superficial.

Pero si el trozo de terreno de mejor calidad ocupa una gran extension, sucede generalmente que cada interesado desea poseer una parte, y en este caso se dividen por separado los trozos de terreno, proporcionalmente á los derechos de los interesados, procurando que los linderos trazados en uno de los trozos se reunan con los del otro del modo mas natural posible.

## Trazado de curvas en el terreno

__Arcos circulares__ = Sean EA y BA (Fig.ª 249) dos alineaciones, __m__ el ángulo que forma, __tft'__ un arco de circulo tangente á EA y BA en los puntos __t__ y __t'__; y __f__ el radio de dicho arco: en el triangulo AtO, designando por T la distancia At, $f = T\,tg.\frac{1}{2}m$ (1)

Si A es accesible se podrá medir m; y puede suceder que sean dados f ó T. Si lo primero, por la formula (1) se hallará $T = \frac{f}{tg.\frac{1}{2}m}$ (2) y tomando las distancias $At = At' = T$ se podrán marcar en el terreno los puntos de contacto t y t'. Si T es dado, se podrá marcar t', midiendo At y llevando una distancia igual desde A á t'; y en cuanto á f se determinará por la formula (1)

Cuando A es inaccesible se traza una alineacion DD' en terreno accesible y se mide la distancia $DD' = d$ y los angulos $\alpha$ y $b$, con lo que se podrá determinar m, AD y AD', resolviendo el triángulo ADD'. Si f es dado se calcularán T y T por la formula (2) y $Dt = AD - T$

$D't = T' - AD'$ y por medio de las distancias $Dt$ y $D't'$ se podrian marcar en el terreno los puntos de contacto $t$ y $t'$. Si es dado el punto $t$ se medirá, $Dt$, se calcularán $T = T' = AD - Dt$ $D't' = T' - AD'$ y $\rho$ por la fórmula (1); y valiendose de la distancia $D't'$ se podrá marcar $t'$ en el terreno. Antes de practicar el trazado de un arco circular que sea tangente à dos alineaciones dadas, son conocidos $m$, $\rho$ y $T = T'$, segun las anteriores consideraciones

El trazado de curvas circulares en el terreno consiste en marcar puntos de las mismas. Los primeros que se determinan son $t$ y $t'$. La distancia, entre dos puntos consecutivos debe ser menor cuanto menor sea el radio. Generalmente es de cinco à diez metros cuando el radio $\rho$ está comprendido entre 50 y 200 metros ò 200 y 750; y de 20 metros ò de la longitud de una cadena ò cinta de las mas largas cuando el radio es mayor de 750 metros. Sean $t$ y $b$ dos puntos de la curva, que satisfacen à esta condicion, y $\delta$ el ángulo formado por los radios $ot$ y $ob$, será: $c = 2\rho \operatorname{sen} \frac{1}{2}\delta$ (3) $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\delta = \frac{c}{2\rho}$ (4). La ecuacion (4) dá el valor de $\delta$ correspondiente à la distancia, $c$, que ha de haber entre dos puntos consecutivos de la curva.

## Dadas dos alineaciones E A y B A (fig.ª 250) que forman un ángulo $m$, trazar un arco de circulo de radio $\rho$, que sea tangente à ambas.

Se determinan los puntos $t$ y $t'$ y à partir de ambos se llevan sobre las tangentes $tA$ y $t'A$ las abscisas $ta = \rho \operatorname{sen} \delta$ $tb = \rho \operatorname{sen} 2\delta$ - - - - , en los puntos $a, b, c,$ - - - se levantan perpendiculares à dichas

tangentes y sobre ellas se toman ordenadas $aa' = \rho$ sen $\delta$ ~
$bb' = \rho$ sen $2\delta$ - - - - - con lo que se tendran los puntos $a', b', c', ---$
de la curva. El valor de $\delta$ está dado por la fórmula (4)

Cuando las ordenadas son muy largas se trazará la tangente **DL** (fig.ª 251) en el punto medio F de la curva y se toman las abscisas á partir de los puntos $t, t'$ y $F$ ~~D y L~~ sobre Dt, DF, LF y Lt', y las ordenadas como indica la figura. Para trazar DL se tiene $tD = DF = FL = Lt' = \rho \operatorname{tg} C$ $\quad C = \frac{180^o - m}{4}$ De modo que no hay mas que tomar las distancias $tD = Lt' = \rho \operatorname{tg} C$ y se tienen dos puntos D y L de dicha tangente. Del mismo modo se puede en caso necesario hacer uso de mas tangentes auxiliares.

Describir un arco circular de radio $\rho$ tangencialmente á una alineacion AB en un punto t. (fig.ª 252)

Se trazará un arco tH por ordenadas sobre la tangente tD. Sea tH = $\delta$ grados, será, $tD = \rho \operatorname{tg} \delta$, lo que determina el punto D. Por este punto se trazará otra tangente DE, para lo cual se conoce el ángulo tDF, porque $tDF = 2tDO = 2(90^o - \delta)$. Despues de tomar DF y FE iguales á Dt se trazarían los arcos FH y FI, marcando las abscisas á partir del punto F, y las ordenadas en sentidos perpendicular á DF y FE formando en E un ángulo $FEt' = tDF$ se podría marcar otra tangente Et' para continuar el trazado de la curva y asi sucesivamente. Por este medio se podrá trazar un arco de longitud dada.

Dados $m$ y $\rho$ trazar un arco de círculo $tEt'$ (fig.ª 253) tangente á las alineaciones $AE$ y $AB$, por ordenadas sobre la cuerda.

Este método se emplea, cuando el terreno permite ejecutar las operaciones con mas facilidad por la concavidad de la curva que por el lado de la convexidad. Marcados los puntos $t$ y $t'$ se determina el punto $D$ medio de la curva $tt'$. Para esto se tiene
$tOE = \frac{1}{2} tOt' = \frac{1}{2}(180^\circ - m)$ $tt' = 2\rho \operatorname{sen} \frac{1}{2} tOt' = 2\rho \operatorname{sen} \frac{1}{2}(180^\circ - m)$
$tD = \frac{1}{2} tt'$. Se toma el punto $D$ como origen de coordenadas y se llevan sobre $tt'$ como abscisas, las distancias $Db' = Db_1 = \rho \operatorname{sen} \delta$
$Da' = Da_1 = \rho \operatorname{sen} 2\delta$ - - - - - y como ordenadas $b'b = b_2 b_1 = ED - b''b$
$a'a = a_2 a_1 = ED - a''a$ - - - - - - $ED$ es conocido, porque es el seno verso de $90^\circ \frac{1}{2} m$; y $b''b$, $a''a$ tambien son conocidas, por que son las ordenadas sobre la tangente $EH$, y por tanto $b''b = \rho$ sen. ver. $\delta$
$a''a = \rho$ sen. ver. $2\delta$ - - - - - -

Se puede evitar el cálculo de las diferencias $ED - b''b$, $ED - a''a$, haciendo gráficamente la resta en la cinta ó cadena. Cuando las ordenadas tienen gran longitud (fig.ª 254) se determina el punto $E$ por la sagita $ED$, ó marcando el punto medio de la tangente $GF$, y se toman para ejes de abscisas las cuerdas $tE$ y $t'E$, como indica la figura.

Trazar el arco $tCDE$ (fig.ª 255) de radio $\rho$ tangente á una alineacion $AF$, en el punto $t$.

Se eligen cuerdas $BC$, $CD$, $DE$ - - - cuyas flechas no sean de gran longitud; sea $tOC = b$ un ángulo tal que $tC$ satisfaga á dichas condiciones, será $AtC = 180^\circ - \frac{1}{2} b$ formando ~~ent~~ el ángulo $AtC$ y tomando una distancia $tC$ igual á las citadas cuerdas, se podrán determinar por el procedimiento anterior varios puntos 1, 2, 3, de la curva. Trazando una alineacion $CB$ que forme con la $tC$ un ángulo $tCB = 2tCD = 2(90^\circ - \frac{1}{2} b)$ y tomando sobre ella la distancia $CB = tC$, se podrán marcar puntos 4, 5, 6, y así sucesivamente.

## Trazar una curva circular de radio $\rho$, tangente á dos alineaciones MA y NA (fig.ª 186) por el método llamado del desvío de las cuerdas.

Supongamos trazada la curva; bajando desde el punto $a'$ (fig.ª 186) la perpendicular $a'm$ sobre la prolongacion $BA$ de la tangente, se observa que se podrá determinar $a$ por las coordenadas rectangulares $Bm = ac = \rho \operatorname{sen} \delta$ . $ma = Bc = \rho \operatorname{sen.ver.} \delta$ (a)

Prolongueré la cuerda $Ba$ y desde $b$ bajeré la perpendicular $bm'$ sobre la prolongacion $as$ de $Ba$. Se podrá determinar el punto $b$ por las coordenadas $am'$ y $m'b$. Para hallar los valores de estas; sea $Oh$ la bisectriz del ángulo $BOa = \delta$, se tendrá $am' = dm' - ad = \rho (\operatorname{sen} \frac{3}{2}\delta - \operatorname{sen} \frac{1}{2}\delta)$ $m'b = hf - hd = \rho (\operatorname{sen.ver.} \frac{3}{2}\delta \; \operatorname{sen.ver.} \frac{1}{2}\delta)$ (b)

Calculados los valores (a) y (b) para trazar la curva se marca el punto de contacto $B$, se toma sobre la tg. MA la distancia $Bm = \rho \operatorname{sen} \delta$ y sobre su perpendicular en $m$ la distancia $ma = \rho \operatorname{sen.ver.} \delta$. Se prolonga la cuerda $Ba$, se toma sobre $as$ una longitud

$a\,m' = \rho\left(\text{sen}\,\frac{3}{2}\delta - \text{sen}\,\frac{1}{2}\delta\right)$, se levanta en $m'$ la perpendicular $m'b = \rho\left(\text{sen.ver.}\,\frac{3}{2}\delta - \text{sen.ver.}\,\frac{1}{2}\delta\right)$ con lo que se obtiene el punto $b'$, y así sucesivamente. Lo mismo se procede, à partir del otro punto de contacto, con la alineacion AN.

Tanto los valores (a) y (b) como los necesarios para el trazado de los arcos circulares por los métodos expuestos anteriormente, pueden calcularse con el auxilio de las tablas de líneas trigonométricas; Hay ademas que dán calculados dichos valores (1)

Tambien pueden trazarse los arcos circulares por medio de la ecuacion del circulo, siguiendo los procedimientos que à continuacion se exponen. Tomando por ejes de las $x$ y de las $y$ la tangente $tc$ (fig^a. 251) y el radio $tO$, y por origen de las coordenadas el punto de contacto $t$, la ecuacion del circulo de radio $\rho$ es $x^2+(\rho-y)^2=\rho^2$ de donde $(\rho-y)=\rho\sqrt{1-\frac{x^2}{\rho^2}}=\rho\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\rho^2}-\frac{1}{8}\frac{x^4}{\rho^4}\cdots\right)$ y por consiguiente $y=\frac{1}{2}\frac{x^2}{\rho}+\frac{1}{8}\frac{x^4}{\rho^3}\cdots$ (a).

En la práctica se obtienen los puntos del circulo con suficiente aproximacion, cuando $x < \frac{1}{10}\rho$, por medio del primer termino del segundo miembro, ó sea por la fórmula $y=\frac{1}{2}\frac{x^2}{\rho}$ (b). Por consiguiente para obtener puntos $a_1$, $b_1$, $c_1$ --- (fig^a. 250) del arco circular de radio $\rho$, que una dos alineaciones BA y AB, se determinan los puntos de contacto $t$ y $t'$, se toman por medio de la cadena ó cinta à partir de $t$ y $t'$, abscisas $ta = x_1$, $tb = x_2$, $tc = x_3$ --- y so-

---

(1) Trazado de las curvas circulares y parabólicas sobre el terreno por D. Juan Lopez del Ribero, Ingeniero gefe de 1^a. clase de Caminos Canales y Puertos.

tre perpendiculares levantadas en $a, b, c$.... las ordenadas $aa' = y_1$, $bb' = y_2$, $cc' = y_3$... correspondientes, calculadas por la fórmula (b). Este cálculo se simplifica cuando las ordenadas son equidistantes, esto es, cuando $\varphi_2 = 2\varphi_1$, $\varphi_3 = 3\varphi_1$, $\varphi_4 = 4\varphi_1$... ... en cuyo caso $y_1 = \frac{1}{2}\frac{\varphi_1^2}{\rho}$ $y_2 = \frac{1}{2}\frac{4\varphi_1^2}{\rho} = 4y_1$ $y_3 = \frac{1}{2}\frac{9\varphi_1^2}{\rho} = 9y_1$ ...... $y_n = n^2 y_1$.

Con las mismas coordenadas se pueden determinar los puntos $a'_1, b'_1, c'_1$, á partir de $t'$.

Describir un arco circular de radio $\rho$ tangencialmente á una alineacion $tA$ en un punto $t$ (Figª 256).

Se marcan sobre la tangente varios puntos 1, 2, 3, 4, ... equidistantes y se levantan las ordenadas $1a, 2b, 3c, 4d$, ... calculadas por la fórmula (b). Cuando la ordenada $4d$ es muy larga se traza una nueva tangente $At'$ formando el ángulo $tAt' = 180° - 2e$, determinando $e$ por la fórmula $tg.\, e = \frac{t4}{\rho} = \frac{\varphi_4}{\rho} = \frac{\varphi_4}{\rho}$ se toma la distancia $At = At'$, y á partir de $t'$ las mismas abcisas y ordenadas que han servido para marcar los puntos $a, b, c, d$, ... como indica la figura, y se continua del mismo modo si se han de hallar mas puntos.

Dados $m$ y $\rho$ trazar un arco de circulo $tEt'$ (Figª 257) tangente á las alineaciones $AE$ y $AB$, por medio de ordenadas sobre la cuerda $tt'$.

Se determinan primeramente los puntos $t$ y $t'$ y la distancia $tt' = 2c$. Hecho esto se halla el punto medio $E$, del modo siguiente. Las coordenadas y de un punto referida á los ejes E $\varphi$, E y es segun se ha visto anteriormente $y = \frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{\rho} + \frac{1}{8}\frac{\varphi^4}{\rho^3}$ ó bien, cuando $\varphi < \frac{1}{10}\rho \ldots\ldots y = \frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{\rho}$ en los casos mas frecuentes de la practica. Por consiguiente las coordenadas del punto t' serán $\varphi = EM = c \quad y = Mt' = \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho}$ y las del punto E' referidas á los ejes $H\varphi'$, $Hy'$ $\varphi' = 0 \quad y' = E'H = Mt' = \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho}$.

Dividiendo las distancias Ht' y Ht en dos partes se podrian marcar los puntos 1 y 3 por sus coordenadas $\varphi'_1 = \varphi'_3 = \frac{1}{2}c$
$y'_1 = y'_3 = y' - y = \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{c^2}{4\rho} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{\rho} = \frac{3}{4}y'$

Para determinar cinco puntos de la curva se divide la cuerda en seis partes iguales (fig.ª 258) y se tiene para las coordenadas de los puntos E, 1, 2, 3 y 4 $\varphi' = 0 \ldots\ldots y' = \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho} \quad \varphi'_1 = \varphi'_3 = \frac{2}{3}c \ldots y'_1 = y'_3 = \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{4c^2}{9\rho} = \frac{5}{9}\times\frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho} = \frac{5}{9}y'$. $\varphi'_2 = \varphi'_4 = \frac{1}{3}c \ldots y'_2 = y'_4 = \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{c^2}{9\rho} = \frac{8}{9}\times\frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho} = \frac{8}{9}y'$. Conviene emplear un numero impar de ordenadas, porque de este modo las de un lado de la curva sirven tambien para marcar las del otro.

Trazar el arco tCDE (fig.ª 259) de radio $\rho$ tangente á una alineacion EF en el punto t.

Se elige una cuerda tC = 2c tal que las perpendiculares bajadas á ella desde los puntos del circulo no sean de gran longitud, y se traza por el punto t una alineacion tC que forme con tE un ángulo e dado por la ecuacion $\operatorname{sen} e = \frac{c}{\rho}$ tomando sobre dicha alineacion una distancia tC = 2c se tendria un punto C del arco que se trata de trazar. Se divide de tC en un número de partes iguales, y se determinan los puntos correspondientes 1, m, 2, como en el problema anterior. En C se traza una alineación CD que forme con AC un ángulo $ACD = 180° - 2c$, se toma la distancia $CD = 2c$, con lo que se tiene otro punto D del circulo, y los puntos 3, n, 4, se hallan como los 1, m, 2; y así sucesivamente.

Trazar una curva circular de radio R (fig. 260) tangencialmente á una alineación AT en el punto A, por el método llamado del desvío de la tangente.

Se toman sobre AT las abscisas $Aa = x_1$ $Ab = x_2 = 2x_1$, y perpendicularmente las ordenadas $a1 = y_1 = \frac{1}{2}\frac{x_1^2}{R}$ $b2 = y_2 = 4y_1$ con lo que se tendrán los puntos 1 y 2 de la curva. Se une el punto a con el 2 por la alineación a2, y sobre esta, á partir de 2, se llevan $c2 = x_1$ y $d2 = x_2$; y perpendicularmente $c3 = y_1$ y $d4 = y_2 = 4y_1$, que determinarán los puntos 3 y 4 de la curva. Se une c con 4 y se continúa marcando por medio de las mismas coordenadas los puntos que sean necesarios. Esto supone que la alineación a2 es tangente á la curva; pero determinemos el punto t en que la tangente t2 encuentra á Ab. Sea $bt = n$, será $At = x_2 - n$ y $n^2 + y_2^2 = (x_2 - n)^2$ (1) de donde $n = \frac{1}{2}x_2 - \frac{y_2^2}{2x_2} = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}\frac{x_2^3}{R^2}$ y por tanto $At = x_2 - n = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}\frac{x_2^3}{R^2} = x_1 + \frac{1}{4}\frac{x_2^3}{R^2}$. De modo que para trazar la verdadera tangente t2 habría que tomar la distancia At que se diferencia de $Aa = x_1$ en la cantidad $\frac{1}{2}\frac{x_2^3}{R^2}$. En la práctica se puede despreciar esta diferencia

(1) porque si la línea t2 es tangente será = At por ser A1 = 12

cuando $\ell_2 < \frac{1}{20} l$.

Arcos parabólicos. El método generalmente seguido para trazar estos arcos en el terreno es el siguiente: Sean AB y AB (fig. 201) dos alineaciones que se han de unir por un arco de parábola de segundo grado tangente á dichas alineaciones en los puntos t y t', situados á igual ó diferente distancia del punto A. Se dividen At y At' en el mismo número de partes iguales se hallan las intersecciones m, n, de las alineaciones a a' y b b', b b' y c c', y los puntos 1, 2, 3, medios de a m, m n y n c'; estos puntos con los t y t' pertenecen al arco de trazar, puesto que cualquiera de las alineaciones b b' divide á las tangentes At y At' en partes recíprocamente proporcionales, como en la parábola de segundo grado. Cuando la curva tiene poca amplitud y el terreno es despejado, se hallan los puntos de intersección atirantando cuerdas de a á a', b á b', . . . . Cuando la curva es muy abierta y se toman muchas divisiones en las tangentes At y At' se puede sin gran error prescindir de determinar los puntos medios 1, 2 . . . . y adoptar como puntos de la parábola los m n de intersecciones de las alineaciones.

## Copia y reducción de planos

Conocidos son de todos los que practican el dibujo los procedimientos que mas comunmente se usan para obtener copias en la misma ó diferente escala que el original. Por esta razon solo trataremos de la descripcion y uso del Pantógrafo y de la copias de planos por la Topografía.

El Pantógrafo se compone de cuatro reglas AP, AL, BC y DC (fig.ª 262) unidas entre sí por cuatro articulaciones A, B, C, D, de modo que el cuadrilátero ABCD es siempre un paralelógramo. En un punto P de la regla AP hay un puntero metálico en E un eje de rotacion, y en L un lapiz, perpendiculares los tres al plano de la figura. Todo el instrumento puede moverse alrededor del eje E, y para que los movimientos sean mas suaves descansa sobre ruedecillas colocadas en A y junto á los puntos P y L. Colocados P, E y L en línea recta, si se hace recorrer el puntero P el contorno de una figura el lapiz L traza otro semejante al recorrido por P, y la relacion de los lados homólogos de dichos contornos es igual á la de las distancias de P y L al eje E. En efecto, AP y DE son constantemente paralelas y de longitud invariable en todas las posiciones del pantógrafo, y tambien permanecen constantes AL y DL. En la posicion PAL como P, E y L están en línea recta, los triangulos PAL y EDL son semejantes y por tanto $\frac{AP}{AL} = \frac{DE}{DL}$ y en una posicion cualquiera P'A'L' que tome el pantógrafo cuando se traslade el puntero de P á P' describiendo la recta PP' como $A'P' = AP$, $A'L' = AL$, $D'E = DE$ y $D'L' = DL$, tambien se verificará que $\frac{A'P'}{A'L'} = \frac{DE}{D'L'}$ luego si P, E y L están en línea recta en la primera posicion PAL del pantógrafo, lo estarán tambien en cualquiera otra posicion P'A'L'.

Por otra parte $\frac{PE}{EL}=\frac{AD}{DL}$ $\frac{P'E}{EL'}=\frac{A'D'}{D'L'}$ y como $AD=A'D'$ y $DL=D'L'$ $\frac{PE}{EL}=\frac{P'E}{EL'}$ ó $\frac{PE}{P'E}=\frac{EL}{EL'}$.

Luego 1.º los triángulos $PP'E$ y $LL'E$ son semejantes, puesto que tienen un ángulo igual comprendido entre lados homólogos proporcionales; y 2.º las líneas $PP'$ y $LL'$ recorridas por el punto y el lápiz son paralelas y están en la relación de $PE$ á $EL$.

Para que las escalas de la copias y el original ó los lados homólogos de uno y otro estén en la relación de los números $m$ y $n$, es necesario que $LE$ y $EP$ estén en la misma relación. Veamos que posición ha de darse al eje $E$ sobre la regla $DC$ y al lápiz $L$ sobre la $AL$, para que quede satisfecha dicha condición.

De la comparación de los triángulos semejantes $APL$ y $DEL$, resulta $\frac{AP}{DE}=\frac{PE+EL}{EL}$ $\frac{AD}{DL}=\frac{PE}{EL}$.

Designando por $a$ y $b$ las distancias constantes $AD$ y $AP$, por $x$ é $y$ las variables $DL$ y $DE$ y sustituyendo los números $\underline{m}$ y $\underline{n}$ en vez de las distancias $EL$ y $EP$, las dos ecuaciones anteriores se trasforman en las siguientes: $\frac{b}{y}=\frac{m+n}{m}$ $\frac{a}{x}=\frac{n}{m}$ de donde $y=\frac{bm}{m+n}=$ $=\frac{b\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1}$ $x=\frac{am}{n}$ (A)

Haciendo $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, $\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$, $\frac{m}{n}=\frac{1}{8}$, $\frac{m}{n}=\frac{1}{9}$ .... y sustituyendo estos valores en las dos últimas ecuaciones, se obtienen diferentes valores de $\underline{x}$ é $\underline{y}$ que se marcan sobre las reglas $DL$ y $DC$ á partir del punto $D$, y al lado se escriben los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ...

Para sacar una copia, cuya escala esté con el original en la relación de 1 á 2, se colocan el eje y el lápiz en las señales indicadas por el quebrado $\frac{1}{2}$, y del mismo modo se procede para las relaciones $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ .... Con este objeto el eje y el lapiz están unidos á abrazaderas que corren á lo largo de las reglas BC y AL. Se comprueba si uno y otro están bien colocados, viendo si el canto de una regla, ó un hilo tirante que pase por P y E, pasa tambien por L. Hecho esto, para obtener la copia de un original se hace recorrer al puntero las diferentes de este, y el lapiz va marcando sobre el papel de la copia figuras semejantes y cuyos lados están con los del original en la relacion que se necesiten. Se podria hacer uso del pantógrafo colocando el eje de rotacion en L y el lapiz en E; pero esto tendria el inconveniente de que las hojas de la copia y del original se superpondrian. Se prefiere por tanto colocar el eje en E y el lapiz en L. Para sacar una copia cuya escala sea mayor que el original, se coloca el puntero en L y el lapiz en P.

Cuando el original tiene mucha extension, hay necesidad de variar la posicion del pantógrafo; y para esto hay necesidad de trazar previamente en dicho original una recta AB y en la copia su homóloga ab; despues se lleva el pantógrafo á su nueva posicion y se colocan el puntero en A y el punto a de la copia debajo de la punta del lapiz. Hecho esto se clava en a una aguja, se coloca el puntero en B y se hace girar la copia en su plano, hasta que el punto b coincida con la punta del lapiz. Terminadas estas operaciones se puede continuar la copia.

Lo mismo en el pantógrafo descrito que en los que describiremos a continuacion, cuando no hay divisiones en las reglas, que indiquen la posicion que el eje y el lapiz han de tomar, para que las lineas homologas de la copias y el original esten en relaciones dadas, se procede del modo siguiente. Se colocan el eje de rotacion, el puntero y el lapiz en linea recta, se hace recorrer al segundo una recta del original y se examina si la trazada por el lapiz esta con su homologa en la relacion que se necesita. Si asi no fuera se cambian la posicion del eje y el lapiz en el sentido conveniente, cuidando de que el puntero este en la recta que los une, y se practican nuevos tanteos hasta llegar al resultado. En el pantografo anteriormente descrito las distancias AD y AP son constantes; y se obtienen copias cuyas lineas esten con las homologas del original en la relacion de m á n, situando el lapiz L y el eje E à las distancias $x$ é $y$ del punto D, calculadas por las formulas (A)

El Pantografo representado en la figura 263 se compone de cuatro reglas AI, BH, AP y CD, unidas por cuatro articulaciones A, B, C y D de modo que el cuadrilatero ABCD es siempre un paralelogramo, y puede girar al rededor de un eje E perpendicular á un plano. Lleva un puntero en P y un lapiz en L. Se demuestra del mismo modo que en el pantografo anterior, que una vez colocados P, E y L en linea recta, si se hace recorrer el puntero P una figura, el lapiz trazara un contorno semejante al recorrido por P, y la relacion de los lados homologos de dichos contornos es la de las distancias de P y L al eje E.

En este pantógrafo son constantes las distancias AL = a y AP = b, y para variar la relacion, $\frac{EL}{EP} = \frac{m}{n}$, se corre la regla CD hasta que D se halle á una distancia $x$ = DL del punto fijo L y el eje E sobre la DC hasta que diste $y$ = ED del punto D. Las distancias $x$ é $y$ se calculan por medio de los triangulos semejantes LDE y LAP en los cuales $\frac{LD}{LA} = \frac{LE}{LP}$ $\frac{DE}{AP} = \frac{LE}{LP}$ ó bien $\frac{x}{a} = \frac{m}{m+n}$ $\frac{y}{b} = \frac{m}{m+n}$ de donde $x = \frac{am}{m+n} = \frac{a\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1}$ $y = \frac{b\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1}$ (B)

Haciendo en estas fórmulas $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$ ---- se calculan diversos valores de $x$ é $y$ que se llevan desde los puntos L y L' sobre las reglas LA y L'B y desde el D sobre la DC, marcando en un extremo la relacion $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ---- Para sacar una copia cuya escala esté con la del original en la relacion de $\frac{1}{4}$, por ejemplo, se colocan las articulaciones D y C de la regla DC y el eje E en las divisiones marcadas con el quebrado $\frac{1}{4}$.

El Pantógrafo decimal (fig.ª 264) se compone de cuatro reglas de igual longitud, generalmente de un metro cada una, articuladas en los puntos L, M, P, N, y de otra regla CD articulada en C y D, que puede colocarse á diferentes distancias de la ML, paralelamente á esta. Se funda en el mismo principio que los ya descritos y tiene el puntero en P, el eje de rotacion en E y el lapiz en L.

Las constantes de este Pantógrafo son las longitudes de las cuatro reglas, y los valores de $x$ é $y$ correspondientes á las diversas relaciones entre las escalas de la copia y el original se deducen fácilmente de los triangulos semejantes DEL y NPL, en los cuales

$\frac{DL}{LN} = \frac{LE}{LP}$ $\frac{DE}{NP} = \frac{LE}{LP}$ de donde $\varphi = \frac{m}{m+n} \times 1^m = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1} \times 1^m$ $y = \frac{m}{m+n} \times 1^m = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1} \times 1^m$ (C)

Para obtener una copia cuyas líneas estén con sus homólogas del original en la relación de $\frac{1}{10}$, por ejemplo, se hace en una de las fórmulas (C) $\frac{m}{n} = 10$; se coloca la regla LD de modo que sus extremos estén á distancias de M y L iguales al valor que resulte para $\varphi$ ó $y$, y se corre el eje E sobre la regla DC hasta que diste de D lo mismo que D de L, para lo cual las reglas MP, LN y DC están divididas en milímetros estando sus respectivos ceros en L, M y D, y á las articulaciones DC y al eje E vá unido un nonius.

El micógrafo se compone de cuatro reglas (fig.ª 264) que forman un paralelógramo, y están articuladas en A, D E y B, lleva en P el puntero, en L el lápiz y puede girar alrededor de un eje E. Se diferencia de los Pantógrafos en que la modificación de las escalas se hace en él variando la posición de los puntos B y D. Por lo demás se funda en el mismo principio que dichos instrumentos. Las constantes del micógrafo son las distancias $AP = b$ y $AL = a$; y los valores $\varphi = DL$ é $y = ED = BA$ correspondientes á la relación $\frac{m}{n}$ entre las líneas homólogas de la copia y del original, se deducen de los triángulos LDE y LAP, que son semejantes, en lo que $DL : AL :: LE : LP$ ó $\varphi : a :: m : m+n$ $DE : AP :: LE : LP$ ó $y : b :: m : m+n$ de donde $\varphi = \frac{am}{m+n} = \frac{a\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1}$ $y = \frac{bm}{m+n} = \frac{b\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1}$. Generalmente en los micógrafos $a = b$, y por tanto $\varphi = y = \frac{a\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1}$. Pasemos á ocuparnos de las aplicaciones de las fotografías á la copia y reducción de planos.

Se obtienen copias en igual escala que el original por medios del papel Marion. Este papel tiene en una de sus caras una preparacion de cloruro de hierro y ferrocianuro potásico, que la accion de la luz trasforma en ferrocianuro férrico al obrar sobre dichas sales, produciendo una reaccion química.

El plano que se ha de reproducir debe estar dibujado en un papel lo mas trasparente posible, generalmente se emplea el papel tela. Pero si se quiere sacar copias de un plano que esté dibujado en un papel poco trasparente ó casi opaco, es necesario dotarle de aquella propiedad. Si el papel se puede engrasar, sin que la tinta se corra, se frota con cera y despues se calienta con una plancha; pero cuando esto no es posible se puede recurrir al uso de la bencina, que se aplica al papel en el mismo momento de la reproduccion fotográfica y se volatiza al cabo de muy poco tiempo, sin alterar el dibujo.

El papel trasparente se coloca en una prensa ó marco, que es exactamente igual á las que usan los fotografos, y de tal manera que los objetos queden en el orden siguiente: 1.º El cristal de la prensa; 2.º el original; 3.º el papel Marion; 4.º un mullido y 5.º unas tablas que llevan unas aldabillas que se sujetan al bastidor de la prensa y que hacen que unos resortes que esta lleva opriman á las tablas, trasmitiendose con uniformidad la presion á los dos papeles por medio del mullido. Toda la colocacion de estos objetos en la prensa debe hacerse tambien en un cuarto oscuro.

Hecho esto se lleva la prensa á recibir á traves del cristal la accion directa de los rayos del Sol, y la reaccion queda generalmente terminada en unos ocho ó diez minutos si el sol es claro; la luz de este no atraviesa las lineas dibujadas en el plano y verifica las descomposiciones en toda la parte que esté en blanco.

Para conocer cuando debe darse por terminada la exposicion al sol se puede mirar la parte del papel sensible expuesta á la luz, soltando una de las aldabillas, levantando la tabla correspondiente y un poco del mullido y doblando una punta del papel sensible. Cuando este presenta un color gris oliva con reflejos metálicos, es señal de que la reaccion está terminada. Si el papel de las copias presentase salientes sobre el del original, se ve directamente á traves del cristal sin necesidad de tocar la prensa.

Una vez terminada la reaccion se vuelve á llevar la prensa al cuarto oscuro ó á una habitacion que haya vidrios de color amarillo; para impedir la accion química de los rayos solares. Se quitan las tablas y el mullido y se lava la copia en agua bien limpias. El agua disuelve los cloruros de hierro y potasio y el ferrocianuro de hierro ó azul de Prusia. Despues de bien lavado el papel se le deja secar para lo cual se coloca colgado de una cuerda á la cual se le sujeta por medio de pinzas.

De lo que acabamos de decir se deduce que lo que en el dibujo eran lineas negras se ha disuelto y habrá quedado formando lineas blancas sobre el fondo azul que provendrán de la accion de luminosos que han atravesado sin obstaculo el fondo blanco del original estas son las copias que se llaman <u>negativas.</u> y si sobre ellas se quiere dibujar es preciso hacerlo con color blanco, lo cual es muy molesto. Cuando se presenta el caso de tener que dibujar se hace uso de las copias <u>positivas.</u>

Para obtener copias positivas de un original cualquiera se empieza por sacar una copias negativa en un papel preparado de la manera que hemos dicho, pero que es mucho mas fino sobre el cual obtendremos un dibujo de lineas blancas sobre fondo azul. Esta primera copias se coloca despues de lavada y seca en lugar del original y se verifican los mismos fenomenos quimicos que anteriormente, solo que en este caso la luz no altera mas que la parte de las lineas blancas de la primera copias y el fondo azul de estos impide el paso de los rayos. De manera que ejecutando las mismas operaciones, en el mismo orden, tendriamos que al lavar la segunda copias nos hallaremos con un dibujo en el que aparecen las lineas azules sobre fondo blanco, puesto que la parte correspondiente al fondo azul de la primera copias se habia disuelto.

Por este procedimiento se sacan en muy poco tiempo muchas copias en la misma escala de un mismo original, el cual sirve para todas las negativas que se quieran sacar. En cuanto à las positivas, generalmente se pueden sacar cuatro ò cinco de cada primera copias negativa hecha en papel delgado. Se pueden sacar copias en escala diferente de la del original, por medio del aparato que pasamos às describir.

Este aparato consta de dos partes distintas. La primera tiene por objeto sostener el plano que se quiere reducir, y consiste en un bastidor de fundicion A B C D (fig. 189) delante del cual hay otro bastidor p q r s, que puede subir y bajar á lo largo del primero por medio de un tornillo sin fin M N, cuya varilla está sugeta á los lados horizontales A C y B D, terminando en un manubrio O para hacerlo girar. La tuerca del tornillo está unida invariablemente al lado p q del segundo bastidor, y en cada uno de los lados verticales A B y C D del primero, hay además una ranura que sirve de guia para el movimiento citado. Sobre el bastidor p q r s, provisto tambien de dos guias horizontales p q y r s, hay otro t y z n que lleva la tuerca del tornillo sin fin E F, y finalmente una pieza giratoria c f g h á la que se puede comunicar un movimiento de rotacion al rededor de un eje horizontal proyectado en X y situado en el travesaño del tercer bastidor como se vé en la figura; este giro se produce valiendose del tornillo sin fin m n, que engrana con el sector dentado f g de la pieza giratoria. La pieza c f g h, cuya forma es muy diversa, lleva cuatro orificios a b c d, para sugetar el original á un tablero.

Por esta disposicion especial se consigue que el original tenga tres movimientos distintos, que son: 1.º Un movimiento vertical de traslacion que se produce actuando sobre el manubrio O. 2.º Un movimiento de traslacion horizontal, que se produce por medio del manubrio T y 3.º Un movimiento de rotacion al rededor del eje X, valiendose del manubrio V.

La segunda parte del aparato es una cámara oscura sostenida por cuatro pies verticales de fundicion (fig.ª 190) que van unidos por cuatro bastidores, tambien de fundicion y perpendiculares entre sí dos á dos. Estos cuatro pies terminan en su parte inferior como indica la figura 191, con el objeto de que puedan deslizar sobre dos carriles M N, colocados en el suelo de la habitacion, perpendicularmente al plano que se vá á reproducir.

En la parte superior del aparato hay un eje horizontal D (fig.ª 190) al cual va unido un platillo A B de fundicion, que puede girar al rededor de dicho eje, para lo cual lleva una circunferencia A C B, dentada por la parte inferior, que engrana con un tornillo sin fin D, produciendose el movimiento cuando se obra sobre el manubrio E. Sobre el platillo AB hay otro F C, tambien de fundicion que tiene libre un movimiento de rotacion horizontal al rededor de un eje vertical que pasa por su centro, para lo cual vá provisto de su correspondiente tornillo y manubrio H. Encima de este platillo, hay dos barras de hierro fundido, proyectadas las dos segun una de ellas a b, sobre las cuales vá la cámara oscura que es flexible en su parte central, para lo cual hay dos marcos de fundicion c d y e f unidos por un fuelle. Se puede variar la distancia de un marco al otro, por medio de un tercer tornillo que se maneja con el manubrio m.

En el marco e f mas inmediato al manubrio se pue-de fijar á voluntad el cristal esmerilado, ó el papel de la copia ó una placa sensibilizada; el otro marco c d sirve para fijar en él una piel completamente estirada, de forma piramidal truncada, sostenida por piezas de hierro. En su extremo ó base menor lleva el objetivo que vá dentro de un tubo que entra á enchufe en el interior de otro tubo fijo al resto del aparato, y para mover el objetivo convenientemente hay un piñon p, con su barra dentada.

Se comprenderá por esta disposicion de los aparatos, que para copiar un plano bastará colocarlo en el bastidor y que la copia se obtendrá en una escala generalmente menor que la del original. Vamos ahora á ver como se obtienen copias cuya escala esté en una relacion dada de antemano con la escala del original.

Consideramos una lente cualquiera L (fig.a 192) y sea F su foco principal, supongamos que la recta AB sea la vertical que pasa por la interseccion de las dos diagonales del rectangulo del original; su imagen será ab. Calculemos las distancias que ha de haber entre el original y el objetivo y entre este y la copia, para obtener la relacion fija de las escalas.

Llamando O e I á las magnitudes AB y ab del original é imagen y D y d sus respectivas distancias del centro O del objetivo tendremos: $\frac{O}{I} = \frac{D}{d}$. Sabemos tambien que siendo la distancia focal f $\frac{1}{f} = \frac{1}{D} + \frac{1}{d}$. Dada la relacion $\frac{I}{D}$, habrá que deducir los valores de d y D de las dos ecuaciones anteriores.

De la primera resulta $\frac{1}{D} = \frac{I}{O} \times \frac{1}{d}$ y sustituyendo en la segunda $\frac{1}{f} = \frac{I}{Od} + \frac{1}{d} = \frac{1}{d}\left(\frac{I}{O} + 1\right)$ de donde $d = f\left(\frac{I}{O} + 1\right)$

Análogamente $\frac{1}{d} = \frac{O}{ID}$; $\frac{1}{f} = \frac{1}{D} + \frac{O}{ID} = \frac{1}{D}\left(1 + \frac{O}{I}\right)$ $D = f\left(\frac{O}{I} + 1\right)$

Determinados los valores de D y d se fija el original en el tablero y éste en los cuatro orificios a b c d (fig.ª 189); despues se hace avanzar la cámara oscura sobre los carriles, hasta que el centro óptico del objetivo diste del plano la D y luego se mueve el marco e f (fig.ª 190) por medio del manubrio m, hasta que venga á quedar á la distancia d de aquel mismo punto. Pero como sabemos que las fórmulas que hemos establecido para el cálculo de las distancias no son más que aproximadas, la imagen no se dibujará sobre el cristal esmerilado en la escala buscada, si no que habrá un error, que se puede corregir del modo siguiente.

Se empieza por marcar en el cristal de la cámara un rectángulo cuyos lados estén con los de otro dibujado en el plano en la relacion deseada; como en general no coincidirá la imagen del segundo con el primero, se hace que coincidan sus centros, es decir, los puntos de interseccion de las diagonales respectivas. Esto se consigue por medio de los movimientos de rotacion que puede tener el plano en su soporte. Además el plano del cristal no será siempre paralelo al del original; para colocar el primero en esta posicion no hay mas que mover en sentido conveniente los tornillos que lleva el bastidor de la cámara oscura. De esta manera logramos que los cuatro vértices del rectángulo trazado en el cristal coincidan con las cuatro imágenes de los vértices del original; pero en este movimiento la recta que une los centros del rectángulo original y del trazado en el marco podría dejar de contener al centro óptico del objetivo, lo cual se puede rectificar hemos dicho haciendo que el centro del segundo rectángulo coincida con la imagen del primero, lo que se conseguirá al cabo de algunos tanteos.

Cuando ya se encuentra todo bien colocado de modo que se dibuje sobre el cristal esmerilado la imagen deseada, se quita este cristal y en su lugar se pone el papel Marion. Se emplea también el papel topográfico, para lo cual se coloca, después de quitar el cristal esmerilado, el papel preparado con colodion, tal como se hace en la fotografía. Si se usa el papel Marion, se obtienen directamente copias en fondo azul y trazos blancos, pero empleando un papel delgado como ya dijimos, puede servir para producir copias de trazos azules sobre fondo blanco ó positivas.

## Descripción y uso del aparato empleado para medir la base central de la triangulación de España

El aparato de medir bases, perteneciente á la comision del Mapa de España, se compone de una regla de platino P. P. (fig. 198) que forma termómetro metálico con otra de laton L. L. Estas dos reglas son paralelas con un intervalo de 6mm de separacion; están además unidas por su centro y libres en los extremos, de modo que las dilataciones se verifican libremente del centro á los extremos.

Con objeto de evitar las flexiones se ha dado, tanto á la regla de platino como á la de laton, catorce puntos de apoyo distribuidos á iguales distancias cuyos apoyos consisten en cojinetes; cada uno de estos tiene entre las placas de laton de que está formado esteriormente dos piezas cilíndricas p,t (fig. 199) tambien de laton que giran sobre ejes de acero, y en las que descansan las reglas P P, L L, hallandose estas contenidas lateralmente por otras cuatro piezas m, m, n, n, análogas á las anteriores, pero cuya forma es la de dos cilindros superiores á la regla P P, quedando los inferiores algo separados de la L L, y lo contrario se verifica respecto á las n n, de manera que el movimiento de cada pieza giratoria es debido al contacto de una sola regla y la dilatacion de las dos tiene lugar por lo tanto con entera independencia.

Cada cojinete se asegura por medio de dos tornillos i i á una pieza llamada banco que consiste en una pieza de hierro en forma de ⊥ con la cabeza hacia abajo, de 0,2 de altura. Las dos reglas son de la misma dimension. La P P presenta hácia sus estremos dos aberturas iguales á la a a, (fig. 200) en las que se mueven longitudinalmente las partes superiores de dos piezas de laton l l, invariablemente unidas á la L L; estas piezas l l tienen abiertas en toda su longitud dos pequeñas canales en las que entran las partes inferiores de otras dos piezas b b, en forma de T tambien de platino, y aseguradas á las primeras por medio de pasadores h, de modo que á partir de estos puntos de enlace, la dilatacion de dichas piezas de platino puede verificarse independientemente de las ll.

La regla PP está dividida en centímetros y de estos los doce correspondientes á los bordes de las dos aberturas aa, están además subdivididos en cien pequeñas partes cada una ó sea en divisiones equivalentes á $\frac{1}{10.000}$ de la longitud total, es decir, diez milímetros. Estos valores corresponden á la temperatura de $-6^{\circ},4$.

Las piezas de platino bb presentan hácia uno de sus lados y en el mismo plano que la cara superior de la regla PP, una division en partes enteramente iguales á las comprendidas en los intervalos mi, de modo que cuando un trazo ó raya de la pieza bb se coloca enfrente de otro de mi todos los demás de la misma pieza resultan en prolongacion de los correspondientes de la regla PP.

Para la traslacion de las reglas y del banco las sostienen se emplean cuatro asas E (fig. 198) sujetas con tornillos al banco. Los niveles QQ fijos á la placa EE é inmediatos á las asas indican á las personas que manejan las reglas cuando la posicion de estas es próximamente horizontal.

El aparato tiene cuatro soportes iguales al S (fig. 198) que consisten en una articulacion de tres tornillos que sostienen un cilindro hueco b, el cual está fileteado en su interior y termina por la parte superior en una corona que le sirve de tope; dentro de este va un tornillo que se puede girar por medio de la cabeza h y que imprime por consiguiente un movimiento de subida ó bajada al cilindro b; sobre la corona de este va, un platillo a a, y fijo con respecto á él, encima del cual está el O O, que puede tener un movimiento de deslizamiento y que se le comunica por medio del tornillo X, para lo cual está guiado por dos correderas g y lleva además el nivel C; y por último el n n con un movimiento de traslacion en sentido perpendicular al de la figura comunicado por medio de otro tornillo análogo al X, platillo que se guia tambien por medio de correderas g g; el n lleva un rodillo e sobre el cual por medio de la placa K K, descansa el banco, que se le puede dejar libre sobre dicho rodillo ó por medio del tornillo V y la pieza g fijarlas en cuyo caso solo se le puede mover por medio de los tornillos de los platillos inferiores.

Por medio de los aparatos que acabamos de describir puede ponerse con toda precision las reglas en la posicion conveniente, hecho lo cual se aprietan los tornillos, entre ellos el t, tornillo de presion que sirve para evitar que descanse el aparato sobre el h. Por último la articulacion de tres tornillos descansa por los extremos de estos, sobre los tejos de un fuerte tripode, en cuya meseta superior hay un orificio para dejar paso al cilindro J.

## Microscopios.

Son estos cuatro y consisten en un cilindro graduado C, fijo en una pieza a a (fig. 201) sostenida por la columna b b, la cual se halla unida á otras piezas inferiores que descansan por medio de tres tornillos sobre los tejos de fuertes trípodes de madera. Al circulo fijo CC tiene otro inferior concentrico cc cuyo eje hueco ee gira dentro de la pieza aa, cuando se mueve dicho circulo cc, bien sea à mano ò bien por la accion del tornillo f y de las piezas g. Al el referido circulo movil hay dos nonius, hallandose tambien unido à la parte giratoria un pequeño nivel j, por medio del cual se coloca vertical el eje ee. Afin de poder situar el centro del circulo cc en el punto conveniente de la columna bb y el cilindro KK que sirve de contrapeso à todo lo que descansa sobre ella, estan unidos à una placa movible longitudinal y transversalmente por encima de un sistema de tornillos y X g de correderas iguales à las q del aparato anterior. Del platillo CD salen dos cojinetes como los de los teodolitos, sobre los cuales se apoyan los ejes de varios anteojos. 1º para leer la regla, 2º para mirar al cielo y 3º para dirigir visuales como en el teodolito.

Las lecturas de la regla se efectuan por medio de los microscopios. Cada uno de estos termina por la parte superior (fig. 201) en un micrometro m m: el aumento del microscopio es 60. Para observar con el microscopio las divisiones de los intervalos p i (fig. 200) es necesario mover las reglas P P, L L, con los medios ya descritos, ò bien el mismo microscopio hasta que la imagen formada en el interior de la cajas de este, aumentada despues por el ocular, parezca respecto al retículo en la disposicion que indica la figura 203. Las operaciones de observar una raya ò trazo, bien sea de la regla P P ó de la I I, se reduce á mover el tornillo micrométrico hasta que dicha raya se halle lo mas exactamente posible, en medio del intervalo comprendido entre los dos hilos paralelos al retículo, intervalo que corresponde sobre las reglas á $0^{mm},025$.

En las posiciones que se indican de puntos resultarian exactamente observada la raya 64. La lectura micrométrica relativa á esta observacion se compone del número de vueltas indicado por los dientes del peine y de las partes de vuelta que señala el índice. La longitud que corresponde sobre las reglas á cada una de estas vueltas del tornillo micrométrico, es casi exactamente igual á las menores divisiones de los intervalos que vimos valian $\frac{1}{40.000}$ de la distancia total. Cada parte del tambor da por lo tanto $\frac{1}{40.000 \times 100} = \frac{1}{4.000000}$ de la misma distancia, ó sea una milésima de milímetro.

El anteojo que sirve para las alineaciones se diferencia únicamente de los ordinarios en que lleva un micrómetro, cuyo retículo presenta solo dos hilos perpendiculares entre si. El destinado á la observacion de los puntos de referencia del anterior en que los hilos del micrómetro se cruzan oblicuamente, como los de la mira que luego describiremos.

**Medicion de la base.** Para medir la base de la triangulacion geodésica de España, se escogió un terreno apropósito al Sur de Madrid en la llanura de Madridejos. La alineacion de la base se jalonó y en sus extremos se hicieron macizos de sillería que contienen en su interior cilindros de platino que marcan exactamente la posicion de dichos estremos en el terreno. La primera operacion que tuvo que hacer para medir la base fué colocar el primer microscopio de tal manera que su visual viniera á coincidir con el centro del cilindro de platino. Para esto se colocó en el trípode el anteojo que sirve para mirar al nadir y se acabó la coincidencia, por medio de los dos movimientos descritos. Despues de coincidir exactamente la visual se sustituyó el anteojo por el microscopio, cuya visual se encontraba ya en la alineacion de la base. En seguida hubo que colocar otros dos microscopios en la misma alineacion, para lo cual se hizo uso del anteojo de alineaciones, que se colocaba en el coginete de tal manera que su plano de colimacion coincidiera con el de la base; en otro trípode situado á unos cuatro metros del primero se colocó una mira, aparato que consiste en un anillo metálico (fig. 204) que lleva dos hilos cruzados, tambien metálicos; este anillo está unido á dos piezas tt' que le sirven de apoyo cuando se coloca sobre los coginetes del microscopio. Como hemos dicho se pone en el primer trípode el anteojo de alineaciones cuya visual se dirige al jalon mas próximo y cuando se obtuvo la coincidencia de la visual se colocó en el segundo trípode el aparato que acabamos de describir y se hizo que el retículo formado por los dos hilos cruzados viniera á tener contenido su centro en la visual del anteojo, para lo que se movia por tanteo los [illegible] del segundo trípode.

De una manera análoga se colocó un tercer trípode y se fueron poniendo los demás en la alineación de la base, á medida que se iban adelantando en la medición de la base. Una vez ya bien colocadas las visuales de los microscopios en la alineación, se ponían los trípodes de la regla y se colocaba ésta. Se acababa de poner en coincidencia con las visuales de los microscopios y se ponía horizontal ó casi horizontal.

La regla se coloca de manera que se vean por el microscopio las divisiones de las reglas de laton y de platino, se hace la lectura directa con los microscopios y las fracciones se obtienen por medio de los micrómetros como ya hemos dicho. Despues de hechas las lecturas en los dos extremos de la regla, se restan, y la diferencia nos dará á conocer la magnitud de regla comprendida entre dos visuales. Esto mismo se vá repitiendo sucesivamente, y la suma de todos los valores obtenidos, despues de hechas las correcciones, dá á conocer la longitud de la base.

Para terminar, vamos á describir el aparato que se usó para marcar los puntos extremos de la medición de cada dia. Consiste en una placa de laton (D, fig. 205) en cuya parte central hay una abertura circular. En esta placa hay tres ejes e e, e e y en su alrededor de los cuales pueden girar las tres piezas que vamos á describir. Dos de ellas, las e f g h, llevan una cuchilla ó buril de acero lo que puede girar en una abertura que tiene la placa en su parte extrema fig. Cuando á una de las placas se la ha hecho girar 180°. viene á ocupar la posicion representada por P. esta figura: el buril a puede marcar un trazo cuando se le haga girar. Montada sobre el tercer eje m n hay otra pieza análoga á las otras dos, pero que en lugar de llevar buril está terminada segun un circulo lleno r de laton, en cuyo centro hay otro menor p de plata, adherido á él.

Si imaginamos que hacemos girar esta última pieza, está dispuesta de tal modo que el pequeño circulo p de plata viene á ocupar exactamente el centro de la placa D. Haciendo girar primero á una y despues á la otra de las dos piezas ef gh, y moviendo los buriles en cada una de ellas, estos buriles marcan sobre el circulo p dos trazos perpendiculares, cuya profundidad se puede aumentar, si se quiere, colocando encima de los buriles unos cilindros de plomo.

Para marcar el término de las operaciones de un dia se empieza por hacer una pequeña construccion de silleria, que se reduce á una losa empotrada en el terreno, en el sitio en que se calcula próximamente que se harán la última lectura con los microscopios. Sobre la cara superior de esta losa se coloca la placa descrita D; se adapta la placa m n m cuyo circulo p lleva ya marcados los trazos y se mueve á un lado y otro hasta que la interseccion de estos dos trazos venga á coincidir exactamente con la visual del último microscopio.

Hecho esto se levanta la placa m n m, se bajan sucesivamente las otras dos y se graban por medio de los buriles, sobre otra placa incrustada en la piedra, otros dos trazos cuyas intersecciones determina el punto de referencia, que ha de quedar fijo en el terreno. Este punto nos marcará así el punto en que encuentra, el terreno la última visual de los microscopios, y por consiguiente el punto con que se debe hacer coincidir la visual del primer microscopio al empezar las operaciones en el día siguiente.

<u>Comprobación de la base central</u> = La base central se dividió en 5 secciones 1.2, 2.3, 3.4, 4.5 y 5.6 (Fig.ª 206), cuyas longitudes estaban comprendidas entre dos y cuatro kilómetros, y se fueron midiendo sucesivamente. Para la comprobación en lugar de volver á medir toda la base 16 se midió solamente de nuevo la sección 3ª., en el sentido 4.3 contrario al anterior, lo que dió para su longitud un valor que se diferenciaba del primero en 0mm 19, por lo cual se tomó el promedio de estas dos mediciones.

Hecho esto se efectuó la triangulación, como indica la figura, es decir, se eligieron en el terreno otros cuatro puntos 7, 8, 9 y 10. Estos puntos en unión de los seis de la base formaban un sistema de diez vértices desde cada uno de los cuales se veían los otros nueve y por lo tanto se podían medir los ángulos formados por las visuales dirigidas desde un vértice á los nueve restantes.

El objeto de esta triangulación era calcular la longitud de cada una de las secciones 1ª., 2ª., 3ª. y 5ª. de la base y la magnitud tal de esta, partiendo de la obtenida en las dos mediciones directas de la seccion 3ª. ó central y empleando los ángulos formados por las rectas que unen entre sí los diez vértices citados.

Con estos elementos, y despues de verificados los cálculos de compensacion de los errores se resolvieron [illegible] triángulos, que dieron por resultado para cada uno de los lados comunes, valores iguales todos con diferencias menores que un milímetro, lo cual confirmó la exactitud de los cálculos numéricos.

Las longitudes medidas directamente se refirieron á la superficie del nivel del mar y los cálculos de la triangulacion se hicieron partiendo de la seccion central corregida. De esta manera se hicieron comparables los valores deducidos de la medicion directa de las secciones 1ª. 2ª. 4ª. y 5ª. de la base y los calculados para las mismas, así como para la longitud total, por medio de la red trigonométrica compensada. Esta comparacion presenta los siguientes resultados.

| Secciones. | Medicion. | Triangulacion. | Diferencias. |
|---|---|---|---|
| 1ª. | 3.077m,459 | 3.077m,462 | −0m,003 |
| 2ª. | 2.216,397 | 2.216,399 | −0,002 |
| 3ª. | 2.766,604 | " | " |
| 4ª. | 2.723,425 | 2.723,422 | +0,003 |
| 5ª. | 3.879,000 | 3.879,002 | −0,002 |
| Base | 14.662,885 | 14.662,889 | 0,004 |

Lo primero que se observa en este resultado es la exactitud del aparato empleado en las mediciones, pues este error de $0^{m},006$ era completamente desconocido antes de medir la base central de España. Esto mismo se puede decir, no solo del valor total de la base, sino tambien del de cada una de las secciones, pues como se vé en el cuadro, en longitudes de dos y tres kilómetros solo se han obtenido como errores los mismos números 2 y 3 de milímetros ó sea $\frac{1}{1.000.000}$ en valor relativo. La corta diferencia arrojada por la comparacion tiene tambien gran importancia bajo otro punto de vista, puesto que como se ha hecho en este caso, se puede pasar de una base pequeña á otra grande.

Segun esto, basta medir una base de 2 á 3 kilómetros, ligandola despues con la triangulacion por medio de una red triangular que permita efectuar su comprobacion. Este resultado vino á poner fuera de duda una cuestion que era muy debatida, sobre si se debian adoptar ó nó bases muy largas; como hemos dicho, es completamente inutil que tengan una gran longitud, y esto unido á que es mas expuesto á errores y á que, naturalmente, es mayor el tiempo empleado, explica por qué en las triangulaciones modernas se adoptan bases de menor longitud que en las antiguas.

## Medicion de ángulos

Teodolito Repsold = La parte inferior de este aparato está dispuesta como la de Perrier. La columna K (fig.ª 211) es mas alta y el cono hueco descansa directamente sobre el macizo sin intermedio de tornillo alguno. Unidas al cono hueco va una horquilla y en los extremos de los brazos X X, Y Y de esta van dos cojinetes que sostienen el eje de rotacion del anteojo. Este eje es hueco y esta compuesto de dos muñones unidos á una caja cúbica J J y a la cual va fijo el anteojo T, que no es como los ordinarios, si no únicamente medio anteojo, como puede verse en detalle en la figura 212. Los rayos luminosos entran por el objetivo V se reflejan en el prisma rectangular isósceles p y salen por el ocular O. En L se coloca sobre una mesita una linterna con su reflector para iluminar los hilos del retículo cuando las observaciones se hagan de noche.

Esta disposicion del aparato tiene por objeto facilitar las observaciones, que se harian incómodas con la disposicion ordinaria, en el caso de tener que medir distancias zenitales muy próximas á 0.° ó 180.° Porque en efecto, como estos anteojos necesitan tener gran alcance para las triangulaciones de primer orden (6 á 7 decímetros de distancia focal á veces) resultan de bastante longitud, y al dirigir la visual á puntos muy elevados ó muy bajos, el ocular quedaría muy bajo ó muy alto para que se pueda observar con comodidad. Se evita este inconveniente haciendo que en vez de estar el ocular en el eje de figura del anteojo esté en O (fig.ª 211) sobre el eje de giro, de manera que al girar el anteojo permanece fijo.

Además, como el anteojo tendería á colocarse en su posicion de equilibrio bajando el objetivo, se adapta un contrapeso QQ, por medio del cual se consigue que el centro de gravedad caiga sobre el eje de giro y que el anteojo esté en cualquiera posicion en equilibrio. Unidos á los ejes van dos limbos GG, LL del mismo diámetro que el horizontal y uno á cada lado del anteojo. En el de la izquierda se leen las divisiones enteras por medio del índice Y con un microscopio y que está sostenido por una varilla H á la parte inferior de la horquilla. La varilla lleva un anillo para permitir el paso del eje del anteojo. Las lecturas en el limbo de la derecha se efectuan por medio de dos microscopios A y B con sus micrómetros M en correspondencia con las de la izquierda y dán el valor de la fraccion. Los microscopios van en los extremos de una regla horizontal y sostenidos por anillos g, que les permiten girar. Entre los dos microscopios vá colocado un nivel de aire n n, y como todos estos accesorios pesan bastante, al otro lado del eje se coloca un contrapeso R R. Sobre el anteojo se coloca un nivel volante N N, para colocar el eje vertical.

## Mapa-mundis

Proyeccion sobre el meridiano = Cuando los centros de las perspectivas de los meridianos y los paralelos no están en el papel, se recurre á los principios generales de perspectiva, buscando tres puntos de cada una de dichas curvas. Sea E P E' P' (fig.ª 214) el meridiano cuyo plano es el del cuadro,

$EE'$ la traza del ecuador sobre dicho meridiano y $PP'$ el eje de los polos. Imaginemos un paralelo cualquiera, por ejemplo, el que tiene 30° de latitud boreal, tal que su tangente $30°M$ corta á $PP'$ fuera de los límites del dibujo; el plano de este paralelo cortará al del cuadro según la recta $30°.30°_1$. Imaginemos también el cono visual, cuyo vértice estará en el extremo del radio del ecuador proyectado en $E$, y un plano que contenga el eje óptico y el eje polar. Cortará este plano al cono óptico según dos generatrices y al cuadro según el eje de los polos; los puntos en que corta esta recta á dichas generatrices, serán los de intersecciones de estas con el plano del cuadro y pertenecerán por lo tanto, á la perspectiva buscada. Pero como todos estos puntos están en el plano que se proyecta en $PP'$, tendremos que rebatirlo al rededor de este eje hasta que se confunda con el plano del meridiano, con lo cual el punto de vista vendrá á $E'$.

Los dos puntos del meridiano perpendicular proyectados en $a$ se rebatirán en $30°$ y $30°_1$, y las generatrices serán $E'\,30°$ y $E'\,30°_1$; como el punto $a$ no se moverá al deshacer el rebatimiento, será un punto de la perspectiva. Los puntos $30°$ y $30°_1$, que pertenecen á la vez al paralelo y al plano del cuadro, son también de la perspectiva, y como esta ha de ser un arco de círculo, estará completamente determinada por los tres puntos $30°$, $a$ y $30°_1$.

El trazado del arco de círculo se puede hacer por medio de su ecuación con relación á dos ejes coordenados que pasen por $a$

ó sirviéndose de un método gráfico cualquiera.

Supongamos que se trate ahora de un meridiano. Sabemos que todos los meridianos cortan al ecuador según radios que forman entre sí los mismos ángulos que los de los meridianos. Imaginemos un semi-meridiano cualquiera; desde luego tenemos que están los dos puntos P y P' (fig.ª 215) de su perspectiva, por pertenecer al plano del cuadro. Otro tercero se obtendrá tomando como plano auxiliar al del ecuador, puesto que contiene el vértice, que es el punto de vista proyectado en O. Supongamos que el meridiano de que se trata es el que forma 30° con el plano de proyección; su traza sobre el ecuador formará también 30° con el radio OE.

Si ahora imaginamos que el plano del ecuador gira al rededor del eje EE' y de tal manera que la parte anterior del ecuador venga á caer sobre la inferior del meridiano, es decir, que el punto de vista caiga sobre P, la traza del meridiano después de rebatida quedará según 30°. La generatriz será, pues P.30° y a el punto buscado de la perspectiva, con lo cual queda esta completamente determinada por P, a y P'. Lo mismo se hará con otro meridiano cualquiera.

Proyección inglesa. Hemos visto que tanto las proyecciones ortográficas como las estereográficas tienen el inconveniente de producir deformaciones en las áreas de los trapecios curvilíneos en que dividen á la tierra los meridianos y paralelos. Con objeto de hacer que desaparezcan estas deformaciones se ha ideado las proyecciones de que nos vamos á ocupar, y que es puramente empírica; puede ser sobre un meridiano ó sobre el ecuador.

## Proyección inglesa sobre el ecuador =

Sea O.30.60 .... (fig.ª 217) el círculo máximo del ecuador. Se le divide en un cierto número de partes iguales y los radios O.30, O.60 ---- representarian los meridianos; vimos que en esto es igual esta proyeccion á la ortográfica y estereográfica. Para trazar los paralelos se divide un radio en partes iguales E a = a b = b P y por los puntos de divisiones se hacen pasar círculos concéntricos, todos ellos, al ecuador. Tanto los meridianos como los paralelos llevan el número de grados de sus respectivas longitudes y latitudes.

## Proyección inglesa sobre el meridiano =

Sea E P E' P' el meridiano que se toma para plano de proyeccion (fig.ª 218) se divide en partes iguales y en el mismo número se dividen los diámetros E E' y P P'. Este último representa la proyeccion del meridiano perpendicular al del cuadro y los demás se representan por arcos de círculo que pasan por cada uno de los puntos de divisiones del diámetro E E' y los dos polos P y P'. Los paralelos se representan tambien por arcos de círculo determinados por los puntos de division del meridiano E P E' P' y los del diámetro P P'; el ecuador se proyecta en su traza E E'.

**Proyección de la Hire** = Esta proyeccion es una perspectiva, en la que se toma como punto de vista un punto que diste del ecuador (que es el plano del cuadro) una magnitud igual al radio mas el seno de 45°. Es decir, que si suponemos que EE (fig.ª 219) sea el ecuador, el punto de vista será el O, tal que $PO = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}$ y vamos á ver que tomando este punto de vista hacemos mas iguales las zonas en que dividen el mapa los paralelos.

Para ello demostraremos primero que la proyeccion estereográfica del paralelo MN. de 45° de latitud, es una circunferencia de radio PF mitad del radio PE del ecuador, y en la hipótesis de $PE = 1$ tendremos $PF = \frac{1}{2}$

En efecto, la figura dá $PF = LN = \frac{OP}{OL}$ y como $LN = \sqrt{\frac{1}{2}}$ será $PF = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{\frac{1}{2}})}{1+2.\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}}{2(\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$

Si se divide ahora el semicirculo EMNE en mayor número de partes iguales, es fácil ver que los circulos de proyeccion resultan casi igualmente esparcidos; sobre todo con mucha mas igualdad que en las proyecciones ortográficas y estereográfica.

<u>*Proyeccion sobre el horizonte*</u> = Este sistema (fig.ª 220) se emplea cuando se quiere que una poblacion ocupe el centro del mapa. Si por ejemplo, se quiere que sea Madrid y se supone HMHO es un meridiano y M Madrid, el punto de vista será O, situado en el extremo opuesto á M del diámetro OM; el plano del cuadro será el horizonte racional HH. La traza del ecuador sobre el meridiano será la recta EE que forma con TM un ángulo $\lambda = 40° 24' 30''$ que es la latitud de Madrid, y la linea de los polos será PP', perpendicular á EE. La construccion del mapa-mundi se hace siguiendo los principios que se han indi-

-cado como fundamento de la proyeccion estereografica, empezaremos por los paralelos. Los polos P y P' (fig. 221 tendran sus perspectivas en p y p' puesto que estos puntos son las intersecciones de los rayos visuales OP y OP' con el horizonte HH.

Sea el paralelo ab de 60° de latitud, por ejemplo, su perspectiva, como ya sabemos, será un circulo cuyo diametro sea mn, puntos correspondientes á las generatrices extremas Oa y Ob del cono visual. Si ahora suponemos que se hace girar el circulo del horizonte al rededor de HH hasta que venga á confundirse con el meridiano, el circulo mn, aparecerá en verdadera magnitud, y como el diametro mn no ha variado por estar en el eje de giro, bastará construir sobre dicha recta como diametro y haciendo centro en su punto medio 0 un circulo para tener la perspectiva pedida. Lo mismo exactamente se hará para otro paralelo cualquiera cd y tambien para el ecuador. Pero para este ultimo no es necesario buscar el punto conjugado de e, por la particularidad de que M y O son puntos de su perspectiva. Para demostrarlo basta observar que antes de hacer el rebatimiento el ecuador EE (fig. 220) corta al horizonte HH en los dos puntos extremos del diametro perpendicular al meridiano y proyectado en T, porque este plano meridiano es perpendicular al horizonte y al ecuador, y por lo tanto, á su interseccion. Hecho el rebatimiento, los dos puntos citados (que se hallan segun decimos en el plano del ecuador) vendrán á M y O, determinando juntamente con e la proyeccion del ecuador.

Los meridianos se representan tambien con gran facilidad. Sabemos que sobre la esfera terrestre pasan todos ellos por los polos y que por consiguiente sus perspectivas deben pasar tambien por los puntos de proyeccion p y p' (figª 224) de dichos polos; y esto equivale á decir que los centros de las proyecciones de los meridianos deben estar todos situados sobre la recta m m', levantada perpendicularmente á p p' en su punto medio m.

Para buscar el tercer punto que nos hace falta para determinar por completo la perspectiva de un meridiano nos valdremos del segundo teorema. Siendo (figª 224) A B P P' el plano del cuadro, tenemos ya un meridiano (el del lugar M) proyectado segun AB, que es su traza sobre el horizonte. Un meridiano cualquiera que forme con este 30°, por ejemplo, tendrá por perspectiva un circulo que pasará por p formando el mismo angulo con AB; trazando pues, por p dos rectas p 30° á 30° con p B tendremos las dos tangentes á los dos circulos representativos de los dos semi-meridianos que corresponden á dicha longitud de 30°. Las dos normales p q y p q' nos darán, por su encuentro con m m' los dos centros q y q' de los arcos p a p' y p a' p' que son los buscados.

Los meridianos de 60° nos darán los centros r y r' desde donde trazaremos los arcos p b p' y p b' p' que los representan. Los semi-meridianos de 90° se confunden en uno solo y por lo tanto su perspectiva es un circulo p c p' c' comun á los dos y cuyo centro es m. Los semi-meridianos de 120° y 150°, como son opuestos

... 30° y 60°, tienen ya trazadas sus proyecciones. De todas las construcciones anteriores se deduce que en esta clase de proyeccion la línea AB divide en dos partes simétricas, tanto á los paralelos como á los meridianos. Las figuras 221 y 222 hacen ver que mientras la escala del mapa-mundi no sea sumamente pequeña los diferentes centros de las perspectivas caerán, en su mayoría, fuera del papel. Vamos á ver como se deberá proceder en este caso para trazar puntos de las proyecciones.

1º. Paralelos. En el caso más desfavorable habrá que buscar dos puntos nuevos porque uno está siempre determinado dentro del papel por su union con el punto de vista. Así por ejemplo, el paralelo a b (fig. 223) dá un punto m de su perspectiva. Los dos puntos que se emplean para acabar su determinacion son los dos de interseccion del paralelo con el cuadro del plano. Así pues las perpendiculares levantadas en c á HH nos darán los dos puntos d y e del paralelo, despues de hecho el rebatimiento

2º. Meridianos. En estos sucede tambien que se tiene siempre un punto y en este caso es uno de los polos; el problema queda así reducido á buscar dos puntos que son como antes los dos de interseccion del meridiano de que se trate y del horizonte: pero como son dos puntos situados en los extremos de un diámetro nos basta conocer uno de ellos. Sea M (fig. 224) el lugar de la latitud λ y O por lo tanto el punto de vista. HH su horizonte racional. El eje de los polos P P' se encontrará formando con el horizonte el ángulo

λ. Si suponemos que P m L m' es el meridiano que nos propone-
mos representar, m será el punto de que acabamos de hablar.

Hagamos $HP = \lambda$ y $HPm = L$, en el triángulo esférico P m a, rectángulo en H y en el que conocemos λ y L, podremos calcular H m. Por consiguiente al rebatir tendremos que m vendrá a $m_1$ de tal manera que $Hm = Hm_1$. La fórmula que nos servirá para el cálculo es $tg.\ Hm = sen\ \lambda\ tg\ L$.

Esto mismo se puede hacer muy fácilmente por medio de una construcción gráfica deducida de esta fórmula. Desde el punto M (fig.ª [illegible]) se toma $M\lambda = \lambda$ y por el centro c se trazará cK de modo que forme con a c el ángulo L; por e se tira una paralela e.l á a c. Uniendo l con c dará los puntos $m_1$ y m' sobre la circunferencia. Para demostrarlo tenemos que $a\,l = e\,f = f\,c.\ tg.\ e\,c\,f$ y $f\,c = sen.\ \lambda$ luego $a\,l = sen.\ \lambda\ tg.\ L$. Lo que nos dice que m es el punto pedido.

Fin de la topografía